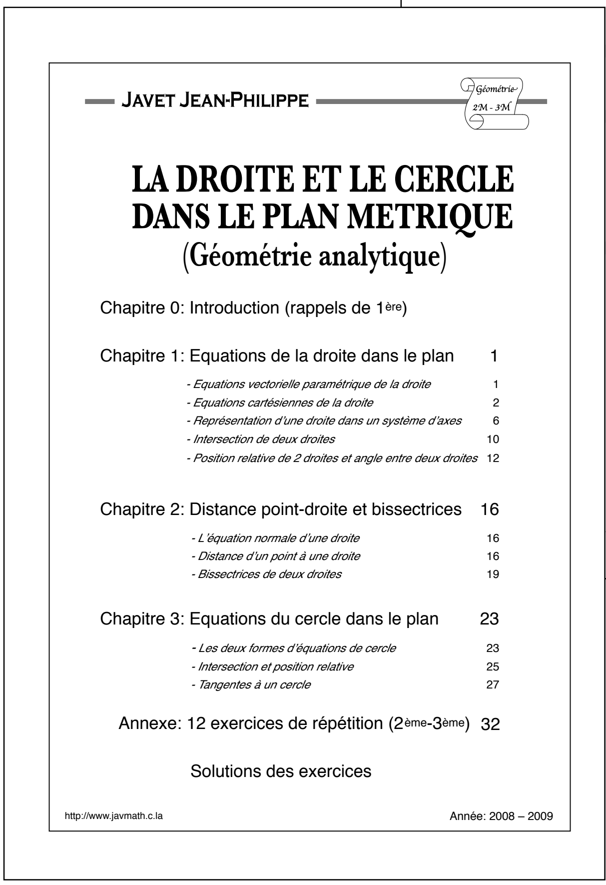
Et si on utilisait l'ordinateur pour effectuer nos exercices de géométrie ??

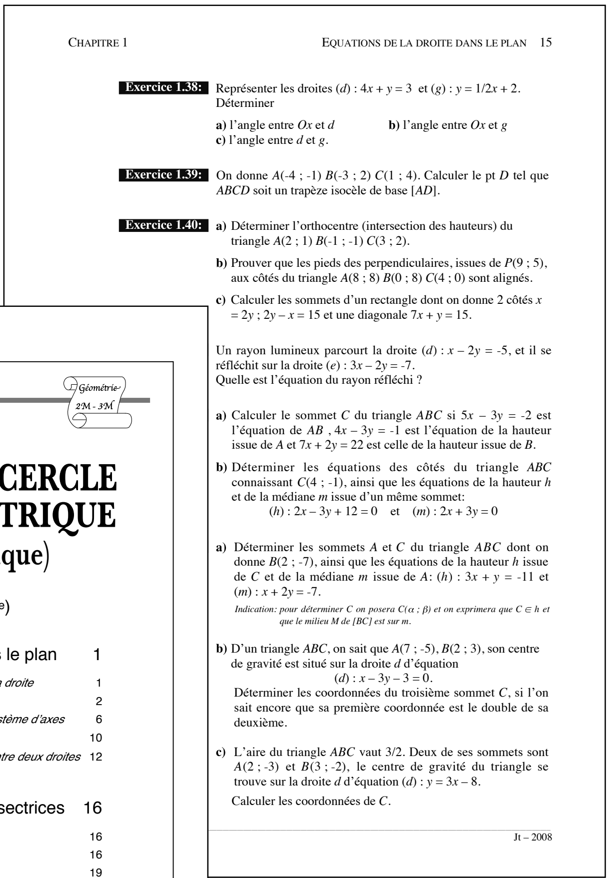


Javet Jean-Philippe

Géométrie 2M - 3M

LA DROITE ET LE CERCLE DANS LE PLAN METRIQUE
(Géométrie analytique)

http://www.javmath.c.la Année: 2008 – 2009



Exercice 1.38: Représenter les droites $(d) : 4x + y = 3$ et $(g) : y = 1/2x + 2$.
Déterminer

a) l'angle entre Ox et d **b)** l'angle entre Ox et g
c) l'angle entre d et g.

Exercice 1.39: On donne $A(-4 ; -1)$ $B(-3 ; 2)$ $C(1 ; 4)$. Calculer le pt D tel que $ABCD$ soit un trapèze isocèle de base $[AD]$.

Exercice 1.40: **a)** Déterminer l'orthocentre (intersection des hauteurs) du triangle $A(2 ; 1)$ $B(-1 ; -1)$ $C(3 ; 2)$.

b) Prouver que les pieds des perpendiculaires, issues de $P(9 ; 5)$, aux côtés du triangle $A(8 ; 8)$ $B(0 ; 8)$ $C(4 ; 0)$ sont alignés.

c) Calculer les sommets d'un rectangle dont on donne 2 côtés $x = 2y$; $2y - x = 15$ et une diagonale $7x + y = 15$.

Un rayon lumineux parcourt la droite $(d) : x - 2y = -5$, et il se réfléchit sur la droite $(e) : 3x - 2y = -7$.
Quelle est l'équation du rayon réfléchi ?

a) Calculer le sommet C du triangle ABC si $5x - 3y = -2$ est l'équation de AB , $4x - 3y = -1$ est l'équation de la hauteur issue de A et $7x + 2y = 22$ est celle de la hauteur issue de B.

b) Déterminer les équations des côtés du triangle ABC connaissant $C(4 ; -1)$, ainsi que les équations de la hauteur h et de la médiane m issue d'un même sommet:

$$(h) : 2x - 3y + 12 = 0 \quad \text{et} \quad (m) : 2x + 3y = 0$$

a) Déterminer les sommets A et C du triangle ABC dont on donne $B(2 ; -7)$, ainsi que les équations de la hauteur h issue de C et de la médiane m issue de A: $(h) : 3x + y = -11$ et $(m) : x + 2y = -7$.

Indication: pour déterminer C on posera $C(\alpha ; \beta)$ et on exprimera que $C \in h$ et que le milieu M de [BC] est sur m.

b) D'un triangle ABC, on sait que $A(7 ; -5)$, $B(2 ; 3)$, son centre de gravité est situé sur la droite d d'équation

$$(d) : x - 3y - 3 = 0.$$

Déterminer les coordonnées du troisième sommet C, si l'on sait encore que sa première coordonnée est le double de sa deuxième.

c) L'aire du triangle ABC vaut 3/2. Deux de ses sommets sont $A(2 ; -3)$ et $B(3 ; -2)$, le centre de gravité du triangle se trouve sur la droite d d'équation $(d) : y = 3x - 8$.

Calculer les coordonnées de C.

www.geogebra.at

GeoGebra Quickstart [1]

Un guide de référence rapide pour GeoGebra

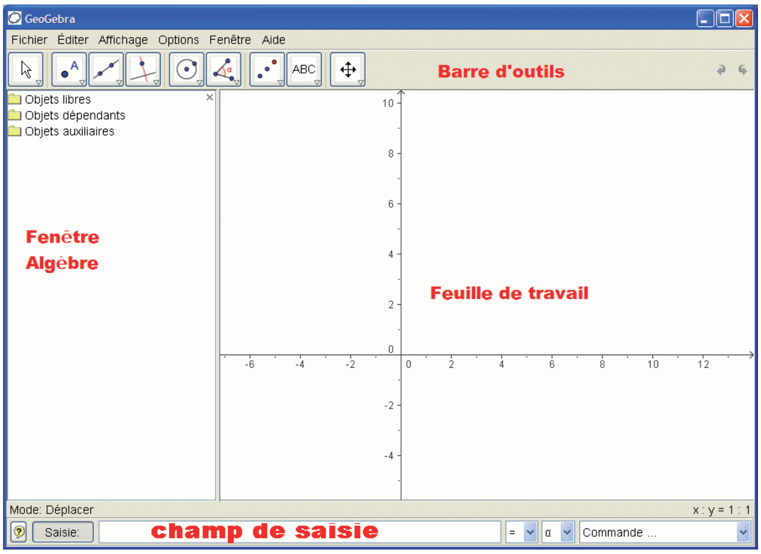
Géométrie dynamique, algèbre et calculs s'associent pour former GeoGebra, un logiciel qui associe **géométrie** et **algèbre** comme des partenaires d'égale importance.

De la manière la plus simple, vous pouvez faire des constructions contenant des points, des vecteurs, des segments, des droites aussi bien que des fonctions, qui peuvent être modifiées ensuite dynamiquement à la souris. D'une autre manière, la saisie telle que : $g : 3x + 4y = 7$ ou $c : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ est possible. La caractéristique la plus remarquable de GeoGebra est la double perception des objets : chaque expression de la Fenêtre Algèbre correspond à un objet dans la Feuille de Travail et vice versa.

Dans ce qui suit, vous allez vous familiariser avec GeoGebra en examinant quatre exemples. Vous devriez les travailler l'un après l'autre et ne pas oublier d'essayer, en plus, les astuces proposées.

- **Exemple 1 :** Cercle circonscrit à un triangle
- **Exemple 2 :** Tangentes à un cercle
- **Exemple 3 :** Un problème d'alignement
- **Exemple 4 :** Un peu d'algèbre et de géométrie

Après démarrage de GeoGebra, la fenêtre représentée ci-dessous apparaît.

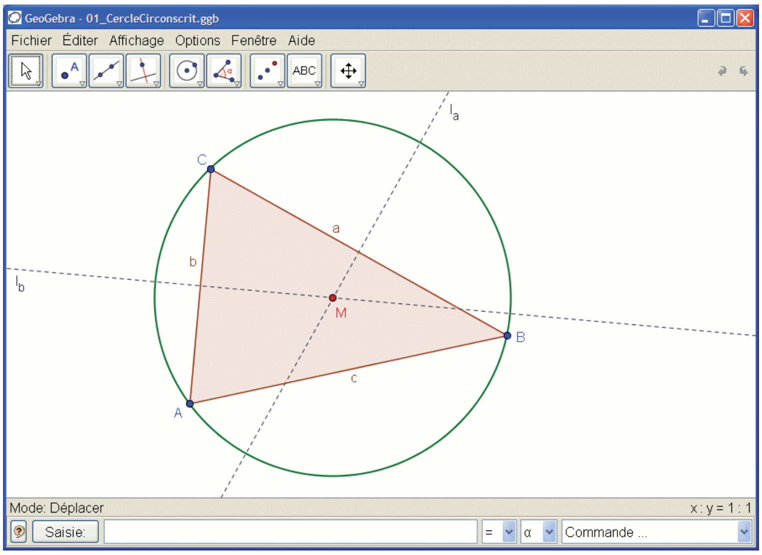


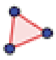
Au moyen des outils de construction dans la barre d'outils vous pouvez faire des constructions sur la feuille de travail à la souris. Simultanément, les coordonnées ou équations associées sont affichées dans la fenêtre algèbre. Le champ de saisie est utilisé pour entrer les coordonnées, les équations, les commandes et les fonctions directement ; elles sont affichées immédiatement dans la feuille de travail dès que la touche "enter" est pressée.

1. Ce tutoriel est très largement inspiré de *GeoGebra Quickstart* que vous trouverez sur www.geogebra.at Que ses auteurs et traducteurs soient ici remerciés : Markus Hohenwarter, Vincent Douce, Nicolas Hainaux, David Tran et Noël Lambert.

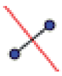
Exemple 1 : Cercle circonscrit à un triangle

Construire un triangle ABC et son cercle circonscrit.

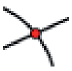




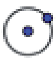
- ◇ Choisissez l'outil "Polygone" dans la barre d'outils (clic sur la petite flèche sur la cinquième icône à partir de la gauche). Maintenant, cliquez dans la feuille de travail trois fois pour créer les sommets A, B, et C. Fermez le triangle en cliquant de nouveau sur A.



- ◇ Ensuite, choisissez l'outil "Médiatrice" (clic sur la petite flèche sur la quatrième icône à partir de la gauche) et construisez deux médiatrices en cliquant sur deux côtés du triangle.



- ◇ A l'aide de l'outil "Intersection entre deux objets" (clic sur la petite flèche sur la deuxième icône à partir de la gauche) vous pouvez cliquer sur les deux médiatrices pour obtenir le centre du cercle circonscrit à votre triangle. Pour le nommer M, cliquez dessus avec le bouton droit de la souris et choisissez "Renommer" dans le menu qui apparaît.

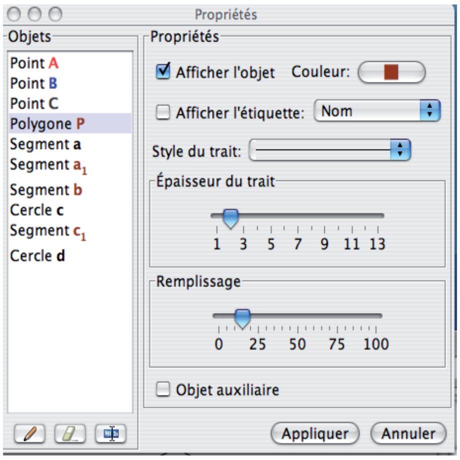


- ◇ Pour finir la construction, vous devez choisir le "Cercle (centre-point)" (clic sur la sixième icône à partir de la gauche) et cliquez d'abord sur le centre, puis sur un sommet quelconque du triangle.

- ◇ Maintenant, choisissez l'outil "Déplacer" (clic sur la première icône à partir de la gauche) et utilisez la souris pour changer la position d'un sommet : vous expérimentez de cette manière la "géométrie dynamique" : *Même en déplacant les sommets du triangles, le cercle circonscrit demeure.*

Quelques astuces à essayer. . .

- L'item "Annuler" du menu "Editer" est un outil très utile pour reculer d'une étape.
- Vous pouvez rendre des objets invisibles puis de nouveau visibles en cliquant dessus avec le bouton droit de la souris et en cochant ou non "Afficher l'objet". Cette manipulation peut être effectuée directement sur la feuille de travail ou mieux sur la fenêtre d'algèbre (lorsque l'objet n'est pas visible par exemple).
- L'aspect des objets (couleur, style du trait, etc.) peut être facilement modifié : utilisez à nouveau le clic droit de la souris sur l'objet désiré et choisissez "Propriétés" dans le menu contextuel.

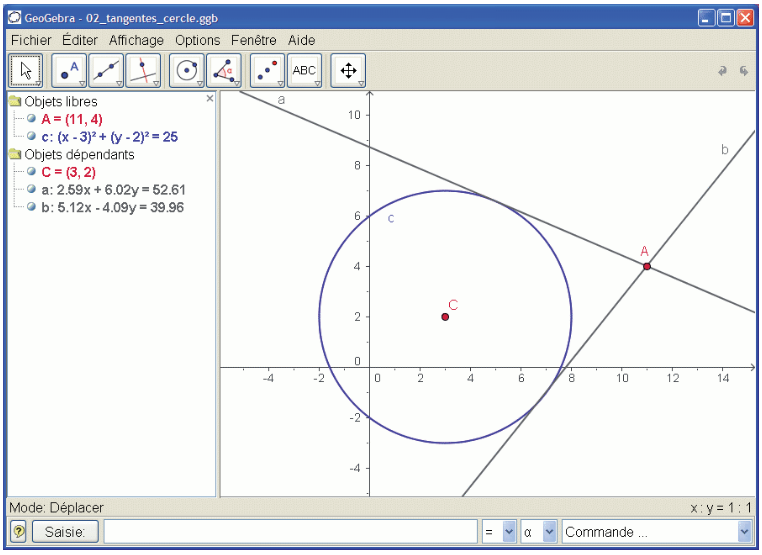


- Pour modifier la position de la feuille de travail, choisissez l'outil "Déplacer la feuille de travail"(clic sur la onzième icône à partir de la gauche) et déplacer la souris en appuyant sur le bouton gauche.

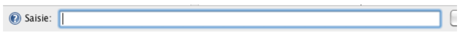
- Si vous désirez ouvrir une nouvelle page blanche Geogebra, utilisez le commande "Nouvelle fenêtre" du menu "fichier".

Exemple 2 : Tangentes à un cercle

Construire par un point les 2 tangentes à un cercle.



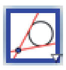
Construction à l'aide du champ de saisie et de la souris



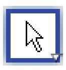
- ◇ Insérez l'équation du cercle $\mathbf{c} : (\mathbf{x}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}+(\mathbf{y}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}=\mathbf{25}$ dans le champ de saisie et appuyez sur entrée (astuce : le signe ^{2} est accessible dans la liste déroulante située à droite du champ de saisie)

- ◇ Entrez la commande $\mathbf{C} = $ **Centre[c]** dans le champ de saisie.

- ◇ Construisez le point A en tapant $\mathbf{A} = (\mathbf{11}, \mathbf{4})$.



- ◇ Maintenant, choisissez l'outil "Tangentes" (clic sur la petite flèche sur la quatrième icône à partir de la gauche) et cliquez sur le point A puis sur le cercle c.



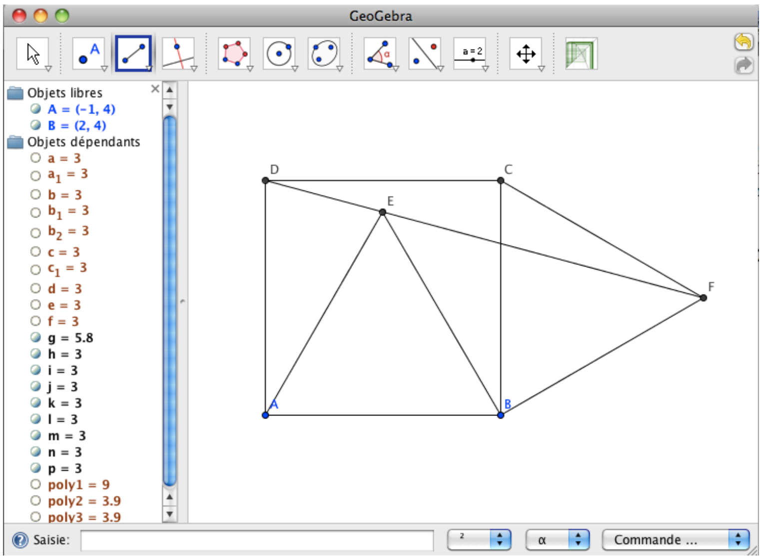
- ◇ Après avoir choisi l'outil "Déplacer", déplacez le point A avec la souris et observez le mouvement des tangentes. Vous devriez aussi essayer de déplacer le cercle c et observer son équation dans la fenêtre Algèbre.

Quelques nouvelles astuces à essayer...

- Zoomez en plus ou moins : cliquez sur un emplacement vierge de la feuille de travail avec le bouton droit et choisissez le facteur de zoom désiré.
- Il est possible de changer l'équation du cercle directement dans la fenêtre Algèbre en double-cliquant dessus. Proposer la modification suivante : $(\mathbf{x}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}+\mathbf{y}^{\mathbf{2}}=\mathbf{4}$.
  Quels sont alors les coordonnées du centre et le rayons de ce nouveau cercle ?
- Plus d'informations sur les possibilités du champ de saisie se trouvent dans le menu "Aide", en choisissant l'item "Aide" puis sur la page Web apparaissant, le contenu "Saisie Algébrique". Vous pouvez garder cette fenêtre Aide en arrière-plan et revenir à la fenêtre Geogebra en cliquant dessus.

Exemple 3 : Un problème d'alignement

Ou comment Geogebra peut vérifier une propriété.



- ◇ Dans le menu "Fichier", Choisissez " Nouvelle fenêtre".

- ◇ Entrez les commandes $\mathbf{A} = (-\mathbf{1}, \mathbf{4})$ et $\mathbf{B} = (\mathbf{2}, \mathbf{4})$ dans le champ de saisie.

- ◇ À l'aide des outils :

  - "Segment" (clic sur la petite flèche sur la troisième icône à partir de la gauche) ;
  - "Droite perpendiculaire" (clic sur la petite flèche sur la quatrième icône) ;
  - "Cercle (centre-point)" (clic sur la petite flèche sur la sixième icône) ;
  - "Intersection entre deux objets" (clic sur la petite flèche sur la deuxième icône) ;
  - "Droite parallèle" (clic sur la petite flèche sur la quatrième) ;

  Construire le carré $ABCD$.

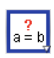
- ◇ Rendez invisibles toutes les droites, cercles et points qui vous ont été nécessaires à la construction du carré (cf. 2[e] astuce page 3).

- ◇ En déplaçant le point A, contrôler que le carré $ABCD$ reste carré.

- ◇ À l'aide des mêmes outils, construire les 2 triangles équilatéraux, puis rendez invisibles les cercles de constructions.

- ◇ Les points D, E et F semblent alignés. Nous pouvons le contrôler à l'aide de Geogebra :

- ◇ Construire les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ avec l'outil "vecteur"(clic sur la petite flèche sur la troisième icône à partir de la gauche) 

- ◇ Avec l'outil "Relation entre deux objets"(clic sur la petite flèche sur la dixième icône à partir de la gauche), contrôler la colinéarité en cliquant sur les 2 vecteurs concernés. 

Exemple 4 : Un peu d'algèbre et de géométrie

Ou comment Geogebra nous remplace pour les calculs.

Intersection de deux droites.

◇ Dans le menu "Fichier", choisissez "Nouvelle fenêtre".

◇ Dans le champ de saisie, nous tapons puis nous validons successivement les définitions des deux droites d_1 et d_2 :

$$\mathbf{d1} : \mathbf{3x - y - 3 = 0} \text{ puis } \mathbf{d2} : \mathbf{x + y - 3 = 0}$$

Dès que les formules sont validées, les droites sont tracées et leur équation figure dans la fenêtre d'algèbre.

◇ Quand les deux droites sont tracées, nous définissons leur intersection S :

$$\mathbf{S = Intersection[d1, d2]}$$

Le point S apparaît sur la figure, ainsi que ses coordonnées $(1.5, 1.5)$ dans la fenêtre algèbre.

Simple...non ?

Étude du trinôme du second degré, intersection avec une droite.

◇ Après avoir demandé une nouvelle page, nous saisissons puis validons successivement, dans le champ de saisie, les fonctions définissant les deux courbes.

$$\mathbf{f(x) = x^2 - 5x + 4} \text{ puis } \mathbf{g(x) = x/3 + 1}$$

◇ Pour localiser la parabole, nous calculons son sommet S et ses points d'intersection avec l'axe des abscisses :

$$\mathbf{S = Extremum[f]} \text{ puis } \mathbf{Z = Racine[f]}$$

Les valeurs numériques se lisent à nouveau dans la fenêtre algèbre :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= (\mathbf{2.5, -2.25}) \\ \mathbf{Z_1} &= (\mathbf{1, 0}) \\ \mathbf{Z_2} &= (\mathbf{4, 0}) \end{aligned}$$

◇ Intersection avec la droite $y = g(x)$. Nous définissons l'intersection I comme déjà vu dans le paragraphe précédent :

$$\mathbf{I = Intersection[f, g]}$$

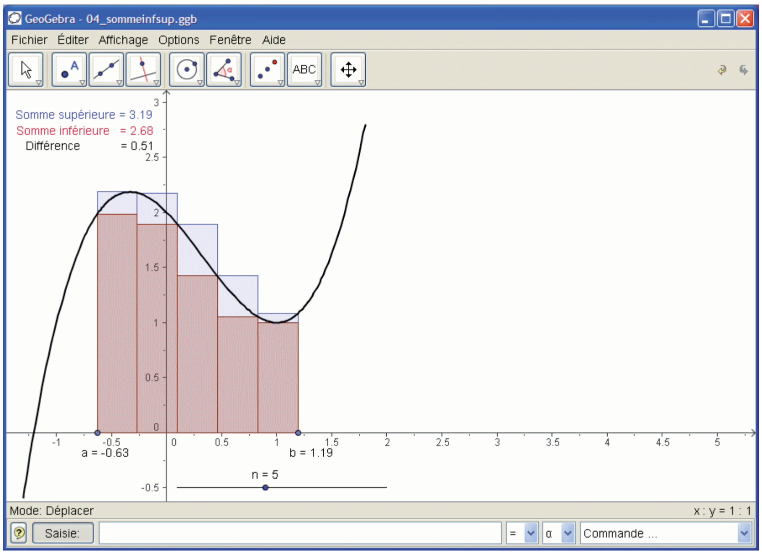
Là encore, le résultat est immédiat :

$$\begin{aligned} \mathbf{I_1} &= (\mathbf{0.64, 1.21}) \\ \mathbf{I_2} &= (\mathbf{4.69, 2.56}) \end{aligned}$$

Les valeurs ne sont qu'approchées et arrondies, mais ce n'est déjà pas si mal...non ?

Pour de plus amples informations

Je vous invite à visiter la page Web de Geogebra *www.geogebra.at*. Vous y trouverez des informations supplémentaires, ainsi que la plus récente version du logiciel libre. GeoGebra vous permet aussi de créer facilement des feuilles de travail dynamiques qui peuvent être affichées par n'importe quel navigateur (par exemple Firefox, Safari ou Internet Explorer). Sur ce sujet, vous trouverez des exemples et des informations supplémentaires, toujours sur le site de Geogebra.



Page Web de GeoGebra	**www.geogebra.at**
Forum des Utilisateurs de GeoGebra	**www.geogebra.at/forum**
GeoGebraWiki - banque de fichiers éducatifs	**www.geogebra.at/en/wiki**

Pour faire parvenir toute suggestion, ou pour tout retour sur le logiciel, n'hésitez pas à écrire directement à l'auteur *Markus.Hohenwarter@sbg.ac.at* (en anglais ou en allemand).

Plusieurs références et copies d'écrans de ce document proviennent du guide *GeoGebra Quickstart* téléchargeable directement sur le site.

§ 1.9 Un petit mélange de tout ce que vous devez savoir !!!

Exercice 1.36: Du triangle ABC, on connaît les équations de 2 côtés :

$$(AC) : -3x - y + 13 = 0 \quad \text{et} \quad (BC) : x - 2y = 2.$$

De plus $(m) : 4x - y = 1$ est l'équation de la médiane issue de A.
Calculer l'équation de (AB).

Exercice 1.37: Calculer les sommets d'un parallélogramme dont on donne le sommet $A(10 ; 1)$, les équations de 2 côtés :

$$x - 2y + 5 = 0 \quad \text{et} \quad -x + 2y + 8 = 0,$$

ainsi que l'équation d'une diagonale : $6x - 25y = -43$.

Exercice 1.39: On donne $A(-4 ; -1)$ $B(-3 ; 2)$ $C(1 ; 4)$. Calculer le pt D tel que $ABCD$ soit un trapèze isocèle de base $[AD]$.

Exercice 1.40: **b)** Prouver que les pieds des perpendiculaires, issues de $P(9 ; 5)$, aux côtés du triangle $A(8 ; 8)$ $B(0 ; 8)$ $C(4 ; 0)$ sont alignés.

Exercice 1.41: Un rayon lumineux parcourt la droite $(d) : x - 2y = -5$, et il se réfléchit sur la droite $(e) : 3x - 2y = -7$.
Quelle est l'équation du rayon réfléchi ?

Exercice 1.42: **a)** Calculer le sommet C du triangle ABC si $5x - 3y = -2$ est l'équation de AB , $4x - 3y = -1$ est l'équation de la hauteur issue de A et $7x + 2y = 22$ est celle de la hauteur issue de B.

b) Déterminer les équations des côtés du triangle ABC connaissant $C(4 ; -1)$, ainsi que les équations de la hauteur h et de la médiane m issue d'un même sommet:

$$(h) : 2x - 3y + 12 = 0 \quad \text{et} \quad (m) : 2x + 3y = 0$$

Exercice 1.43: **a)** Déterminer les sommets A et C du triangle ABC dont on donne $B(2 ; -7)$, ainsi que les équations de la hauteur h issue de C et de la médiane m issue de A: $(h) : 3x + y = -11$ et $(m) : x + 2y = -7$.

Indication: pour déterminer C on posera $C(\alpha ; \beta)$ et on exprimera que $C \in h$ et que le milieu M de [BC] est sur m.

b) D'un triangle ABC, on sait que $A(7 ; -5)$, $B(2 ; 3)$, son centre de gravité est situé sur la droite d d'équation

$$(d) : x - 3y - 3 = 0.$$

Déterminer les coordonnées du troisième sommet C, si l'on sait encore que sa première coordonnée est le double de sa deuxième.

Chapitre 1: Solutions des exercices

Exercice 1.36: $5x - 3y + 11 = 0$

Exercice 1.37: $B(22\ ;\ 7)$ $C(9\ ;\ 7)$ $D(-3\ ;\ 1)$

Exercice 1.39: $D(4\ ;\ 3)$ *(l'autre solution correspond à ABCD parallélogramme)* ***à contrôler !***

Exercice 1.40: **b)** les 3 points alignés sont (9 ; 8), (3 ; 2) et (7 ; 6)

Exercice 1.41: $29x - 2y + 33 = 0$

Exercice 1.42: **a)** $C(6\ ;\ 1)$ **b)** $3x + 7y = 5$ $3x + 2y = 10$ $9x + 11y = -5$

Exercice 1.43: **a)** $A(5\ ;\ -6)$ $C(-4\ ;\ 1)$ **b)** $C(12\ ;\ 6)$ **c)** $C_1(1\ ;\ -1)$ ou $C_2(-2\ ;\ -10)$