Annexe du chapitre 2: Limites et Asymptotes

A.1 Les fonctions continues

La notion de continuité d'une fonction est moins facile à définir qu'il n'y paraît. Jusqu'au début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, cette notion se comprenait par référence à la courbe d'une fonction sur son graphique : la continuité de la fonction restant confondue avec la continuité du trait de crayon supposé tracer la courbe. C'est à cette période qu'apparut la « crise de la continuité ». Plusieurs théorèmes sur le sujet jugés précédemment évidents n'admettaient pas de preuve rigoureuse. Pour cela, il fallait une vraie définition de la continuité d'une fonction…
Heureusement Augustin Cauchy en ébaucha une dans son cours à l'École polytechnique en 1823. Il y expliquait qu'une fonction **continue** est **une fonction qui varie peu lorsque sa variable varie peu.**

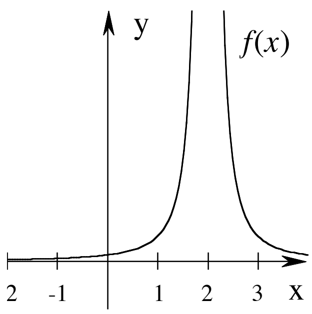
Dans notre cours, nous nous contenterons de l'idée qu'une fonction est continue si on peut tracer sa courbe sans soulever le crayon. Ainsi tous les théorèmes seront acceptés sans preuve.

Définition: Soit $a, b \in \mathbb{R}$, f une fonction,

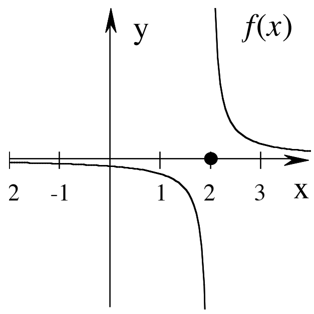
- La fonction f est **continue en $x = c$** si f est définie en c et si
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c) = \lim_{x\to c^+} f(x)$$
- La fonction f est **continue sur $]a\ ;\ b[$** si f est continue pour tout c de $]a\ ;\ b[$
- La fonction f est **continue sur $[a\ ;\ b]$** si f est continue sur $]a\ ;\ b[$ et si de plus
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$

Exercice A2.1:

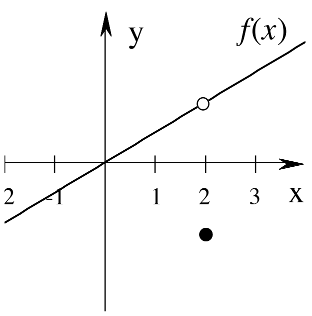
Préciser pour quelles raisons les fonctions suivantes sont **discontinues** en $x = 2$



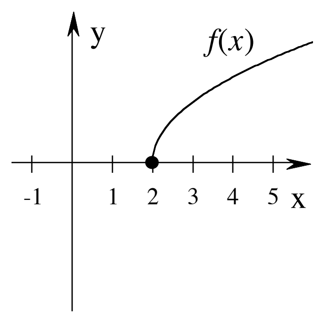
a)



b)



c)



d)

Définition: On note E_C l'ensemble des points où *f* est continue et on parle de **l'ensemble de continuité** de *f*.

Remarque : Les fonctions polynomiales, rationnelles ou irrationnelles sont continues sur leur ensemble de définition, et très souvent on a $E_C = E_D$

Exemples : Les 4 ensembles de continuité des fonctions de l'exercice A2.1 sont :

a) $E_C = \mathbb{R} - \{2\}$ *(= E_D)* **b)** $E_C = \mathbb{R} - \{2\}$ *(mais $E_D = \mathbb{R}$)*
c) $E_C = \mathbb{R} - \{2\}$ *(mais $E_D = \mathbb{R}$)* **d)** $E_C = [2\,;+\infty[$ *(= E_D)*

Exercice A2.2 :

Pour chacune des fonctions *f* suivantes :
a) déterminer les ensembles de définition E_D et de continuité E_C puis comparer les deux.
b) esquisser la courbe représentative.

1) $f(x) = \dfrac{1+x}{2-x}$ **2)** $f(x) = \dfrac{1-x^2}{3x-3}$

3) $f(x) = |x-1| + |x+2|$ **4)** $f(x) = \sqrt{x^2}$

5) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 1-x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ *cette fonction s'appelle « signe de x » :* ***sgn(x)***

7) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ -2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **8)** $f(x) = \dfrac{|x+9|}{x+9}$

Exercice A2.3 :

Déterminer E_C des fonctions *f* suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{6-x}}$ **2)** $f(x) = \begin{cases} 1+2x-|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice A2.4 :

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) & \text{si } x = 2 \end{cases}$.

Définir $f(2)$ pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice A2.5 :

Déterminer une fonction affine h pour que la fonction f donnée soit continue sur $\mathbb{R}$:

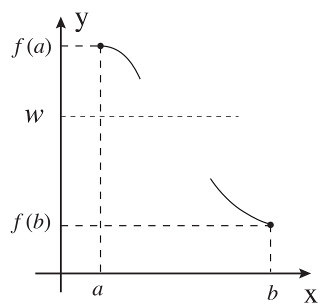
$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < -1 \\ h(x) & \text{si } \ldots \\ \dfrac{1}{2}x - 3 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

A.2 Théorème de la valeur intermédiaire

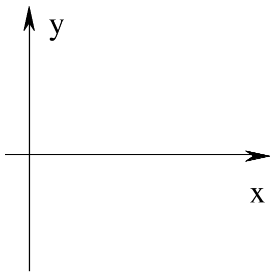
Théorème de la valeur intermédiaire

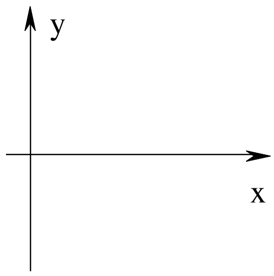
Si f est une fonction continue sur $[a\ ;\ b]$ et si w est un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Alors il existe au moins un nombre $c \in [a\ ;\ b]$ pour lequel $f(c) = w$.



Application : Soit une fonction f continue sur $[a\ ;\ b]$ tel que $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Le théorème affirme alors que l'équation $f(x) = 0$ admet **au moins** une solution comprise entre a et b.





Exercice A2.6 :

a) Démontrer que l'équation $x^3 - 5x^2 + 7x - 9 = 100$ a au moins une solution.

b) Démontrer que l'équation $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ admet au moins deux solutions sur l'intervalle [-2 ; 1].

Exercice A2.7 :

L'équation $6x^2 - 17x = -12$ admet-elle une solution pour $x \in [1\ ;\ 2]$?

Exercice A2.8 :

Vous partez à 12h00 pour aller trouver votre grand-mère. Très gentiment, elle vous propose de dormir chez elle et de rentrer le lendemain en partant à la même heure. Est-il vrai que vous passerez alors au moins une fois à la même heure au même endroit ? *(justifier votre réponse)*

Exercice A2.9 :

La température T (en °C) à laquelle l'eau bout est fonction de l'élévation h (en m) au-dessus du niveau de la mer :

$$T(h) = 100{,}862 - 0{,}0415\sqrt{h + 431{,}03}$$

Montrer que, entre 4000 et 4500 m d'altitude, l'eau bout à 98°C

Un petit dernier…

Exercice A2.10 :

En accord avec la théorie de la relativité, la longueur L d'un objet perçue par un observateur immobile dépend de sa vitesse v selon la formule $L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ où L_0 est sa longueur au repos et c la vitesse de la lumière.

Einstein a montré aussi que la masse m de cet objet est liée elle à la formule $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Calculer puis interpréter les deux limites suivantes $\lim\limits_{v \to c^-} L$ et $\lim\limits_{v \to c^-} m$