Annexe du chapitre 4: Dérivée d'une fonction et règles de calcul

A.1 Les règles de dérivation quelques démonstrations:

Le but de ce paragraphe est de démontrer quelques règles de dérivation que l'on pourra alors appliquer « à l'aveugle » dans les exercices et sans avoir plus besoin de calcul de limites. Certaines preuves seront basées sur les règles rappelées ci-contre :

<u>*Rappels des règles sur les limites :*</u>

- $\lim\limits_{x \to a} \left(nbre \cdot f(x) \right) = nbre \cdot \lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \right)$
- $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ si $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

Rappel des règles de dérivation :

1ère règle : Si $f(x) = nbre$ $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$

Preuve : cf ci-dessous

2ème règle : Si $f(x) = nbre \cdot x$ $\Rightarrow$ $f'(x) = nbre$

Preuve : en exercice

3ème règle : Si $f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Si $f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Preuve : ??

4ème règle : Si $f(x) = g(x) \pm h(x)$ $\Rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

Preuve : cf ci-dessous

5ème règle : Si $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ $\Rightarrow$ $f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Preuve : en exercice

6ème règle : Si $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ $\Rightarrow$ $f'(x) = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$

Preuve : en BONUS

7ème règle : Si $f(x) = nbre \cdot g(x)$ $\Rightarrow$ $f'(x) = nbre \cdot g'(x)$

Preuve : en exercice

<u>*Preuve des règles n° 1, 3 et 4 définie ci-dessus:*</u>

II ANNEXE CHAPITRE 4

Exercice A4.1: Prouver la 2ème règle de dérivation

Exercice A4.2: Voici la preuve de la 5ème règle ci-dessus qu'il s'agit de compléter

Hypothèse : $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

Conclusion : $h'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Preuve :

- $h'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ldots\ldots - \ldots\ldots}{\ldots\ldots - \ldots\ldots} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a}$

Truc *: on ajoute et on retranche au numérateur l'expression* $f(a) \cdot g(x)$

$$h'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - \ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots - f(a) \cdot g(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \left[g(x) \cdot \frac{\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots}{x - a} + f(a) \cdot \frac{\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots}{x - a} \right]$$

$$= \lim_{x \to a} g(x) \cdot \lim_{x \to a} \frac{\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots}{x - a} + \lim_{x \to a} f(a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} g(x) \cdot f'(a) + \lim_{x \to a} f(a) \cdot g'(a) = g(\ldots\ldots) \cdot f'(\ldots\ldots) + f(\ldots\ldots) \cdot g'(\ldots\ldots)$$

En réorganisant les termes et en changeant la variable de a en x, on obtient bien :

$$h'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exercice A4.3: Prouver la 7ème règle de dérivation

A.2 La dérivée de fonctions, un autre calcul de limite

Exercice A4.4: Soit une fonction f donnée, on définit une nouvelle fonction f^* par le calcul suivant :

$$f^*(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

a) Calculer f^* pour les 2 fonctions f suivantes :

$$f(x) = x^2 + 4 \quad \text{et} \quad f(x) = 1/x$$

b) Que constatez-vous ?

c) Justifier votre dernière affirmation par des calculs ou des esquisses judicieusement choisis.

A.3 La dérivée de fonctions composées et de fonctions réciproques

Introduction Nous avons déjà eu l'occasion de dériver quelques fonctions composées ; en effet les fonctions :

- $f(x) = \sqrt{x-2}$ correspond à $f(x) = (g \circ h)(x)$ avec

  $g(x) = \ldots\ldots\ldots$ et $h(x) = \ldots\ldots\ldots$

- $f(x) = (3x-5)^3$ correspond à $f(x) = (g \circ h)(x)$ avec

  $g(x) = \ldots\ldots\ldots$ et $h(x) = \ldots\ldots\ldots$

- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+4}}$ correspond à $f(x) = (g \circ h)(x)$ avec

  $g(x) = \ldots\ldots\ldots$ et $h(x) = \ldots\ldots\ldots$

Lors du calcul de ces 3 dérivées, nous avons vu apparaître ce que nous avons appelé la **dérivée interne**. Ceci se généralise lors du calcul de la dérivée de toutes les fonctions composées.

Les règles de dérivation des fonctions composées :

8ème règle : Si $f(x) = g(x) \circ h(x) = g\big(h(x)\big) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)$

Exercice A4.5: Utiliser la règle ci-dessus pour calculer la dérivée des 3 fonctions proposées ci-dessus.

Exercice A4.6: Compléter la démonstration de cette 8ème règle :

Hypothèse : $f(x) = g(x) \circ h(x) = g(h(x))$

Conclusion : $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Preuve :

$$(g \circ h)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(g \circ h)(x + \Delta x) - \ldots\ldots\ldots}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(h(x + \Delta x)) - \ldots\ldots\ldots}{\Delta x}$$

Truc *: on amplifie la fraction par* $h(x + \Delta x) - h(x)$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(h(x + \Delta x)) - \ldots\ldots\ldots}{\Delta x} \cdot \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(h(x + \Delta x)) - \ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\Delta x}$$

On pose grâce à un changement de variable :

$$z = h(x) \Rightarrow h(x + \Delta x) = z + \Delta z \quad \Leftrightarrow \quad \Delta z = \ldots\ldots\ldots$$

D'où

$$(g \circ h)'(x) = \underbrace{\lim_{\Delta z \to 0} \frac{g(z + \Delta z) - \ldots\ldots\ldots}{\Delta z}}_{\ldots\ldots\ldots} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - \ldots\ldots\ldots}{\Delta x}}_{\ldots\ldots\ldots}$$

$$= g'(z) \cdot h'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Exercice A4.7: **a)** Démontrer, en appliquant deux fois la *Règle de dérivation du produit*, que si f, g et h sont des fonctions dérivables, alors :

$$\left(f \cdot g \cdot h\right)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

b) Montrer qu'en particulier si $f = g = h$ alors

$$\left([f(x)]^3\right)' = 3[f(x)]^2 \cdot f'(x)$$

A.4 Équation d'une tangente, une formule bien pratique

Exercice A4.8: Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = x^2$ au point d'abscisse $x = 2$.

Théorème L'équation de la droite tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point $T(x_0\,;f(x_0))$ est donnée par

Une formule plus rapide

$$\boxed{y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)}$$

Exemple Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = x^2$ au point d'abscisse $x = 2$.

Exercice A4.9: Prouver la formule proposée ci-dessus.

Exercice A4.10: Déterminer les équations des tangentes aux courbes $y = f(x)$ ci-dessous

a) $y = 5x^2 - 6x + 2$ au point $P(1\,;f(1))$

b) $y = \dfrac{3x-2}{5x+1}$ au point $P(0\,;f(0))$

c) $y = \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$ au point $P(4\,;f(4))$

Exercice A4.11: La courbe $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ porte le nom de **sorcière de Maria Agnesi**. Trouver l'équation de la tangente à cette courbe au point P d'abscisse $x = -1$.