# Chapitre 3: Introduction à la notion de dérivée

***Prérequis***: Généralités sur les fonctions, limites ***Requis pour***: Optimisation, Études de fonctions, Fct. exp et log

## 3.1 La tangente en un point d'une courbe définie par sa fonction

**Introduction**

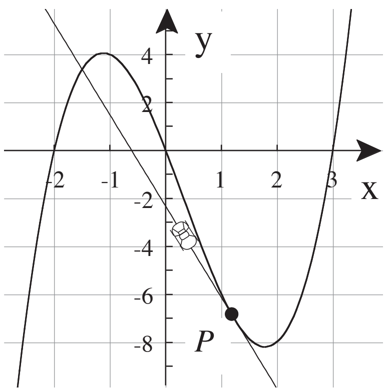
Nous commencerons ce chapitre par l'étude du problème qui consiste à déterminer **la pente de la tangente** en un point du graphe d'une fonction. Nous aborderons une démarche comparable à celle développée par Isaac Newton.

Cette application nous conduira à la notion de **dérivée**.

Par la suite, nous oublierons l'aspect géométrique du problème pour définir la dérivée comme **limite** d'une expression impliquant une fonction. Nous généraliserons ce concept de dérivée à différentes fonctions et nous développerons **des règles de dérivation.** Nous nous entraînerons ensuite à les utiliser.

Une dernière étape consistera à appliquer la dérivée dans des applications concrètes (problèmes d'optimisation par exemple)

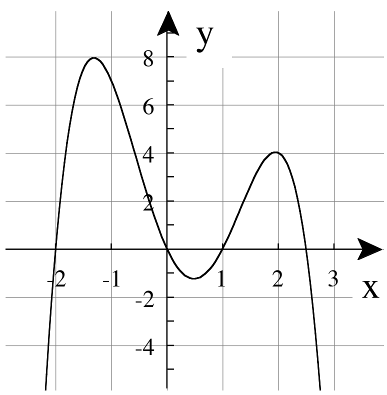
**Problème**




Il est souvent utile de connaître la tangente à une courbe en un point $P$. Par exemple, la trajectoire suivie par une voiture en perte de maîtrise correspond justement à la tangente à sa trajectoire prise depuis le point de dérapage.

On peut remarquer que contrairement à un cercle, la tangente en un point d'une courbe *peut* recouper cette courbe en un autre point.
Notre objectif sera de déterminer **la pente** de la tangente en un point pour pouvoir le cas échéant déterminer **l'équation de cette droite tangente**.

**Maximum et minimum**




Lors de nos études de fonctions précédentes, nous avons pu esquisser de bons graphiques à l'aide du tableau de signes de la fonction et de ses asymptotes. Mais il nous manquait des informations quant à la position des "virages" de la courbe. Ces points extrêmes admettent chacun une tangente dont la particularité est que sa pente vaut **zéro**.

À partir d'une fonction, nous utiliserons 3 méthodes différentes permettant de calculer la pente de la tangente à sa courbe par un point donné.

## 3.2 Méthode 1: À l'aide du graphique

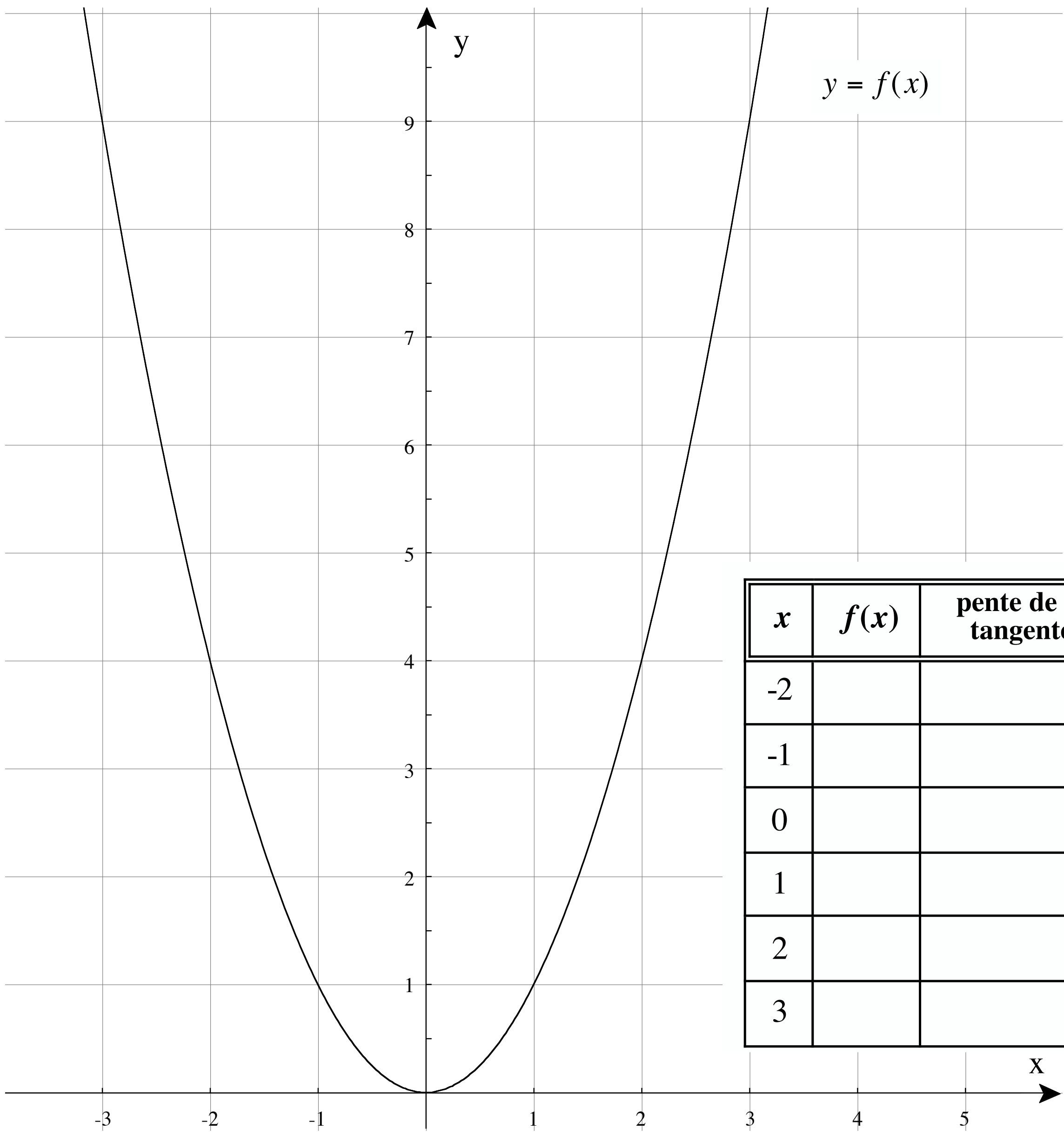
**Exercice 3.1:** Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = x^2$.

**a)** Tracer le plus précisément possible les tangentes à la courbe $y = f(x)$ aux points d'abscisses:

$$x = -2,\ x = -1\ ,\ x = 0,\ x = 1,\ x = 2 \text{ et } x = 3.$$

**b)** Compléter le tableau de valeurs.

**c)** Déterminer un lien entre la 1ère et la 3ème colonne de ce tableau.




| $x$ | $f(x)$ | pente de la tangente |
|---|---|---|
| -2 | | |
| -1 | | |
| 0 | | |
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |

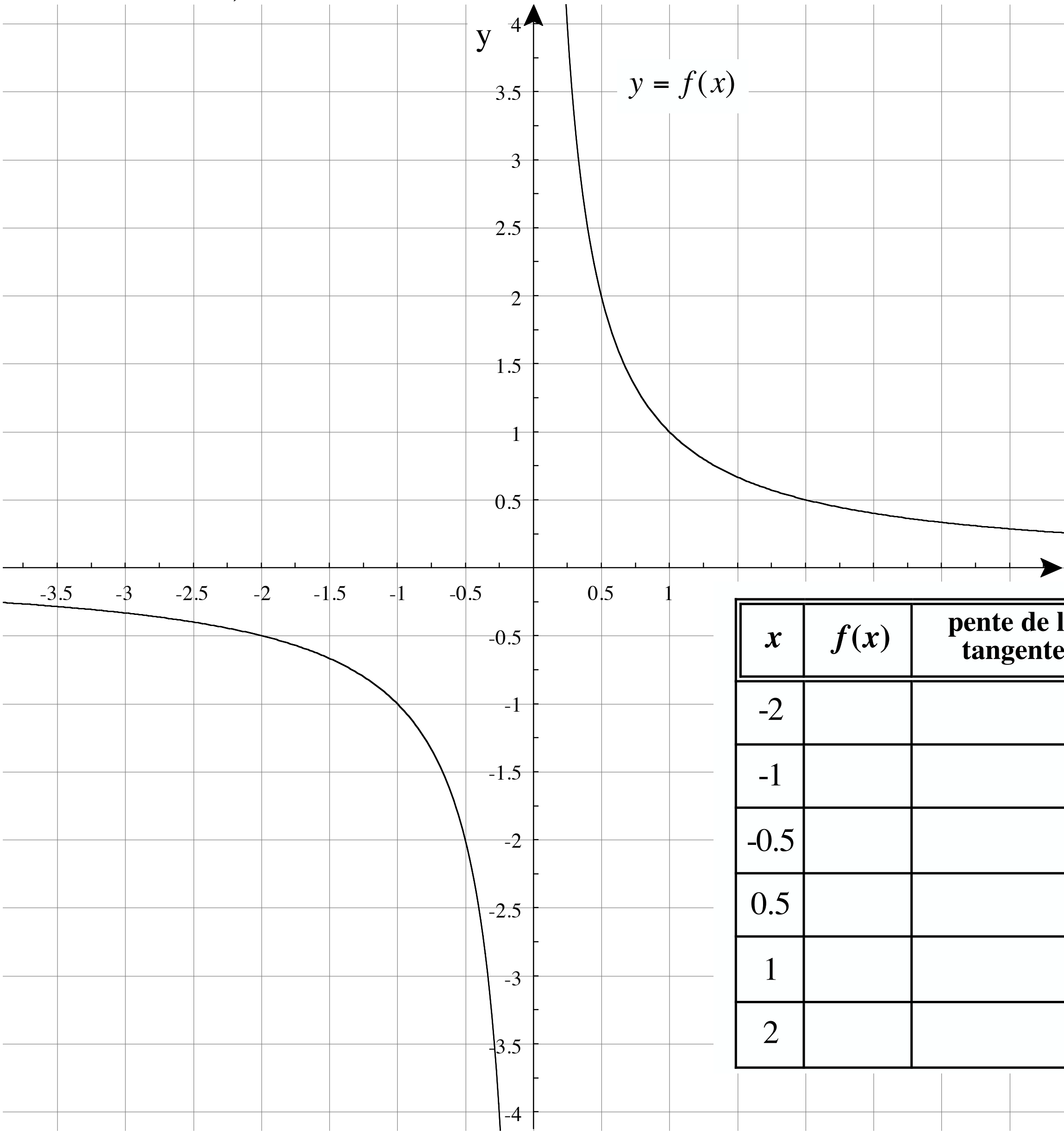
**Exercice 3.2:** Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

**a)** Tracer les tangentes à la courbe $y = f(x)$ aux points d'abscisses

$$x = -2 \ , \ \ x = -1 \ , \ \ x = -1/2, \ \ x = 1/2, \ \ x = 1 \ \text{ et } \ x = 2.$$

**b)** Compléter le tableau de valeurs.

**c)** Déterminer un lien entre la 1ère et la 3ème colonne de ce tableau.




| $x$ | $f(x)$ | **pente de la tangente** |
|---|---|---|
| -2 | | |
| -1 | | |
| -0.5 | | |
| 0.5 | | |
| 1 | | |
| 2 | | |

Avantages de cette première méthode:

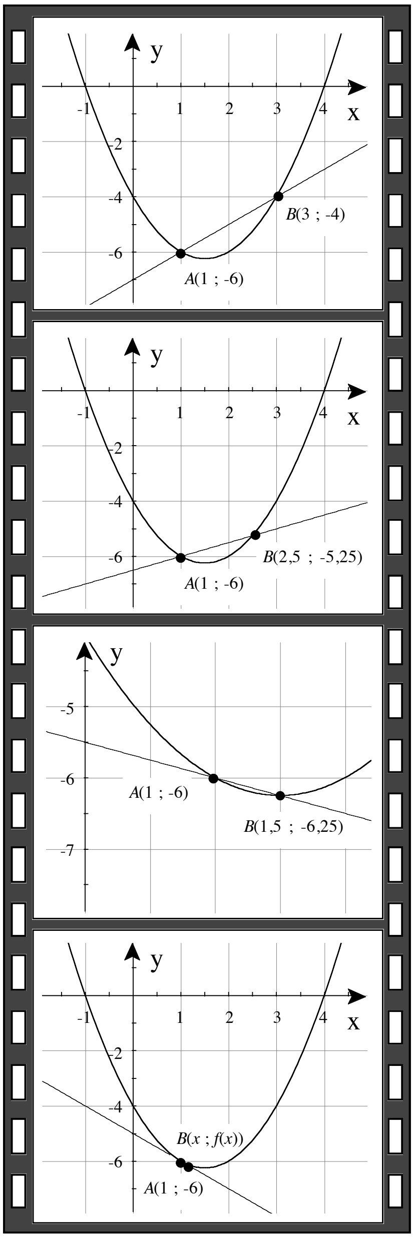
Inconvénients de cette première méthode:

## 3.3 Méthode 2: À l'aide de limites.

**Le film de la situation pour la fonction $f(x) = x^2 - 3x - 4$:**

Nous voulons trouver la pente de la droite tangente à la parabole $y = x^2 - 3x - 4$ au point $A$.

Nous allons d'abord exprimer la pente de la sécante $AB$, puis en faisant tendre $B$ vers $A$, cette sécante va tendre vers une droite limite qui correspondra à la droite tangente à la courbe en $A$.




<u>*1ère étape :*</u>

- $\left.\begin{array}{l} A(1;-6) \\ B(3;-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ *pente de la sécante* $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2}{2} = \mathbf{1}$

<u>*2ème étape :*</u>

<u>*3ème étape :*</u>

<u>*Plus généralement :*</u>

**Exemple algébrique**

Calculer la pente de la tangente des fonctions *f* suivantes aux points donnés:

**a)** $f(x) = x^2$ au point $A(2\ ; f(2))$

**b)** $f(x) = \frac{1}{x}$ au point $A(2\ ; f(2))$

**c)** $f(x) = \sqrt{x}$ au point $A(2\ ; f(2))$

**Exercice 3.3:** Appliquer cette démarche aux fonctions *f* suivantes:

**a)** $f(x) = x^2 - 2x$ au point $A(1\ ; f(1))$

**b)** $f(x) = x^3$ au point $A(-2\ ; f(-2))$

**c)** $f(x) = \sqrt{x+1}$ au point $A(2\ ; f(2))$

**d)** $f(x) = 3x - 5$ au point $A(-1\ ; f(-1))$

**e)** $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ aux point $A(-1\ ; f(-1))$ puis au point $A'(0\ ; f(0))$

Avantages de cette deuxième méthode:

Inconvénients de cette deuxième méthode:

## 3.4 Méthode 3: À l'aide de la dérivée. 

Dans les situations précédentes est apparu le calcul de la limite suivante: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Cette limite est à la base d'un des concepts fondamentaux de l'analyse: celui de **fonction dérivée.**

**Définition:**

- La **dérivée** d'une fonction $f$ est la **fonction** $\boldsymbol{f'}$ définie par:

  $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

  là où cette limite existe.

- Quand $f'(a)$ existe, on dit que $f$ est **dérivable** en $a$

Il est à noter que la fonction dérivée $f'(a)$ généralise la notion de pente de la tangente à toutes les valeurs $a$ où la dérivée existe. Par convention, à la fin du calcul de limite, la fonction $f'(a)$ est reconvertie en $f'(x)$ en changeant la variable $a$ en $x$

$$f(x) = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad f'(a) = 2a \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = 2x$$

**Exemple:** On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$. Déterminer

**a)** $f'(x)$, $f'(4)$, $f'(-2)$;
**b)** la pente de la tangente au graphe au point $P(3\,; f(3))$;
**c)** le point du graphe $Q$ pour lequel la tangente est horizontale.

**Exercice 3.4:** Déterminer les dérivées des fonctions *f* suivantes

**a)** $f(x) = x^2 - 2x$ **b)** $f(x) = 3x$

**c)** $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

**e)** $f(x) = 5$ **f)** $f(x) = \sqrt{x}$

**Exercice 3.5:** Sur $\mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction *f* par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

**a)** Déterminer la fonction dérivée $f'$ .
**b)** Calculer la pente de la tangente à *f* au point $A(1/4\,;f(1/4))$.
**c)** Déterminer l'équation de la tangente au point *A*.

**Exercice 3.6:** Soit la fonction *f* définie par $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$ , déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 3$

## Un peu d'histoire

**Isaac Newton**
**1643-1727**

**Gottfried Wilhem**
**von Leibniz**
**1646-1716**

*Les problèmes de tangentes (dérivation) et de calculs d'aire (intégration) ont passionné de nombreux mathématiciens depuis Archimède. Les premiers à avoir compris le rapport entre les deux sont Isaac Newton et Gottfried Wilhem von Leibniz. Ils sont maintenant considérés comme co-inventeurs du calcul différentiel.*

*Pourtant la controverse a longtemps fait rage, du vivant de Newton et Leibniz, et pendant encore de nombreuses années après leur mort. Les uns, à la suite de Newton lui-même, accusaient Leibniz de plagiat, car il aurait eu accès à des manuscrits non publiés de Newton. Les autres prouvaient sans conteste l'antériorité des publications de Leibniz et la supériorité de son système de notation. Il semble bien que Newton a effectivement développé ses idées avant Leibniz, mais que, même si ce dernier a eu accès à des manuscrits de Newton, il a travaillé de façon indépendante. La controverse, qui paraît de nos jours plutôt futile, eut pour conséquence de couper pendant longtemps les mathématiciens anglais du reste de l'Europe : ce n'est qu'au début du XIX*[e] *siècle que les notations de Leibniz furent acceptées en Angleterre.*

*Voici comment, dans Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687), Newton exprime sa vision des dérivées.*

> *Les rapports ultimes dans lesquels les quantités disparaissent ne sont pas réellement des rapports de quantités ultimes, mais les limites vers lesquelles les rapports de quantités, décroissant sans limite, s'approchent toujours, et vers lesquelles ils peuvent s'approcher aussi près qu'on veut.*

*La vision de Newton est très proche de notre définition moderne de la dérivée comme limite d'un taux d'accroissement. C'est d'autant plus remarquable que la notion de limite ne sera définie rigoureusement que presque deux siècles après les premières découvertes de Newton.*