Chapitre 1: Résolution d'équations à l'aide de méthodes numériques

§ 1.1 Introduction

Problème : La plupart des problèmes en sciences appliquées débouchent sur des équations que l'on ne peut résoudre à l'aide de simples formules. Outre les équations polynomiales de degré plus grand ou égal à 5 (où il n'existe pas de formule générale), il y a celles où interviennent des fonctions trigonométriques, exponentielles ou logarithmiques.

Exemples :
- $x^5 - 2x^4 + 100x^3 - 2 = 0$
- $x^3 - 2 = \sqrt{x}$
- $\sin(x) = x + 1$
- $\ln(x) = x$ ou $e^x = 3x$

La résolution d'une équation pourra se ramener à la recherche des <u>zéros d'une fonction *f*</u>.

Par exemple : $\sin(x) = x + 1$ revient à chercher les zéros de la fonction *f* définie par:

$$f(x) = \sin(x) - x - 1$$

Plusieurs méthodes permettent de calculer les zéros de f par approximations successives avec, théoriquement, la précision désirée. Ces méthodes supposent toutefois que les <u>zéros soient plus ou moins localisés</u>. Ainsi, pour chaque zéro, on devrait pouvoir donner un intervalle $[a\,;\,b]$ qui ne contient pas d'autre zéro que celui recherché. Souvent des informations sur le comportement de la fonction f (dérivée première, dérivée seconde) sont nécessaires.

Dans ce chapitre on ne considère que des fonctions f qui satisfont aux deux conditions suivantes :

f est continue et dérivable sur un intervalle $[a\,;\,b]$
$f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents

Théorème : Par le théorème de la valeur intermédiaire (théorème de Bolzano), on sait qu'il existe alors au moins un zéro de f dans l'intervalle $[a; b]$, c'est-à-dire un nombre r tel que $f(r) = 0$.

§ 1.2 La dichotomie

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Rappel :

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ telle que $\operatorname{sgn}(f(a)) \neq \operatorname{sgn}(f(b))$. On se propose de déterminer un zéro de f compris entre a et b.

La méthode de dichotomie consiste à construire une suite d'intervalles emboîtés qui contiennent le zéro de f cherché.

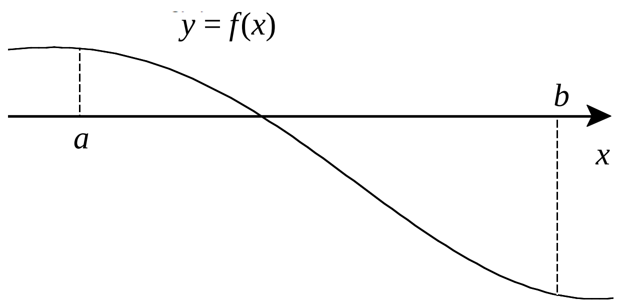
On calcule $x_1 = \frac{1}{2}(a+b)$, le milieu de l'intervalle $[a ; b]$

Si $\operatorname{sgn}(f(a)) \neq \operatorname{sgn}(f(x_i))$, un zéro de f appartient à l'intervalle $[a ; x_i]$ et l'on poursuit la recherche sur cet intervalle.

Sinon, on a nécessairement $\operatorname{sgn}(f(x_i)) \neq \operatorname{sgn}(f(b))$ et c'est cet intervalle $[x_i ; b]$ qui est retenu.

On définit ainsi une suite d'intervalles emboîtés $[a_n ; b_n]$ de la façon suivante :

- $[a_0 ; b_0] = [a ; b]$
- $[a_{n+1} ; b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n ; x_n] & \text{si } \operatorname{sgn}(f(a_n)) \neq \operatorname{sgn}(f(x_n)) \\ [x_n ; b_n] & \text{sinon} \end{cases}$ *où* $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$



On poursuit les calculs aussi longtemps que la longueur de l'intervalle $[a_n ; b_n]$ est supérieure à la précision voulue.

Exemple: Résoudre l'équation $e^x - 2x = 3$, on désire que les solutions admettent une erreur absolue inférieure à 1/10

Remarques

- Vitesse de convergence
  Les intervalles $[a_n ; b_n]$ obtenus par la méthode de dichotomie vérifient $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$.
  Si r désigne le zéro de la fonction commun à tous les intervalles $[a_n ; b_n]$, l'erreur absolue maximale est proportionnelle à $\frac{1}{2^n}$.
  Comme $\frac{1}{2^3} > \frac{1}{10} > \frac{1}{2^4}$, il faut 3 à 4 itérations supplémentaires pour obtenir une nouvelle décimale de la solution.

- Si l'on ne parvient pas à séparer les zéros de f, c'est-à-dire si f possède plusieurs zéros sur $[a ; b]$, la méthode n'en livre qu'un seul.

- En comparaison avec la méthode du chapitre suivant, la technique de dichotomie est lente, car elle nécessite en général un assez grand nombre d'itérations. Elle offre par contre les avantages suivants : elle est simple à programmer sur une calculatrice programmable, elle n'exige que peu de connaissance mathématique et donne un encadrement « visuel » de la solution cherchée.

Exercice 1.1 Déterminer la deuxième solution (celle qui est négative) de l'exemple ci-dessus

Exercice 1.2
1) Montrer que chaque équation suivante n'admet qu'une solution
2) Calculer cette solution avec une erreur inférieure à 1/10

a) $x^5 - 2x^4 + 100x^3 = 2$ **b)** $\cos(x) = 3x$ **c)** $e^x = -x$

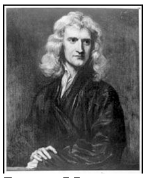
Exercice 1.3 L'aire d'un triangle rectangle vaut 12 cm^2. La hauteur issue de l'angle droit partage l'hypoténuse en deux parties de longueur respectives 2 cm et x cm. Déterminer ce x.

Exercice 1.4 Un stère de bois (cube de 1m de côté) est entassé contre une grande maison. À quelle distance x de la maison faut-il poser le pied d'une échelle de 10 m pour qu'elle s'appuie tant contre la façade que contre l'angle du stère ? Il y a deux solutions.

Exercice 1.5 Un sculpteur dispose d'un disque en cuivre de 1,2 m de rayon. Il souhaite partager la surface de cette pièce en deux parties égales en y traçant un arc de cercle dont le centre est situé sur la circonférence du disque. Comment doit-il choisir le rayon de cet arc de cercle ?

§ 1.3 La méthode de Newton-Raphson

Introduction :



Isaac Newton (1642-1727)

Joseph Raphson (1648-1725)
Aucune représentation disponible !!

La méthode de Newton-Raphson est une procédure classique pour résoudre des équations du type $f(x) = 0$ par un processus itératif.
Ce type de résolution est très ancien. Les Grecs en utilisaient déjà une variante pour trouver les racines carrées : on part d'une estimation ; cette estimation en fournit une meilleure, et, en réitérant le procédé, on obtient une valeur qui converge vers la solution. Ce procédé est rapide, car le nombre de décimales gagnées (en précision) double en général à chaque étape.
La répétition étant le point fort des ordinateurs, le procédé fait merveille en informatique, où il s'applique à une grande variété de problèmes.

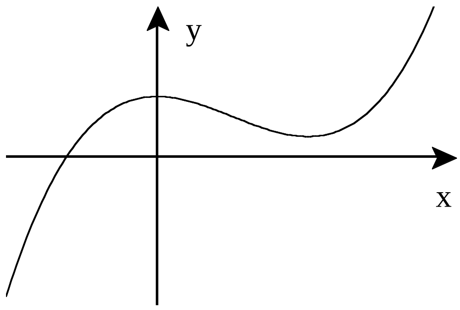
Description générale

La méthode repose sur la propriété suivante:

• Si une fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est dérivable sur $[a\,;b]$

• Soit $x_1 \in [a\,;b]$

Alors la tangente t à $y = f(x)$ au point $(x_1, f(x_1))$ est une bonne approximation de $y = f(x)$ au voisinage du point $(x_1, f(x_1))$



Résoudre l'équation $f(x) = 0$, revenant à chercher l'intersection du graphe $y = f(x)$ avec l'axe des abscisses, sera remplacé par la recherche de l'intersection de cet axe avec une tangente *convenablement choisie*.

Rappel (?) :

Équation de la tangente en un point de la courbe y = f(x)

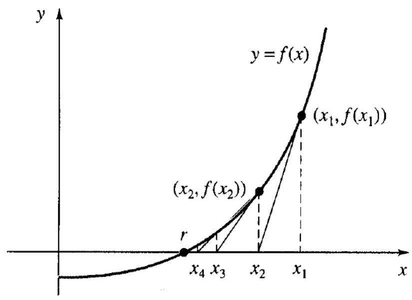
Équation de la tangente au point $(a\,, f(a))$ est donnée par :

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)\,(x - a)}$$

Exercice 1.6 Démontrer cette formule

La Méthode de Newton:

Soit une équation de la forme $f(x) = 0$, considérons la fonction $y = f(x)$. Il s'agit de trouver le point r où cette courbe coupe l'axe des x. Estimons cette intersection par un premier nombre x_1.
x_1 constitue notre première approximation de la solution.



Nous cherchons ensuite à améliorer l'approximation. Une deuxième approximation x_2, sera trouvée en prenant l'abscisse du point de rencontre de la tangente à la courbe au point $(x_1, f(x_1))$ avec l'axe des x. Puis une troisième approximation x_3, puis x_4, et ainsi de suite.
Décomposons le calcul en différentes étapes :

❶ Équation de la tangente au point $(x_1, f(x_1))$ est donnée par :

❷ Calculons x_2 :

❸ Ceci est une deuxième approximation de la solution, meilleure que la première. Pour s'approcher davantage de la solution r, il s'agit de calculer, de la même manière, une troisième approximation à partir du point $(x_2, f(x_2))$. On aura:

❹ Et l'on peut poursuivre de cette façon jusqu'à l'obtention de la précision désirée. De façon générale, on a:

Soit f une fonction dérivable et soit r une solution réelle de l'équation $f(x) = 0$. Si x_n est une approximation de r, alors l'approximation suivante x_{n+1} est donnée par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

à condition que $f'(x_n) \neq 0$

Ce processus itératif peut être répété jusqu'à ce que la précision voulue soit atteinte.

Nous n'étudierons pas les conditions de convergence de la méthode.

Naturellement, il faudra choisir la première approximation x, de sorte que la dérivée ne s'annule pas en ce point. En effet si $f'(x_1) = 0$ la tangente à la courbe est horizontale et cette tangente ne coupera pas l'axe des x.

Exemple 1 : Résoudre $x^2 = 2$

La précision et le nombre d'itérations : Sauf indication contraire, nous calculerons ici les solutions avec une précision de 0,001, c'est-à-dire que des itérations seront effectuées jusqu'à répétition des trois premières décimales. Par exemple, dans le cas précédent, on a:

$$x_3 = 1{,}417 \quad \text{et} \quad x_4 = 1{,}4142$$

En passant de x_3 à x_4 les deux premières décimales n'ont pas changé; on est donc assuré qu'elles sont correctes. Le calcul de x_5 donne

$$x_5 = 1{,}414213$$

Donc, de x_4 à x_5, les quatre premières décimales se répètent et sont donc correctes. La réponse sera donnée comme suit :

$$r \approx 1{,}414$$

Exercice 1.7 Résoudre $x^3 = 3$

Exercice 1.8 Quelles sont les valeurs fournies par la méthode de Newton pour la solution de $x^2 = 1$, si on donne comme première estimation

a) $x_1 = 1$ **b)** $x_1 = 0$ **c)** $x_1 = 10$ **d)** $x_1 = -2$

(on s'arrête à une précision de 0,01)

Exemple 2 : Résoudre $x^3 - 3x - 3 = 0$

Exercice 1.9 Résoudre les équations suivantes :

a) $x^3 + 3x + 1 = 0$ **b)** $x^4 + x^3 + x^2 = 1$ *(la plus petite solution positive)*

Exercice 1.10 Déterminer l'abscisse (précision : 0,001) du point d'intersection des courbes suivantes : $y = \dfrac{3}{x^2+1}$ et $y = \sqrt{x}$

Choix de la 1re approximation x_1

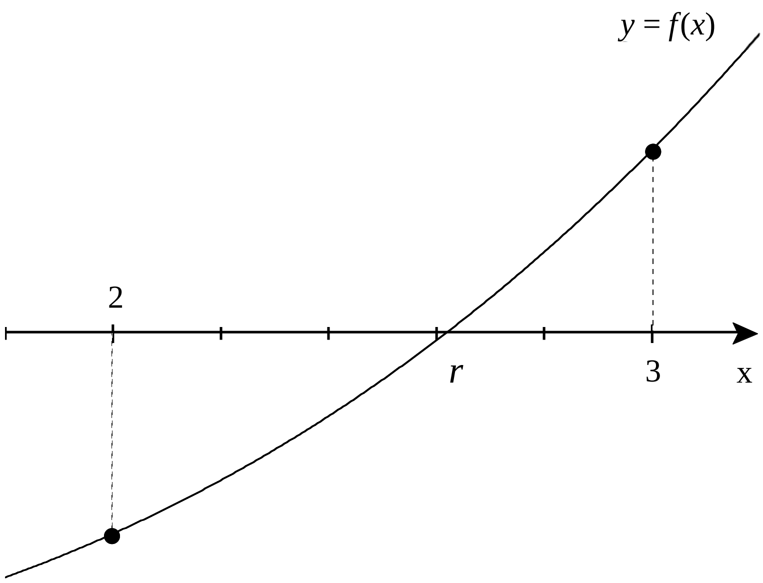
Comment choisit-on la première approximation ? C'est une question importante si on veut que la méthode nous conduise à une solution, et ce le plus rapidement possible.

Considérons l'équation $x^3 = 18$.

Il s'agira donc de déterminer les zéros de la fonction f définie par:

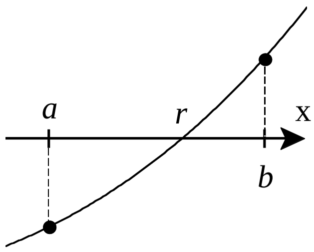
$$f(x) = x^3 - 18$$

Une première estimation permet de se convaincre que la solution se situe dans l'intervalle [2 , 3]. Mais par lequel des deux nombres est-il préférable de débuter le processus ?
Essayons de s'en convaincre en construisant sur le graphe ci-dessous les différents x_i en s'approchant depuis la gauche puis en s'approchant depuis la droite afin d'observer les vitesses respectives de convergence.

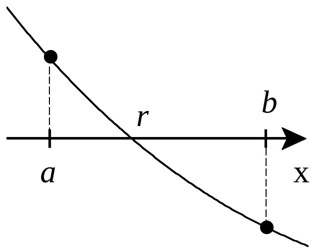


Ainsi, il est préférable de débuter le processus par $x_1 = 3$.

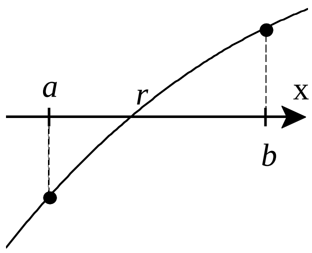
Généralisons ceci aux 4 situations possibles :



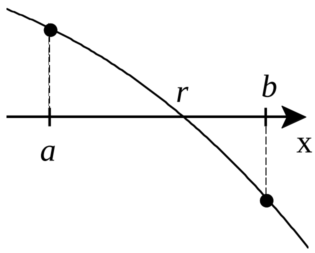
❶



❷



❸



❹

Exercice 1.11

a) Dans chacun des cas, précisez s'il faut débuter le processus par $x_1 = a$ ou $x_1 = b$

b) En comparant dans ces différents cas les signes de $f(a)$, $f(b)$ et $f''(x)$ sur $[a\,,\,b]$, donner un critère sur le choix de x_1 permettant la convergence la plus rapide.

c) Contrôler si votre choix des x_1 dans les exercices précédents vérifiait le critère en **b)**

Remarques :

1. Qu'arrive-t-il s'il y a plusieurs solutions ?

   En général, la méthode converge vers la solution la plus proche de la première approximation choisie. Il faudra donc prendre une approximation x_1, pour chacun des endroits où $f(x)$ change de signe et utiliser la méthode autant de fois que nécessaire.

2. Le processus itératif étant fait d'approximations successives, une erreur de calcul est pratiquement sans conséquence puisqu'elle n'empêche pas de trouver la solution précise, mais retarde, tout ou plus, la convergence.

Exercice 1.12 Déterminer l'abscisse (précision : 0,001) du point d'inflexion de la courbe $y = 3x^5 + 10x^3 - 30x^2 + 14x - 17$