Chapitre 2: Séries de Maclaurin et de Taylor

§ 2.1 Polynômes et séries de Maclaurin

Exercice 2.1 :

- On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 6$

a) Calculer $f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ f'''(0)$.
b) Quel lien y a-t-il entre ces 4 valeurs et les coefficients de la fonction ?
c) Justifier alors que :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2} f''(0)\cdot x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)\cdot x^3.$$

- On considère la fonction $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

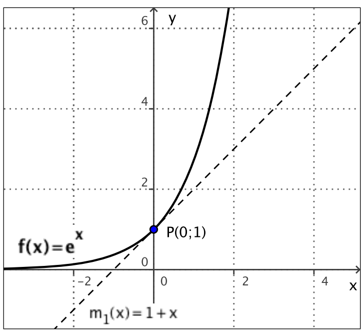
d) Montrer alors que : $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout k.

où $f^{(k)}(0)$ exprime la $k^{ième}$ dérivée de f évalué en $x = 0$.

Introduction : Soit une fonction f qui peut être dérivée n fois sur un intervalle I. Notre objectif est de trouver **une fonction polynomiale donnant une approximation de *f* autour d'un nombre *c*** appartenant au domaine de f.
Par souci de simplicité, commençons par envisager l'important cas particulier où $c = 0$.

Par exemple, en $x = 0$, considérons la fonction f définie par:
$$f(x) = e^x.$$

Pour représenter f de manière approchée par une fonction polynomiale $m(x)$, il faut d'abord s'assurer que les graphes de la fonction polynomiale et de f passent tous les deux par le même point. Autrement dit, il faut vérifier que $m(0) = f(0) = 1$.
De nombreuses fonctions polynomiales m pourraient être choisies comme approximations de f autour de $x = 0$. Poursuivons en nous assurant que f et m admettent la même tangente en $x = 0$, autrement dit que $m'(0) = f'(0)$. Pour trouver $m(x)$, on pose :
$$m_1(x) = a_0 + a_1 x$$
En respectant les conditions ci-dessus, on obtient :

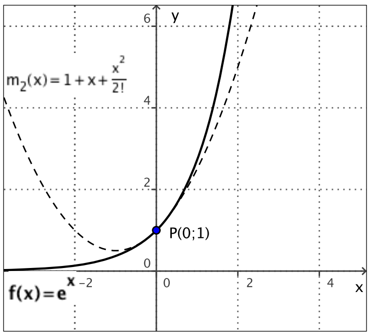


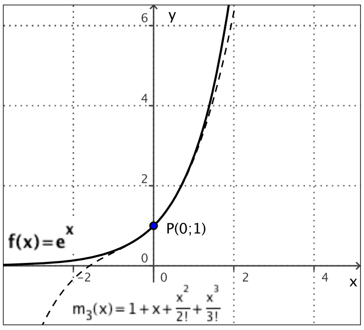
D'après la 1re figure, l'approximation de f par m_1 est bonne au voisinage de $x = 0$, mais il n'en est plus de même lorsqu'on s'éloigne du point (0 ; 1).

Pour améliorer l'approximation, on impose donc la condition selon laquelle les valeurs des dérivées secondes de m et de f sont égales en $x = 0$. À partir de cette condition, on pose

$$m_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

devant vérifier :





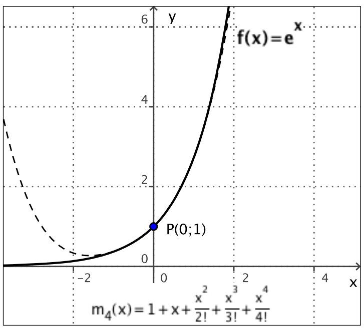
Pour améliorer encore l'approximation, on peut exiger que les valeurs des dérivées des polynômes d'approximation m_3, m_4, …, m_n en $x = 0$ correspondent à celles de f en $x = 0$. On trouve ainsi :

$$m_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$m_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

$$m_5(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5$$

$$m_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$



ou encore $m_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Cette dernière expression permet donc d'écrire que :

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Elle permet également de calculer "à la main" une bonne approximation (rationnelle) de e. Par exemple en utilisant m_5 :

$$e^x \cong 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 \text{, donc}$$

$$e = e^1 \cong 1 + (1) + \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{6}(1)^3 + \frac{1}{24}(1)^4 + \frac{1}{120}(1)^5 = \frac{163}{60} = 2{,}71\overline{6}$$

Définition : On appelle **polynôme de Maclaurin** (de degré n) d'une fonction f qui admet des dérivées de tous ordres en $x = 0$ l'expression :

$$m_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

où $f^{(k)}(0)$ exprime la $k^{\text{ième}}$ dérivée de f évaluée en $x = 0$.

Exercice 2.2 :

a) Déterminer les 5 polynômes de Maclaurin $m_0(x)$ à $m_4(x)$ de la fonction f définie par $f(x) = \cos(x)$.

b) Déterminer $m_8(x)$

c) En déduire une approximation de cos(π/5).

d) La comparer avec la valeur proposée par un calcul direct.

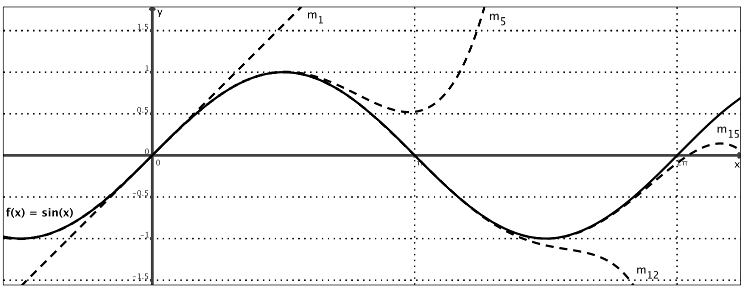
Définition : La **série de Maclaurin** d'une fonction f qui admet des dérivées de tous ordres en $x = 0$ et qui converge vers f est donnée par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k .$$

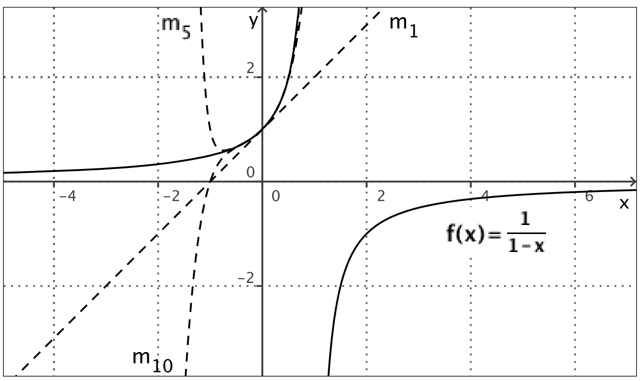
Colin Maclaurin
mathématicien écossais
(1698 – 1746)

La définition ci-dessus laisse donc sous-entendre que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ *pourrait ne pas converger vers f. Cette question de convergence bien que cruciale ne sera pas abordée dans le cadre de ce cours. Nous calculerons donc des séries de Maclaurin de fonctions sans nous assurer par calcul qu'elle converge effectivement vers f. Ces nouveaux critères de convergence mériteraient un nouveau polycopié !!!*

Un exemple de convergence sur] -∞ ; +∞ [:



Un exemple de convergence sur] -1 ; 1 [:



Exemple : Développer la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ en série de Maclaurin

Exercice 2.3 : Calculer $(1-x)\cdot(x+x^2+x^3+\ldots+x^k+\ldots)$.
Que constatez-vous ?

Exercice 2.4 : Développer les fonctions f suivantes en série de Maclaurin :

a) $f(x)=\sin(x)$ **b)** $f(x)=\cos(x)$

c) $f(x)=\ln(1+x)$ **d)** $f(x)=(1+x)^{3/2}$

Exercice 2.5 : **a)** Développer en série de Maclaurin la fonction f définie par:

$$f(x)=\cos(x^2).$$

b) En utilisant le développement :

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

obtenu dans l'exercice 2.4, retrouver le développement en série demandé en **a)**.

Exercice 2.6 : Développer en série de Maclaurin la fonction f définie par:

$$f(x) = \ln(2x+1).$$

Exercice 2.7 : De $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$, déduire les développements de Maclaurin de :

a) $\sin(2x)$

b) $\cos^2(x)$ *sachant que* $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$.

Exercice 2.8 : Développer en série de Maclaurin les fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Exercice 2.9 : Développer en série de Maclaurin les fonctions f et g suivantes :

$$f(x) = \ln(1+x) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1-x)$$

En déduire le développement en série de Maclaurin de la fonction h définie par:

$$h(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Exercice 2.10 : On considère la fonction f définie par:

$$f(x) = (x-2)^3 - 5(x-2)^2 + 4(x-2) - 6$$

a) Calculer $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$, $f'''(2)$.

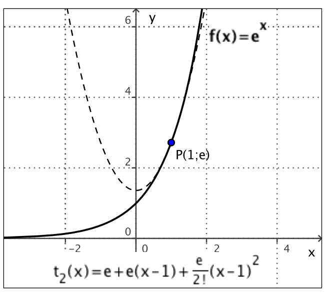
b) Montrer que $f(x)$ peut alors s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k.$$

où $f^{(k)}(2)$ *exprime la* $k^{\text{ième}}$ *dérivée de f évalué en* $x = 2$.

§ 2.2 Polynômes et séries de Taylor

Introduction : Dans certains cas, il ne sera pas possible, ou il ne sera pas commode, d'exprimer une fonction par une série de Maclaurin. Dans un tel cas, on pourra procéder à un développement en série de puissances de $x - a$. Le problème est tout à fait analogue à celui de la section précédente sauf que cette fois, on sera centré sur la valeur $x = a$.



Exemple pour $f(x) = e^x$

Soit une fonction f qui peut être représentée par une série de puissances, c'est-à-dire:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$$

Proposons-nous de **déterminer les coefficients** a_n de cette série.

- En posant $x = a$, on trouve $f(a) = a_0$ ainsi : $\boxed{a_0 = f(a)}$

- Dérivons la fonction et la série :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} + \ldots$$

En posant $x = a$, on trouve: $f'(a) = a_1$. Ainsi $\boxed{a_1 = f'(a)}$

- En répétant le processus, nous obtiendrons :

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-a) + \ldots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + \ldots$$

et donc $\boxed{a_2 = \frac{1}{2} f''(a)}$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4(x-a)\ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3} + \ldots$$ et

donc $\boxed{a_3 = \frac{1}{3!} f'''(a)}$

et ainsi de suite : de façon générale, on trouve $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

- En reprenant la première équation et en remplaçant les coefficients a_n par les valeurs que l'on vient de trouver, on a :

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots}$$

Définition : On appelle **polynôme de Taylor** (de degré n) d'une fonction f qui admet des dérivées de tous ordres en $x = a$ l'expression :

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

où $f^{(k)}(a)$ exprime la $k^{\text{ième}}$ dérivée de f évaluée en $x = a$.

Il est clair qu'une série de Maclaurin est un cas particulier d'une série de Taylor où a = 0. L'avantage d'utiliser parfois une série de Taylor, c'est qu'elle converge beaucoup plus rapidement lorsque x est proche de a.

Brook Taylor
mathématicien anglais
(1685-1731)

Exemple : On considère le fonction f définie par $f(x) = \cos(x)$.
Déterminer les 5 polynômes de Taylor $t_1(x)$ à $t_5(x)$ de f développé autour de $x = \pi/6$.

En déduire une approximation de cos(π/5). La comparer à celle obtenue dans l'exercice 2.2.

Exercice 2.11 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \sin(x)$.
a) Déterminer $t_4(x)$ développé autour de $x = \pi/3$.
b) En déduire une approximation de sin(65°).

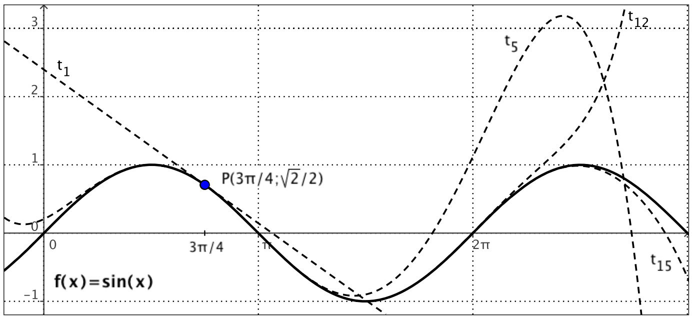
Définition : La **série de Taylor** d'une fonction f qui admet des dérivées de tous ordres en $x = a$ et qui converge vers f est donnée par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

où $f^{(k)}(a)$ exprime la $k^{\text{ième}}$ dérivée de f évaluée en $x = a$.

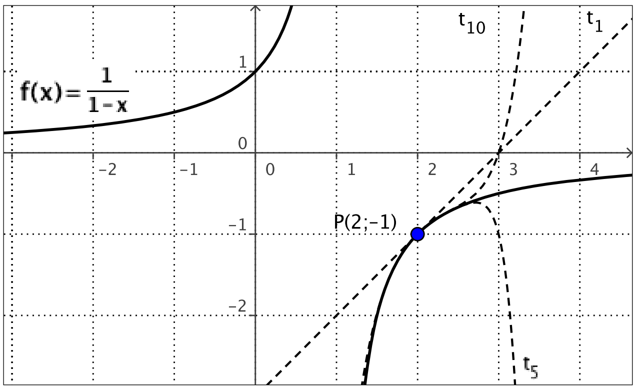
Un exemple de convergence sur] -∞ ; +∞ [:

La série de Taylor de f définie par $f(x) = \sin(x)$ en $x = 3\pi/4$



Un exemple de convergence sur] 1 ; 3 [:

La série de Taylor de f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ en $x = 2$.



Exercice 2.12 : Trouver les 4 premiers termes (non nuls) de la série de Taylor de chacune des fonctions f pour la valeur donnée de c.

a) $f(x) = e^x$; autour de $c = 1$

b) $f(x) = \ln(x)$; autour de $c = 3$

c) $f(x) = 1/x$; autour de $c = 1$

d) $f(x) = \sqrt{x}$; autour de $c = 9$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$; autour de $c = 5$

f) $f(x) = \tan(x)$; autour de $c = 0$

§ 2.3 Quelques applications des séries de Maclaurin et de Taylor

Exercice 2.13 : En utilisant le développement en série approprié, calculer avec une précision de 3 décimales :

a) $\ln(1{,}2)$ **b)** $e^{-0{,}5}$ **c)** $\sin(50°)$

Exercice 2.14 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x)$.
Développer la fonction f en puissance de $(x - 8)$.

Exercice 2.15 : Dans un cours de base de mathématique, vous avez dû établir que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$

Retrouver ce même résultat en utilisant le développement de Maclaurin de la fonction *f* définie par $f(x)=\sin(x)$.

Exercice 2.15 : Montrer que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}=-\frac{1}{6}$.

Exercice 2.16 : On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$.

a) Développer la fonction *f* en série de Maclaurin.

b) En déduire une bonne approximation de $\int_0^2 \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$.

c) En déduire la série de Maclaurin de $F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$.

Exercice 2.17 : Sans se soucier de la convergence de la série, nous avons montré que $\frac{1}{1+t^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}$ (développement de Maclaurin)

a) Montrer alors que $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$

b) Sachant que[1] $\arctan(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ et en utilisant l'égalité connue $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ montrer que :

$$\pi=4\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right]$$

Cette série est appelée série de Gregory, du nom du mathématicien James Gregory (1638 – 1675) qui l'a établi en 1671. La convergence de cette série est très lente. En additionnant les 50 premiers termes, l'approximation de π n'est encore que de 3,1611986.

Une note historique en guise de conclusion : *Brook Taylor et Colin Maclaurin sont les deux mathématiciens les plus étroitement associés aux séries. Les résultats énoncés précédemment, en particulier ceux publiés par Taylor en 1714, ont en fait été découverts par le mathématicien écossais James Gregory en 1670. Ce dernier aurait, semble-t-il, été l'auteur de certaines des principales découvertes concernant le calcul intégral, mais sa mort prématurée l'aurait empêché de recevoir les honneurs qu'il méritait. En 1694, Jean Bernoulli publia une série très semblable à celle que nous appelons série de Taylor. D'ailleurs, lorsque Taylor publia ses travaux, en 1714, Bernoulli l'accusa de plagiat. Il se trouve que l'accusation de Bernoulli n'était pas fondée. Le premier énoncé explicite de la série de Taylor fut publié dans « De quadrature » par un certain Isaac Newton.*

[1] Afin d'éviter l'écriture ambiguë $\tan^{-1}(x)$, on code souvent la fonction réciproque de $f(x)=\tan(x)$ à l'aide de $g(x)=\arctan(x)$.