Chapitre 3 : Quelques équations différentielles

Introduction : *La Mécanique, la Dynamique, l'Électricité, la Biologie, l'Économie, la Démographie, les Probabilités, … fourmillent de situations dont l'étude conduit à une* ***équation différentielle****, que nous ne craindrons pas de présenter sommairement comme « une relation, sous la forme d'une équation, entre une fonction et ses dérivées successives ».*

Par exemple pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $f' - 4f = 0$
- $xy' - y = 0$
- $x^2 \dfrac{dy}{dx} = -x$
- $x = \dfrac{1}{2}\dfrac{d^2x}{dt^2} \cdot t^2 + \dfrac{dx}{dt} \cdot t$

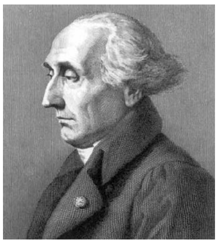
sont des équations différentielles que l'on peut rencontrer dans les différents domaines ci-dessus. Vous serez amené à croiser 3 types de codage différents pour exprimer la même chose. Le but des 2 premiers paragraphes sera de s'habituer aux notations ainsi qu'au vocabulaire que véhiculent les équations différentielles.

§ 3.1. Les différents codages de la dérivée

Il y a plusieurs notations différentes pour désigner une dérivée, entre autres:

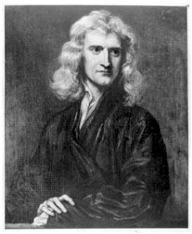
$$f' \qquad\qquad y' \qquad\qquad \frac{dy}{dx}$$

On peut sans doute se demander pourquoi des notations si différentes sont utilisées pour désigner une seule et même chose. Pourquoi pas une notation unique ? En fait, ces notations ont été introduites par des mathématiciens différents et correspondent à des points de vue différents de la même notion.



La notation f', f'', ... est due à un mathématicien français, le comte Joseph Louis de Lagrange (1736-1813). Elle a l'avantage de bien indiquer que la dérivée est une fonction.

La notation y', y'' est due à Sir Isaac Newton (1642-1727) qui écrivait plutôt $\dot{y}, \ddot{y}$ et appelait ces symboles des « fluxions ».



La notation qui peut sembler la plus étonnante, $\dfrac{dy}{dx}$, est due à Wilhelm Gottfried Leibniz (1646-1716). Elle semble étrange parce qu'il s'agit d'une fraction que l'on utilise pour désigner une fonction. Elle présente l'avantage de bien désigner par rapport à quelle variable on dérive.
Cette notation de Leibniz s'explique par le fait que ce dernier voyait *dx* et *dy* comme des variations des variables *x* et *y* et, pour lui, la dérivée était le rapport *dy/dx* quand ces variations devenaient infiniment petite.

Rappel de la notion de dérivée :

§ 3.2. Le vocabulaire utilisé lors d'équations différentielles

Précisons sur un exemple le vocabulaire utilisé lors de la résolution d'équations différentielles.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, considérons l'**équation différentielle** :

$$y' = y \quad \text{ou plutôt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Une **solution particulière** de cette équation est la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^x$ car :

- Mais la fonction f définie par $f(x) = 10 \cdot \mathrm{e}^x$ est également **une solution particulière.** En effet :

- Plus généralement, on appelle **solution** d'une équation différentielle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, <u>n'importe quelle fonction</u> de I vers $\mathbb{R}$ qui vérifie cette équation.

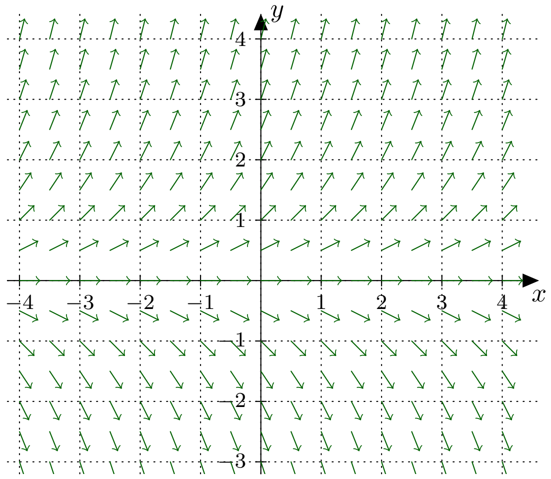
  Nous montrerons par la suite que la **solution générale** de cette équa. diff. est la famille de fonction f définie par:

  $$f(x) = C \cdot \mathrm{e}^x \qquad \text{(où } C \text{ est une constante quelconque.)}$$

  Il y a donc une <u>infinité de solutions</u>.

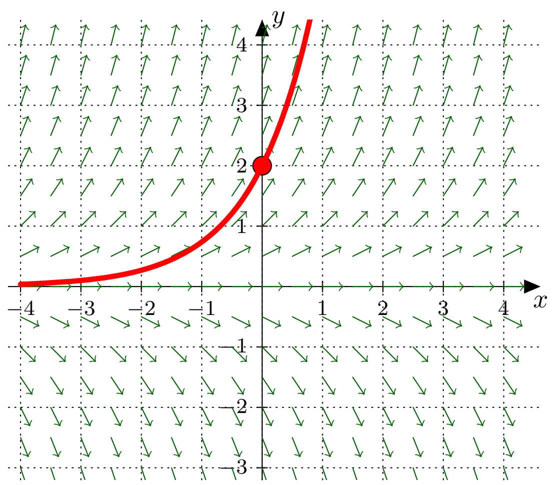
- Il n'est pas toujours évident de déterminer la solution générale d'une équation différentielle. On peut être alors amené à représenter graphiquement (à l'aide d'un ordinateur) ces solutions par des approximations successives.

À chaque point $P(x_0 ; y_0)$ du plan, l'équation différentielle lui associe une direction de pente $f'(x_0)$. Donc, pour chaque point du plan, on connaît la pente des fonctions solutions f de l'équation différentielle. On obtient ainsi **le champ des directions** de l'équation différentielle. Reprenons l'exemple de l'equa. diff: $f'(x) - f(x) = 0$. On obtient



Parmi les solutions de l'équation différentielle, cherchons celles qui vérifient la **condition initiale** $f(0) = 2$.

Il n'y a alors plus qu'une solution : $f(x) = 2e^x$.

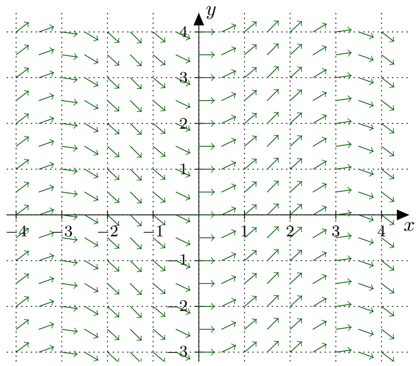


- Les équations différentielles qui ne font intervenir que la première dérivée sont dites du **premier ordre**. Celles qui font intervenir première et deuxième dérivées sont dites du **second ordre**.

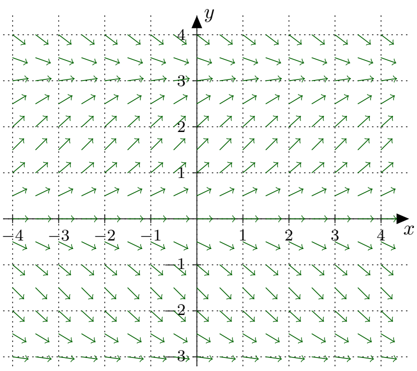
Exercice 3.1: Montrer que la fonction f proposée est solution de l'équa. diff. sur l'intervalle I

	fonction	**Equa diff**	**Intervalle I**
a)	$f(x)=\dfrac{a}{x}+b$	$f''+\dfrac{2}{x}f'=0$	$I =]\,0\,;+\infty\,[$
b)	$y=k(1+x)^2$	$(1+x)y'=2y$	$I=\mathbb{R}$
c)	$x(t)=2+e^{-t^3}$	$\dfrac{dx}{dt}+3t^2x=6t^2$	$I=\mathbb{R}$
d)	$y=x^2+4x+6$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=x^2$	$I=\mathbb{R}$

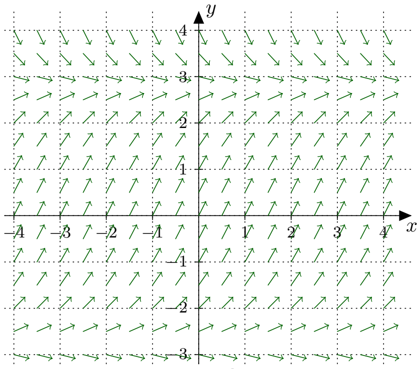
Exercice 3.2: On donne les 4 champs de directions ci-dessous:



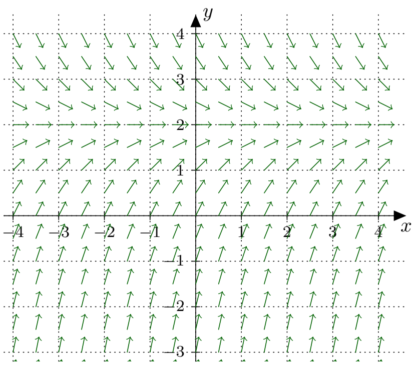
❶



❷



❸



❹

a) Pour chacun de ces champs de directions, esquisser la courbe (la courbe intégrale) correspondant à la condition initiale $y(0)=0$ et une autre correspondant à la condition initiale $y(0)=3$. Examiner dans chacun des cas, la position des points $P(x\,;\,y)$ correspondants à des directions horizontales.

b) On donne les quatre équations différentielles suivantes:

1) $y'=2-y$ **2)** $y'=2-\dfrac{1}{4}y^2$ **3)** $y'=\sin(y)$ **4)** $y'=\sin(x)$

Déterminer à quel champ de direction ces équations différentielles correspondent.

Exercice 3.3: Nous avons montré au **d)** de l'exercice 3.1 que la fonction f définie par:

$$f(x) = x^2 + 4x + 6$$

est une solution de l'équa. diff. $y'' - 2y' + y = x^2$.

a) Montrer que cette équation n'admet pas d'autre solution sous forme d'une fonction quadratique.

b) Montrer que la fonction g définie par:

$$g(x) = (2x - 5)e^x + x^2 + 4x + 6$$

est également une solution de cette équa. diff.

Exercice 3.4: Montrer que la fonction exponentielle $y = e^x$, est solution de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = y$ vérifiant la condition initiale : $y(0) = 1$.

Dans ce chapitre, nous croiserons 3 types d'équations différentielles du 1er ordre :

- 1er type : $\frac{dy}{dx} = g(x)$ **Équations « primitives »**
- 2ème type : $g(y)\,dy = h(x)\,dx$ **Équations à variables séparables**
- 3ème type : $\frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x)$ **Équations linéaires du 1er ordre**

§ 3.3. Équations « primitives »

Exemple : Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' = -10x^{-3}$ **b)** $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{t^2 + 1}$

Méthode : Lorsque l'équation différentielle peut être mise sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

et si G est une primitive de g, alors la solution générale de l'équation proposée est donnée par $y = G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.5: Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $y' = 0$

b) $f'(x) + 2x = 0$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \sin(x)\cos(x)$

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

e) $\dfrac{dx}{dt} = 2t \cdot e^{t^2}$

f) $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2t}{4+t^2}$

Exercice 3.6: Pour les 2 équations différentielles suivantes :

1) $y' = 3x^2$

2) $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

a) Déterminer un intervalle I sur lequel on cherchera à résoudre ces équations différentielles.

b) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle et l'esquisser graphiquement.

c) Chercher la solution particulière qui satisfait à la condition $y = 2$ quand $x = 0$

Exercice 3.7: La pente de la tangente en tout point (x ; y) d'une courbe définie pour $x < 0$ est égale à $2/x^2$.
Trouver l'équation de cette courbe sachant qu'elle passe par le point P(-1 ; -2).

Exemple : Sur la Terre, l'accélération causée par la force gravitationnelle est constante et vaut -9,8 m/s^2. À partir du sol, on lance une balle vers le haut à une vitesse de 30 m/s. Quelle hauteur maximale cette balle atteindra-t-elle ?

Exercice 3.8: À quelle vitesse un plongeur entre-t-il dans l'eau lorsqu'il se laisse tomber du plongeoir de 10 mètres ?
(L'accélération causée par la force gravitationnelle est a = -9,8 m/s^2).

Exercice 3.9: Une voiture accélère au taux de 0,5 m/s^2 à partir d'une position immobile. En combien de temps la voiture atteindra-t-elle la vitesse de 30 m/s ? Quelle sera alors la distance parcourue ?

Exercice 3.10: Une particule a une vitesse $v(t)$ définie de la manière suivante dans les trois directions *x*, *y* et *z* :

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ v_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ a \cdot t \end{pmatrix}$$

Les paramètres v_0, ω et a sont connus. On sait en outre qu'au temps $t = 0$, la particule est localisée au point (0 ; 0 ; 0).

Déterminer la trajectoire $\vec{r}(t)$ de cette particule.

§ 3.4. Équations à variables séparables

Exemple : Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' = \dfrac{2+y}{x}$ **b)** $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t^2 \cos(x)}$

Méthode : Lorsque l'équation différentielle peut être mise sous la forme :

$$g(y)\,dy = h(x)\,dx$$

donc si G et H sont des primitives de g et h, alors la solution générale d'une telle équation est donnée par :

$$G(y) = H(x) + C \ , \quad C \in \mathbb{R}$$

Exercice 3.11: Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' = y$ **b)** $y' = 2y$ **c)** $y' = -y$

Exercice 3.12: Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y\dfrac{dy}{dx} - 3x^2 + 5 = 0$ **b)** $2xy\dfrac{dy}{dx} = 3 + y^2$

c) $x\,dy + y\,dx = 0$ **d)** $(x+1)\,dx + \cos(y)\,dy = 0$

e) $\dfrac{dy}{dx} = (2x+3)(y-1)$ **f)** $\dfrac{dy}{dx} - y\mathrm{e}^{x+1} = 0$

g) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin(x)}{\cos(y)}$ **h)** $\dfrac{dy}{dx} = \mathrm{e}^{x+y}$

i) $\dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} - \sin(y)\,dy = 0$ **j)** $\dfrac{dy}{y^2} + (x + \mathrm{e}^x)\,dx = 0$

Exemple : Résoudre l'équation différentielle $x\,dx + y\,dy = 0$ vérifiant la condition $y(3) = 4$.

Remarque : Connaissez-vous le site http://www.wolframalpha.com ?
Et si vous l'utilisiez pour résoudre l'équa. diff. ci-dessus?

Exercice 3.13: Dans chacun des cas suivants, déterminer la solution des équations différentielles définie sur ℝ vérifiant la condition :

a) $f'(x) + 2f(x) = 0$ $\qquad f(1) = 3$
b) $3y' - 2y = 0$ $\qquad y(3) = -1$
c) $2\dfrac{dy}{dx} = y$ $\qquad 2y(-1) = 3$
d) $y - 2\dfrac{dy}{dx} = 0$ $\qquad y(0) = 3$

Exercice 3.14: Soit f une fonction définie et dérivable sur ℝ telle que

$$4f' - 3f = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) Le graphe de f passe par le point $P(1 ; 3/4)$.
b) Le graphe de f a, au point d'abscisse 0, une tangente de pente 1.
c) La fonction f est croissante sur ℝ.
d) La solution f est solution de l'équation différentielle :

$$16y'' - 9y = 0.$$

Exercice 3.15: Donner la solution générale de l'équation différentielle $xy' = 1$ sur] 0 ; +∞ [puis sur] -∞ ; 0 [. Qu'en déduisez-vous ?

§ 3.5. Applications dans différents domaines des sciences

Exemple : La pente de la tangente en tout point $(x ; y)$ d'une courbe définie pour $x > 0$ est égale au quotient y/x. Trouver l'équation de cette courbe sachant qu'elle passe par le point $P(3 ; 4)$.

Exercice 3.16: Trouver l'équation d'une courbe passant par le point $P(0\,;2)$ et dont la pente de la tgte en tout point $(x\,;y)$ est donnée par e^x/y.

Exercice 3.17: Trouver l'équation d'une courbe passant par le point $P(0\,;3)$ et dont la pente de la tgte en tout point $(x\,;y)$ est donnée par:

$$\frac{xy}{1+x^2}$$

Exemple : Le nombre de bactéries d'une culture passe de 600 à 1800 en deux heures. En supposant que le taux de croissance est directement proportionnel au nombre de bactéries présentes, on demande de trouver :

a) une formule qui permet de calculer le nombre de bactéries au temps t ;

b) le nombre de bactéries après 4 heures ;

c) le temps t nécessaire pour que le nombre de bactéries dépasse 12'000.

Exercice 3.18: La concentration d'un médicament dans l'organisme dépend du temps écoulé depuis l'ingestion. Soit $Q(t)$ la quantité de médicaments présente dans l'organisme au temps t ; supposons que le taux de variation est proportionnel à la quantité présente. Si une heure après l'ingestion de 50 milligrammes de médicament la concentration résiduelle est de 30 milligrammes, quelle sera-t-elle après une autre heure ?

Exercice 3.19: Le radium se décompose à un taux proportionnel à la quantité de radium présente en tout temps. Un laboratoire en a acheté 300 milligrammes en 1900. En l'an 2000, il en reste 280 milligrammes.
En quelle année en restera-t-il 150 milligrammes ?

Exercice 3.20: La vitesse à laquelle le sel se dissout dans l'eau est directement proportionnelle à la quantité non dissoute. Si on jette 4 kg de sel dans une vasque d'eau dont, en 20 minutes, 1,5 kg est dissout, combien de temps faudra-t-il pour que 1 kg supplémentaire soit dissout ?

Exemple : Le radium se désintègre selon **une loi exponentielle**, c'est-à-dire qu'il se décompose à un taux proportionnel à la quantité présente en tout temps. Sa demi-vie (temps durant lequel la moitié des atomes initialement présents se désintègre) est d'environ 1600 ans.

a) Trouver une formule qui donne ce qu'il reste de 50 mg de radium pur après t années.

b) Quand restera-t-il 20 mg de radium ?

Dans les 3 exercices suivants, les isotopes proposés se décomposent selon une loi exponentielle (cf. exemple précédent)

Exercice 3.21: Le strontium 90 (^{90}Sr) dont la période radioactive (demi-vie) est de 29 ans peut être responsable de cancers des os chez l'homme. La substance, charriée par les pluies acides, pénètre dans le sol et entre ainsi dans la chaîne alimentaire. En mesurant la radioactivité d'un endroit particulier, on observe qu'elle est 2,5 fois plus élevée que le niveau acceptable *S*. Pendant combien d'années cet endroit sera-t-il contaminé ?

Exercice 3.22: En gynécologie, on utilise une substance radioactive, le ^{51}Cr, dont la période radioactive (demi-vie) est de 27,8 jours, pour localiser le placenta chez une femme enceinte. Ce produit doit être spécialement commandé dans un laboratoire médical. Si l'examen requiert 35 unités du produit et qu'il faut compter deux jours pour la livraison, quel est le nombre minimum d'unités à commander ?

Exercice 3.23: *Le carbone-14 sert à la datation en archéologie et en géologie. La méthode repose sur le fait que cet isotope instable est présent dans le* CO_2 *de l'air. Les plantes absorbent ce carbone de l'air; et quand elles meurent, le carbone qu'elles ont accumulé commence à se désintégrer. La période radioactive (demi-vie) du carbone-14 est d'environ 5700 ans. En mesurant la quantité de carbone-14 encore présente dans l'échantillon à dater, on réussit à déterminer approximativement le moment de sa mort.*

Un os contient 20% de la quantité de carbone-14 contenue dans un os d'aujourd'hui. Quel est l'âge de cet os?

Exemple : Les lois de la thermodynamique établissent que la vitesse avec laquelle un objet se refroidit est directement proportionnelle **à la différence** de température entre l'objet et le milieu ambiant. Si un objet passe de 50° à 40° en une demi-heure dans de l'air à 25°, quelle est sa température à la fin de la demi-heure suivante ?

Exercice 3.24: On laisse se refroidir une plaque métallique qui a été chauffée et on constate qu'elle passe de 80° à 65° en 20 min dans de l'air ambiant à 15°. En suivant les lois de la thermodynamique (voir l'exemple précédent), on peut calculer approximativement sa température après une heure de refroidissement. Quelle est-elle? À quel moment sa température sera-t-elle de 37° ?

Exercice 3.25: Un thermomètre extérieur indique une température de 6°. On le porte à l'intérieur dans une pièce où il fait 21° et cinq minutes plus tard, il marque 16°. Quand aura-t-il atteint 18°?

§ 3.6. Quelques applications pour aller un peu plus loin

Exercice 3.26: Pendant le premier mois de croissance de certaines plantes, telles que le maïs, le coton ou le soja, la vitesse de croissance (en g/jour) est proportionnelle au poids P du moment. Pour certaines espèces de coton, $dP/dt = 0{,}21P$.
Évaluer, le poids d'une plante à la fin du mois ($t = 30$) si la plante pesait 70 mg au début du mois.

Exercice 3.27: Une sonde spatiale quitte la Terre. En négligeant la résistance de l'air, sa vitesse au moment où les gaz propulseurs cessent leur action satisfait l'équation différentielle $v(dv/dy) = -ky^{-2}$, où y est la distance depuis le centre de la Terre et k une constante positive. Si y_0 est sa distance du centre de la Terre à ce moment et v_0 la vitesse correspondante, trouver la relation qui lie v à y.

Exercice 3.28: À haute température, le dioxyde d'azote NO_2, se décompose en NO et O_2. Si $y(t)$ représente la concentration de NO_2 (en moles/litre*), alors, à 600°K, $y(t)$ se modifie suivant la loi de réaction $dy/dt = -0{,}05y^2$ par rapport au temps t en secondes. Exprimer y en fonction de t et de la concentration initiale y_0.

*Rappel : Un échantillon normal de matière contient un très grand nombre d'atomes. Par exemple, 1 gramme d'aluminium contient environ $2{,}2 \times 10^{22}$ atomes. Pour éviter l'utilisation d'aussi grands nombres, on a créé une unité de mesure, la mole.
Une mole (symbole: mol) d'atomes contient $6{,}022 \cdot 10^{23}$ atomes. Ce nombre est appelé nombre d'Avogadro, son symbole est NA. Ce nombre est le nombre d'atomes présent dans exactement 12g de ^{12}C.
(http://www.cdrummond.qc.ca/cegep/scnature/Chimie/Mole/Mole.htm)

Exercice 3.29: Même contexte que l'exercice 3.18. L'isotope d'hydrogène $^{3}_{1}H$ dont la période radioactive (la demi-vie) est de 12,3 années est produit dans l'atmosphère par les rayons cosmiques et amené sur la terre par les pluies. On mesure la quantité de cet isotope dans les parois d'une vieille maison et on trouve qu'elle atteint 10% de celle contenue dans les parois d'une maison semblable récemment construite. Quel est l'âge de cette vieille maison ?

§ 3.7 Équations différentielles du type $y' = ay + b$:

Introduction: Dans les paragraphes précédents, nous avons résolu des équations du type $y' = ay$ où a est un réel non nul. Nous avons observé que la solution générale était du type $y(x) = C\mathrm{e}^{ax}$ où C est une constante quelconque.

Nous allons introduire une nouvelle méthode pour les équations du type : $y' = ay + b$. Celle-ci pourra ensuite être adaptée afin de résoudre les équations du type : $y' - f(x)y = g(x)$.

Exemple d'introduction: Résoudre l'équation (E) : $y' = 3y + 7$

a) Montrer que la fonction constante $y_1 = -7/3$ est une solution particulière de (E).

b) Soit y une solution quelconque de (E), on a donc les 2 conditions : $\begin{cases} y' = 3y + 7 \\ y_1' = 3y_1 + 7 \end{cases}$

Montrer alors que la nouvelle fonction $Y = y - y_1$ est solution de l'équation différentielle (E_0) : $Y' = 3Y$.

c) Résoudre l'équation (E_0) puis en déduire que la solution de l'équation de départ (E) est : $y(x) = C\mathrm{e}^{3x} - 7/3$

Méthode pour résoudre les équations du type $y' = ay + b$:

1) On détermine une solution particulière y_1 de l'équation (E) : $y' = ay + b$ *(l'énoncé donne éventuellement les indications nécessaires).*

2) On montre qu'une fonction y est solution de (E) si et seulement si la fonction $Y = y - y_1$ est solution d'une équation (E_0) du type $Y' = aY$.

3) On résout cette nouvelle équation et on en déduit la solution de (E).

Exemple : Résoudre $2\dfrac{dy}{dx} + 5y = 6$

Exercice 3.30: Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $4y' - y = 6$ **b)** $\sqrt{2}y' - 2y = -1$

Exercice 3.31: Des 2 équations précédentes, déterminer les solutions particulières vérifiant la condition initiale : $y(0) = 4$.

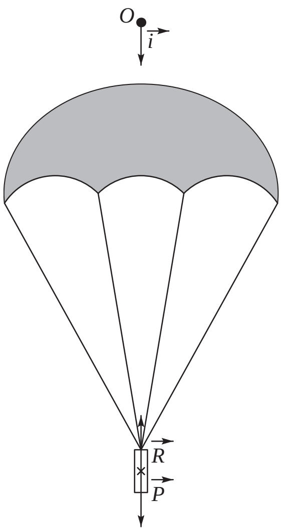
Exercice 3.32: Montrer que la solution générale de l'équation $y' = ay + b$ est donnée par $y(x) = C\mathrm{e}^{ax} - b/a$.

Exercice 3.33: Une personne est placée sous perfusion de pénicilline à raison de 0,1 milligramme de substance par minutes. On note $Q(t)$ la quantité de pénicilline présente dans le sang au temps t (en minutes). On admet qu'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$Q'(t) = 0{,}1 - k \cdot Q(t).$$

a) Sachant que $Q(0) = 0$, exprimer $Q(t)$ en fonction de k et t.
b) Esquisser l'allure générale de $Q(t)$ après avoir calculé sa limite en $+\infty$.
c) Calculer k sachant qu'au bout de 3 heures, Q est égale à la moitié de la valeur limite.

Exercice 3.34: La trajectoire suivie par un parachutiste en descente verticale est associée à un repère vertical noté $(O, \vec{i})$.
À un instant donné, le vecteur vitesse $\vec{V}$ de l'objet est défini par $\vec{V}(t) = v(t) \cdot \vec{i}$ où v est une fonction de la variable réelle positive t (représentant le temps).
Dans ces conditions de l'expérience, le vecteur $\vec{R}$ représentant la résistance de l'air est défini par $\vec{R} = -k\vec{V}$ où k est un nombre réel strictement positif (coefficient de résistance).
On admet que la fonction v vérifie l'équation différentielle



$$(E) \quad mv'(t) + kv(t) = mg$$

où m est la masse totale du parachutiste et de son parachute et g l'accélération de la pesanteur.

a) Montrer qu'il existe une fonction constante, solution particulière de (E).
b) Résoudre l'équation différentielle (E).

Dans la suite du problème, on prendra $m = 125$ kg, $g = 9{,}8$ ms^{-2} et $k = 200$.

c) Donner la fonction particulière v_1, solution de (E) correspondant à une vitesse initiale $v_1(0) = 15$ ms^{-1}.
d) Donner la fonction particulière v_2, solution de (E) correspondant à une vitesse initiale nulle.
e) Montrer que les fonctions v_1 et v_2 ont la même limite lorsque t tend vers $+\infty$.
f) Tracer soigneusement les courbes C_1, C_2 et représentant respectivement les fonctions v_1 et v_2 dans un système d'axes.
g) La vitesse maximale obtenue lors d'une chute libre est d'environ 80 ms^{-1} (près de 300 km/h). Si le parachutiste décide alors d'ouvrir son parachute, après combien de temps sa vitesse correspondra-t-elle à 10% de plus que la vitesse limite calculée en **e)**.

Exercice 3.35: En biologie, un modèle proposé pour la croissance d'êtres vivants est le suivant :

Tout individu de taille maximale M admet une vitesse de croissance proportionnelle à la taille manquante.

Autrement dit, si on note $C(t)$ la taille à l'instant t, cette fonction est solution de l'équation différentielle $C'(t) = k\big(M - C(t)\big)$.

a) Résoudre cette équation différentielle en supposant $C(0) = 0$.
b) Vérifier que C est croissante et calculer sa limite en $+\infty$.
c) Une espèce de maïs a une taille maximum de 180 cm et met 15 jours pour atteindre la moitié de celle-ci. Au bout de combien de jours sera-t-elle à moins de 10 cm de sa taille maximale ?

§ 3.8 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition: Une équation différentielle **linéaire d'ordre 1** est de la forme:

$$y' + f(x)y = g(x) \ .$$

- On parle d'équation différentielle linéaire d'ordre 1 **sans second membre** si $g(x) = 0$ (**SSM**).
- On parle d'équation différentielle linéaire d'ordre 1 **avec second membre** si $g(x) \neq 0$ (**ASM**).

La fonction $g(x)$ est le second membre de l'équation. L'équation SSM est encore appelée **équation homogène**.

3.8.1 Équations différentielles linéaires sans second membre (SSM)

Définition: Nous considérons dans ce paragraphe des équations de la forme :

$$(E_0)\colon\ y' + f(x)y = 0$$

Ces équations SSM sont *à variables séparables* et aisément intégrables sous réserve de pouvoir calculer la primitive de la fonction f :

Théorème: Si f est une fonction intégrable sur un intervalle I, la solution générale de l'équation **SSM** $y' + f(x)y = 0$ est:

$$y = C\mathrm{e}^{-F(x)}$$

où F est une primitive de f sur I et où C est une constante réelle quelconque.

Preuve:

Exemple: Résoudre l'équation $y' + e^x y = 0$

Exercice 3.36: Résoudre les équations suivantes:

a) $y'(x) + 3y(x) = 0$ **b)** $x^2 y' = 2y$ **c)** $x'(t) - (1 + t^2)x(t) = 0$

3.8.2 Équations différentielles linéaires avec second membre (ASM)

Définition: Nous considérons dans ce paragraphe des équations de la forme :

$$(E):\ y' + f(x)y = g(x)$$

Théorème: La solution générale de (E) : $y' + f(x)y = g(x)$ peut s'obtenir en ajoutant à UNE solution particulière de cette équation la solution générale de l'équation **SSM** associée (E_0): $y' + f(x)y = 0$.

Preuve:

Exemple: Soit l'équation différentielle (E): $xy' - 2y = 2\ln(x) - 3$

a) Montrer que la fonction y_p définie sur]0 ; +∞[par:

$$y_p(x) = 1 - \ln(x)$$

est une solution particulière de (E).

b) Résoudre l'équation différentielle (E) sur I =]0 ; +∞[.

c) Déterminer la solution particulière vérifiant que $y(1) = 0$.

Exercice 3.37: Soit l'équation différentielle (E): $y' + xy = x^2 e^{-x}$

a) Déterminer 2 réels a et b tels que la fonction y_p définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une solution particulière de (E).

b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).

c) Déterminer la solution particulière vérifiant que $y(0) = 2$.

Exercice 3.38: Soit l'équation différentielle (E): $y' + 3y = e^{2x}$

a) Déterminer le réel a tel que la fonction y_p définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p(x) = ae^{2x}$ soit une solution particulière de (E).

b) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).

c) Déterminer la solution particulière vérifiant que $y(0) = 1$.

Exercice 3.39: Résoudre l'équation différentielle (E): $y' + xy = 2x^2 + 3x + 2$, après avoir proposé une solution particulière sous la forme d'un polynôme.

Résumé: Les équations **ASM** se résolvent en deux temps:

(1) On résout d'abord l'équation SSM pour obtenir une solution

$$y_1 = C\mathrm{e}^{-F(x)};$$

(2) On recherche une solution particulière y_p de l'ASM à l'aide d'indices;

(3) La solution générale de l'ASM s'obtient en calculant $y_1 + y_p$

Et si on ne trouve pas de solution particulière de l'ASM?

Nouvelle méthode: Après avoir déterminé la solution de l'équation **SSM** sous la forme $y_1 = C\mathrm{e}^{-F(x)}$, on remplace la constante C par une fonction $C(x)$ que l'on cherchera à déterminer en "resubsituant" le tout dans l'équation de départ. Cette méthode s'appelle **la méthode de la variation de la constante** et elle est due à Lagrange.

Exemple: Résoudre l'équation différentielle (E): $y' + 2xy = x$

Exercice 3.40: Résoudre les équations différentielles suivantes:

a) $y'(x) + 2y(x) = 1$

b) $\dfrac{dy}{dx} - 5y = 12$

c) $y' - \dfrac{1}{x}y = x$

d) $u'(t) + u(t) = 1 + e^{5t}$

e) $\dfrac{dy}{dx} = x + 3xy$

f) $xy' + 2y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

g) $\dfrac{dx}{dt}\sin(t) + x\cos(t) = 1$

h) $y'(t) - 2y(t) = \cos(t)$

Exercice 3.41: Résoudre les équations différentielles vérifiant la condition donnée:

a) $y'(x) + 5y(x) = 8$ $\quad y(0) = 1$

b) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 2x$ $\quad y(0) = 2$

c) $\dfrac{dx}{dt} - 2x = 3e^{2t}$ $\quad x(1) = 2$

d) $\dfrac{dy}{dx} + y = \sin(2x)$ $\quad y(0) = 0$

Exercice 3.42: Un fil conducteur parcouru par un courant électrique d'intensité constante s'échauffe par effet Joule et sa température, en degré Celsius, est une fonction ϑ du temps t exprimé en secondes.

On choisit l'instant de mise sous tension comme origine du temps et, à cet instant, la température du conducteur est de 0°C.

Dans les conditions de l'expérience, la fonction ϑ est telle que

$$\vartheta'(t) + 0{,}1\vartheta(t) = 2$$

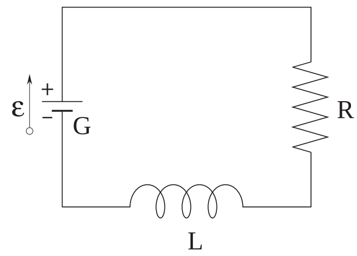
a) Exprimer ϑ en fonction de t.
b) À quel instant la température du fil vaut-elle 10°C ?
c) Quelle est la limite de $\vartheta(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice 3.43: Une étude sur le nombre d'oiseaux vivant sur la petite île d'Hirundo a conduit à stipuler que ce nombre, t années après le 21 mars 2009, est solution de l'équation différentielle :

$$y'(t) = 3 \cdot \sin(2\pi t) \cdot y(t) + 2000 \cdot \sin(2\pi t)$$

Sachant que la population d'oiseaux est de 500 le 21 mars, déterminer le nombre d'oiseaux sur l'île le 21 avril, le 21 août.

Exercice 3.44: Un circuit électrique comprend un générateur G, une bobine d'inductance L et une résistance R.



L'intensité du courant électrique i, exprimée en ampères, est fonction du temps t, exprimé en secondes, et est solution de l'équation différentielle:

$$(E):\ L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = \varepsilon$$

L est exprimée en henrys, R en ohms, et ε en volts.

a) Résoudre l'équation différentielle (E) en sachant qu'à l'instant $t = 0$ l'intensité du courant est nulle.

b) Quelle est la limite de $i(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

c) Application numérique: exprimer $i(t)$ lorsque:

$L = 0{,}2$ H, $R = 100\ \Omega$ et $\varepsilon = 10$ V.

§ 3.8 Équations différentielles linéaires du second ordre

Définition: Une équation différentielle **linéaire** à coefficients constants **d'ordre 2** est de la forme :

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = g(x) \quad a \in \mathbb{R}^* \quad \text{et} \quad b, c \in \mathbb{R}$$

Remarque: Dans ce paragraphe, nous nous limiterons aux équations différentielles linéaires d'ordre 2 sans second membre ($g(x) = 0$).

De plus, nous indiquerons ici une méthode de résolution basée sur le théorème qui suit. Théorème qui ne sera pas démontré…

Théorème: Soit (E_0) $ay'' + by' + cy = 0$ $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$,
La solution générale de (E_0) dépend des solutions de **l'équation caractéristique** :

$$ar^2 + br + c = 0$$

Trois cas peuvent se présenter :

a) si cette équation admet **deux solutions réelles distinctes** r_1 et r_2, la solution générale de (E_0) est :

$$y(x) = C_1 \cdot e^{r_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{r_2 \cdot x}$$

b) si cette équation admet **une solution réelle** r, la solution générale de (E_0) est :

$$y(x) = \left(C_1 \cdot x + C_2\right) e^{r \cdot x}$$

c) si cette équation admet **deux solutions complexes** $p \pm q$i, la solution générale de (E_0) est :

$$y(x) = e^{p \cdot x}\left[C_1 \cdot \cos(q \cdot x) + C_2 \cdot \sin(q \cdot x)\right]$$

Exercice 3.45: Résoudre les équations différentielles suivantes:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ **b)** $y'' + 6y' + 9y = 0$
c) $y'' + 2y' + 5y = 0$

Exercice 3.46: Résoudre l'équation différentielle : $9y'' - 6y' + y = 0$

vérifiant les conditions initiales: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$