Éléments de réponses Chapitre 1 :

Exercice 1.1 $r \approx$ -1,373

Exercice 1.2 **1)** Il s'agit d'étudier la croissance des fonctions correspondantes à l'aide de la dérivée.
2) **a)** $r \approx 0{,}272$ **b)** $r \approx 0{,}316$ **c)** $r \approx -0{,}567$

Exercice 1.3 Il s'agit de rechercher le zéro de l'une ou l'autre des fonctions suivantes:

$f(x) = \sqrt{2x}\cdot(2+x) - 24$ ou $f(x) = 2x^3 + 8x^2 + 8x - 576$

dans l'intervalle [0 ; 8]. On obtient environ 5,34 cm

Exercice 1.4 Il s'agit de rechercher les zéros de l'une ou l'autre des fonctions suivantes:

$f(x) = (x-1)\sqrt{100 - x^2} - x$ ou $f(x) = x^4 - 2x^3 - 98x^2 + 200x - 100$

dans l'intervalle [1 ; 10]. On obtient environ 1,11 m et 9,94 m

Exercice 1.5 Il s'agira de 1,39 m

Exercice 1.6 Pas de corrigé

Exercice 1.7 $r \approx 1{,}442$

Exercice 1.8

	a)	b)	c)	d)
x_1	1	0	10	-2
x_2	1	-	5,05	-1,25
x_3	1	-	2,62	**-1**,025
x_4	1	-	1,50	**-1,0**00
x_5	1	-	**1**,08	**-1,000**
x_6	1	-	**1,0**03	
x_7	1	-	**1,00**0	

Exercice 1.9 **a)** $r \approx -0{,}322$ **b)** $r \approx 0{,}682$

Exercice 1.10 Il s'agit de rechercher le zéro de l'une ou l'autre de ces fonctions:

$f(x) = \dfrac{3}{x^2+1} - \sqrt{x}$ ou $f(x) = 3 - \sqrt{x}(x^2+1)$ ou encore $f(x) = x^5 + 2x^3 + x - 9$

On obtient le zéro de f en $x \approx 1{,}284$

Exercice 1.11 **a)** ❶ $x_1 = b$ ❷ $x_1 = a$ ❸ $x_1 = a$ ❹ $x_1 = b$
b) si $f(a)$, $f''(a)$ et $f''(b)$ ont le même signe alors $x_1 = a$, sinon $x_1 = b$

Exercice 1.12 $x \approx 0{,}682$

Éléments de réponses Chapitre 2 :

Exercice 2.1 : **a)** $f(0) = -6$; $f'(0) = 4$; $f''(0) = -10 = \mathbf{2}\cdot(-5)$; $f'''(0) = 6 = \mathbf{2}\cdot\mathbf{3}\cdot(1)$

b) La $n^{\text{ième}}$ dérivée évaluée en 0 correspond au $n^{\text{ième}}$ coefficient multiplié par n !

c) Découle de ce qui précède

d) Généralisation de ce qui précède :

Comme $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_kx^k + \ldots$, alors $f^{(k)}(x) = \big(k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1\big)\cdot a_k + P(x)$ où $P(x)$ exprime un polynôme en x et ainsi $f^{(k)}(0) = \big(k!\big)\cdot a_k$

Exercice 2.2 : **a)** $m_0(x) = m_1(x) = 1$; $m_2(x) = m_3(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$; $m_4(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$

b) $m_8(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + \dfrac{x^8}{40320}$

c) $m_8(\pi/5) = 0{,}809017$

d) identique que le calcul direct $\cos(\pi/5) = 0{,}809017$.

Et si on évalue progressivement le développement de MacLaurin en $\pi/5$:

$$m_0(\pi/5) = m_1(\pi/5) = 1$$
$$m_2(\pi/5) = m_3(\pi/5) = 0{,}802607912$$
$$m_4(\pi/5) = m_5(\pi/5) = 0{,}\mathbf{80}91018514$$
$$m_6(\pi/5) = m_7(\pi/5) = 0{,}\mathbf{8090}163946$$
$$m_8(\pi/5) = m_9(\pi/5) = 0{,}\mathbf{809016}997$$

Exercice 2.3 : On justifie, par une méthode algébrique, le développement de Macaurin obtenu dans l'exemple précédent.

Exercice 2.4 : **a)** $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots + \mathbf{(-1)^{k}}\,\dfrac{\mathbf{x^{2k+1}}}{\mathbf{(2k+1)!}} + \ldots$

b) $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots + \mathbf{(-1)^{k}}\,\dfrac{\mathbf{x^{2k}}}{\mathbf{(2k)!}} + \ldots$

c) $\ln(x+1) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + \mathbf{(-1)^{k}}\,\dfrac{\mathbf{x^{k+1}}}{\mathbf{k+1}} + \ldots$

d) $(1+x)^{3/2} = 1 + \dfrac{3x}{2} + \dfrac{3x^2}{8} - \dfrac{x^3}{16} + \dfrac{3x^4}{128} + \ldots$

Le terme général étant particulièrement délicat ici, on ne le demande pas. Mais en exercice Bonus…!?!

Exercice 2.5 : **a)** $\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \ldots + \boldsymbol{(-1)^k \frac{x^{4k}}{(2k)!}} + \ldots$

b) En substituant $t = x^2$ dans le développement de $\cos(t)$, on obtient le développement de $\cos(x^2)$.

Exercice 2.6 : $\ln(2x+1) = (2x) - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(2x)^4}{4} + \ldots + \boldsymbol{(-1)^k \frac{(2x)^{k+1}}{k+1}} + \ldots$

Il s'agit donc de "**substituer"** x par $2x$ dans le développement de $\ln(x + 1)$.

On préferera ensuite proposer le développement sous le forme:

$$\ln(2x+1) = 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} - 4x^4 + \ldots + \boldsymbol{(-1)^k \frac{2^{k+1} x^{k+1}}{k+1}} + \ldots$$

Exercice 2.7 : **a)** $\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \ldots + \boldsymbol{(-1)^k \frac{(2x)^{2k+1}}{(2k+1)!}} + \ldots$ donc

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} - \frac{8x^7}{315} + \ldots + \boldsymbol{(-1)^k \frac{2^{2k+1} \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}} + \ldots$$

b) $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \ldots + \boldsymbol{(-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}} + \ldots\right)$

donc $\cos^2(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{45} + \ldots + \boldsymbol{(-1)^k \frac{2^{2k-1} \cdot x^{2k}}{(2k)!}} + \ldots$

Exercice 2.8 : **a)** $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + \boldsymbol{(-1)^k x^k} + \ldots$

b) par substitution dans le développement précédent :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + \boldsymbol{(-1)^k x^{2k}} + \ldots$$

Exercice 2.9 :

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \boldsymbol{(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}} + \ldots$ cf. exercice 2.4 c)
- $\ln(1-x) = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} - \frac{(-x)^4}{4} + \ldots + \boldsymbol{(-1)^k \frac{(-x)^{k+1}}{k+1}} + \ldots$ par substitution

ainsi : $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \boldsymbol{\frac{x^{k+1}}{k+1}} + \ldots$ et finalement

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \boldsymbol{2\frac{x^{2k+1}}{2k+1}} + \ldots$$

Exercice 2.10 : **a)** $f(2) = -6$; $f'(2) = 4$; $f''(2) = -10 = \mathbf{2} \cdot (-5)$; $f'''(2) = 6 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot (1)$

b) $f(x) = \frac{f'''(2)}{3 \cdot 2} \cdot (x-2)^3 + \frac{f''(2)}{2} \cdot (x-2)^2 + f'(2) \cdot (x-2) + f(2) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k$

Exercice 2.11 : **a)** $t_4(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{2} - \frac{\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2}{4} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3}{12} + \frac{\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4}{48}$

b) 65° correspond à $\frac{13\pi}{36}$ proche de $\frac{\pi}{3}$

$t_4(13\pi/36) = 0{,}9063078$ à comparer avec le calcul direct de sin(65°).

Exercice 2.12 : **a)** $t_3(x) = e + e(x-1) + \frac{1}{2!}e(x-1)^2 + \frac{1}{3!}e(x-1)^3$

b) $t_3(x) = \ln(3) + \frac{x-3}{3} - \frac{(x-3)^2}{18} + \frac{(x-3)^3}{81}$

c) $t_3(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3$

d) $t_3(x) = 3 + \frac{x-9}{6} - \frac{(x-9)^2}{216} + \frac{(x-9)^3}{3888}$

e) $t_3(x) = -\frac{1}{3} + \frac{x-5}{9} - \frac{(x-5)^2}{27} + \frac{(x-5)^3}{81}$

f) $m_3(x) = x + \frac{x^3}{3} + \ldots$

Les calculs des dérivées successives étant particulièrement pénibles, on peut s'arrêter à cette étape !!

En fait: $m_7(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315}$

Exercice 2.13 : **a)** Développement de $\ln(1 + x)$ autour de $c = 0$ car $\ln(1)$ ne nécessite pas de calculatrice !! :

$$m_0(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1(0{,}2) = 0$$
$$m_1(x) = x \quad \Rightarrow \quad m_1(0{,}2) = 0{,}2$$
$$m_2(x) = x - \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad m_2(0{,}2) = 0{,}18$$
$$m_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \Rightarrow \quad m_3(0{,}2) = 0{,}\mathbf{18}2\overline{6}$$
$$m_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \quad \Rightarrow \quad m_4(0{,}2) = 0{,}\mathbf{182}2\overline{6}$$

b) Développement de e^x autour de $c = 0$ car e^0 ne nécessite pas de calculatrice !! :

Nous avons vu que $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$

$$m_4(-0{,}5) = 0{,}606770833$$
$$m_5(-0{,}5) = 0{,}\mathbf{606}510417$$

c) Dans l'exercice 2.11, nous avons déjà développé $f(x) = \sin(x)$ autour de $x = \pi/3$. Utilisons-la pour approximer $\sin(5\pi/18)$.

$$t_4(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{2} - \frac{\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2}{4} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3}{12} + \frac{\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4}{48}$$

$$t_0(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad t_0(5\pi/18) = 0{,}866025404$$
$$t_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{2} \quad \Rightarrow \quad t_1(5\pi/18) = 0{,}778758941$$
$$t_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{2} - \frac{\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2}{4} \quad \Rightarrow \quad t_2(5\pi/18) = 0{,}\mathbf{7}65568620$$
$$\Rightarrow \quad t_3(5\pi/18) = 0{,}\mathbf{76}6011668$$
$$\Rightarrow \quad t_4(5\pi/18) = 0{,}\mathbf{7660}45151$$

Une deuxième démarche possible est de développer de $\sin(x)$ autour de $c = \pi/4$ car $\sin(\pi/4)$ ne nécessite pas de calculatrice. Vous obtiendrez :

$$t_4(5\pi/18) = 0{,}766044414$$

Exercice 2.14 : Il s'agit donc de développer $f(x) = \ln(x)$ autour du point $c = 8$.

$$f(x) = \ln(8) + \frac{x-8}{8} - \frac{(x-8)^2}{2 \cdot 8^2} + \frac{(x-8)^3}{3 \cdot 8^3} + \ldots + \mathbf{(-1)^{k+1}} \frac{\mathbf{(x-8)^k}}{\mathbf{k \cdot 8^k}} + \ldots$$

pour $k \geq 1$

Exercice 2.15 :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots + \mathbf{(-1)^k} \frac{\mathbf{x^{2k}}}{\mathbf{(2k+1)!}} + \ldots = 1$$

Exercice 2.16 : Utilisez à nouveau le développement de Maclaurin de la fonction f définie par $f(x) = \sin(x)$.

Et si vous calculiez cette même limite en appliquant la règle de Bernoulli-L'Hospital ?

Exercice 2.17 : **a)** S'obtient "en substituant" x par $-x^2$ dans le développement de $f(x) = e^x$.

$$f(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \ldots + \mathbf{(-1)^k} \frac{\mathbf{x^{2k}}}{\mathbf{k!}} + \ldots$$

b) $$\int_0^2 e^{-t^2}\, dt = \int_0^2 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{6}\, dt = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{10}t^5 - \frac{1}{42}t^7 \Big|_0^2 = -\frac{18}{35}$$

c) $$F(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2 \cdot 5}x^5 - \frac{1}{6 \cdot 7}x^7 + \mathbf{(-1)^k} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k! \cdot (2k+1)}} \mathbf{x^{2k+1}} + \ldots$$

Exercice 2.18 : **a)**

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^x 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + \mathbf{(-1)^k t^{2k}} + \ldots$$
$$= t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \ldots + \frac{(-1)^k}{2k+1}\mathbf{t^{2k+1}} + \ldots \Big|_0^x$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

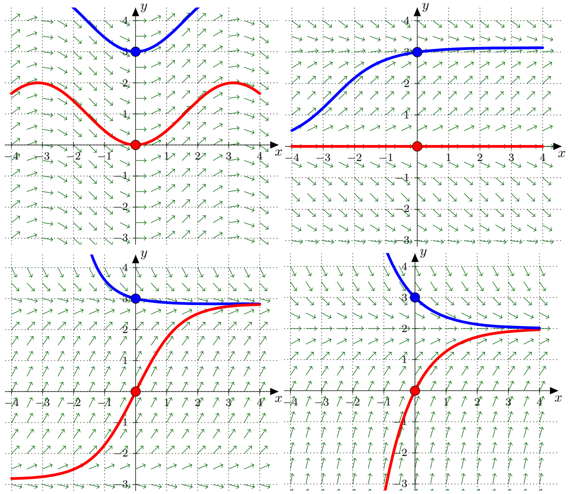
b) De $\tan(\pi/4) = 1$, on obtient $\pi = 4 \cdot \arctan(1)$.
Ainsi en utilisant le développement précédent :

$$\pi = 4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right]$$

Éléments de réponses Chapitre 3 :

Exercice 3.1 Pas de corrigé

Exercice 3.2 **a)**



b) ❶ $\leftrightarrow$ $y' = \sin(x)$ ❷ $\leftrightarrow$ $y' = \sin(y)$

❸ $\leftrightarrow$ $y' = 2 - \frac{1}{4}y^2$ ❹ $\leftrightarrow$ $y' = 2 - y$

Exercice 3.3 **a)** Supposons l'existence d'une autre solution sous la forme $h(x) = ax^2 + bx + c$ en remplaçant celle-ci dans l'équa. diff, vous retrouverez comme conditions a = 1, b = 4 et c = 6

b) Pas de corrigé

Exercice 3.4

$$\left.\begin{array}{l}\text{Solution générale: } y = C \cdot \mathrm{e}^x \textit{ (cf. bas page 2)} \\ \text{Condition initiale: } y(0) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = \mathrm{e}^x$$

Exercice 3.5 **a)** $y = C$ **b)** $f(x) = -x^2 + C$

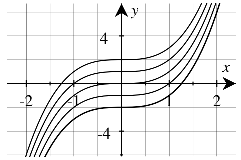
c) $y = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + C$ ou $y = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C$

d) $y = \sqrt{x^2 + 1} + C$ **e)** $x = e^{t^2} + C$

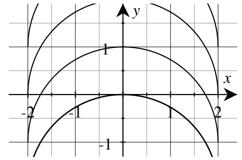
f) $u = \ln(4 + t^2) + C$

Exercice 3.6 **1)** **a)** I = IR **b)** $y = x^3 + C$ **c)** $y = x^3 + 2$

2) **a)** I =] –2 ; 2 [**b)** $y = \sqrt{4 - x^2} + C$ **c)** $y = \sqrt{4 - x^2}$



1)



2)

Exercice 3.7 $y = -\frac{2}{x} - 4$

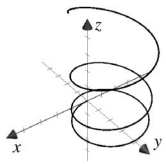
Exercice 3.8 v = (-)14 m/s

Exercice 3.9 900 m est la distance parcourue au moment où la voiture atteint la vitesse de 30 m/s

Exercice 3.10 De $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$, la solution générale sera :

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\; dt = \begin{pmatrix} \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega \cdot t) + C_x \\ -\frac{v_0}{\omega}\cos(\omega \cdot t) + C_y \\ \frac{a \cdot t^2}{2} + C_z \end{pmatrix}$$

En tenant compte des conditions initiales :



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega \cdot t) \\ \frac{v_0}{\omega}(1 - \cos(\omega \cdot t)) \\ \frac{a \cdot t^2}{2} \end{pmatrix}$$

Cette trajectoire hélicoïdale (mouvement circulaire dans la projection du plan Oxy et d'accélération uniforme dans la direction Oz) correspond à celle d'un électron qui entre avec une vitesse initiale v_0 dans une zone où règne un champ électrique E et un champ magnétique B parallèle à Oz

Exercice 3.11 **a)** $y = C \cdot \mathrm{e}^x$ **b)** $y = C \cdot \mathrm{e}^{2x}$ **c)** $y = C \cdot \mathrm{e}^{-x} = \frac{C}{\mathrm{e}^x}$

Exercice 3.12 **a)** $y^2 = 2x^3 - 10x + C$ ou $y = \pm\sqrt{2x^3 - 10x + C}$

b) $y^2 = Cx - 3$ ou $y = \pm\sqrt{Cx-3}$ (avec C ici non nul car…)

c) $xy = C$ ou une forme équivalente

d) $x^2 + 2x + 2\sin(y) = C$ ou

$$y = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}(-x^2 - 2x + C)\right) + k\cdot 2\pi \text{ et } y = \pi - \text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}(-x^2 - 2x + C)\right) + k\cdot 2\pi$$

e) $y = 1 + Ce^{x^2+3x}$

f) $y = Ce^{e^{x+1}}$

g) $\cos(x) + \sin(y) = C$ ou

$$y = \text{Arcsin}(C - \cos(x)) + k\cdot 2\pi \text{ et } y = \pi - \text{Arcsin}(C - \cos(x)) + k\cdot 2\pi$$

h) $e^x + e^{-y} = C$

i) $\sqrt{1+x^2} + \cos(y) = C$ ou …

j) $\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + e^x + C$ ou $y = \frac{2}{x^2 + 2e^x + C}$

Exercice 3.13 **a)** $f(x) = 3e^{-2x+2}$ **b)** $y = -e^{2/3x-2}$

c) $y = \frac{3}{2}e^{1/2(x+1)}$ **d)** $y = 3e^{x/2}$

Exercice 3.14 **1)** Faux, il s'agit de $A(1\,;\,e^{3/4})$ **2)** Faux, il s'agit de $m = 3/4$

3) Vrai **4)** Vrai

Exercice 3.15 $y = \ln(x) + C_1$ puis $y = \ln(-x) + C_2$

La notion d'intervalle I dans la résolution d'une équation différentielle est fondamentale. Si on change d'intervalle, on peut très bien changer la solution. Ici, la solution sous la forme y = ln(|x|) + C induit que $C_1 = C_2 = C$, ce qui n'est nécessairement le cas.

Exercice 3.16 $y = \sqrt{2e^x + 2}$

Exercice 3.17 $y = 3\sqrt{1+x^2}$

Exercice 3.18 18 mg (Formule générale : $Q(t) = 50\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^t$)

Exercice 3.19 il restera 150 mg en l'an 2904

(Formule générale : $Q(t) = 300\cdot\left(\frac{14}{15}\right)^{t/100}$)

Exercice 3.20 $t = \frac{20\ln(3/8)}{\ln(5/8)} \approx 41,74$ minutes

Exercice 3.21 $t = \frac{29\ln(2/5)}{\ln(1/2)} \approx 38,34$ années

Exercice 3.22 $Q(0) = 36,79$ unités

Exercice 3.23 $t = \frac{5700\ln(1/5)}{\ln(1/2)} \approx 13'235$ années

Exercice 3.24 $T(60) = 44,59°$; $t = 82,58$ minutes

Exercice 3.25 $t = \frac{5\ln(1/5)}{\ln(1/3)} \approx 7,32$ minutes

Exercice 3.26 $P(30) = 38,12$ g

Exercice 3.27 $v(y) = \sqrt{2k\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right) + v_0^2}$

Exercice 3.28 $y(t) = \frac{y_0}{0,05y_0\cdot t + 1}$

Exercice 3.29 $t = 40,86$ ans

Exercice 3.30 **a)** la solution générale de $y' = 1/4y + 3/2$ est $y(x) = C\cdot e^{1/4x} - 6$

b) la solution générale de $y' = \sqrt{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}$ est $y(x) = C\cdot e^{\sqrt{2}x} + \frac{1}{2}$

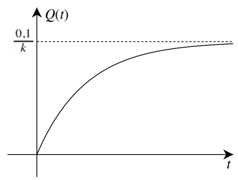
Exercice 3.31 **a)** $y(x) = 10e^{1/4x} - 6$ **b)** $y(x) = \frac{7}{2}e^{\sqrt{2}x} + \frac{1}{2}$

Exercice 3.32 pas de corrigé

Exercice 3.33 **a)** $Q(t) = \frac{0,1}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t) = \frac{0,1}{k}$

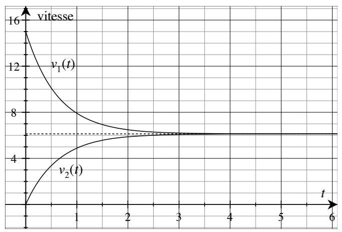
c) $k = \frac{-\ln(1/2)}{180}$ ou mieux $k = \frac{\ln 2}{180}$



Exercice 3.34 **a)** $v_{\text{cste}} = \dfrac{mg}{k}$ **b)** $v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \dfrac{mg}{k}$

c) $v_1(t) = 8{,}875e^{-8t/5} + 6{,}125$ **d)** $v_2(t) = -6{,}125e^{-8t/5} + 6{,}125$

e) Cette limite vaut $v = 6{,}125\ \text{ms}^{-1}$



g) En supposant donc une ouverture instantanée et optimale du parachute, il s'agira de 3 secondes. Ce qui correspond à une décélération de 24,46 ms^{-2}, soit de 2,5 G.

Exercice 3.35 **a)** $\left.\begin{array}{r} C(t) = M + Ke^{-kt} \quad \text{(K constante réelle)} \\ C(0) = 0 \quad \text{(condition initiale)} \end{array}\right\} \Rightarrow C(t) = M\left(1 - e^{-kt}\right)$

b) La dérivée $C'(t) = Mke^{-kt} > 0$ donc C(t) est croissante.
$\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = M$

c) **1°)** Calcul de k : $\left.\begin{array}{r} C(t) = 180\left(1 - e^{-kt}\right) \\ C(15) = 90 \end{array}\right\} \Rightarrow \ldots \Rightarrow k = \dfrac{\ln 2}{15}$

2°) Calcul de t : $180\left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{15}t}\right) \geq 170 \Rightarrow \ldots \Rightarrow t = \dfrac{15 \ln 18}{\ln 2}$,

donc env. 63 jours.

Exercice 3.36 **a)** $y(x) = C \cdot e^{-3x}$ **b)** $y(x) = C \cdot e^{-2/x}$ **c)** $x(t) = C \cdot e^{t(t^2+3)/3}$

Exercice 3.37 **a)** a = 1 et b = 1

b) $y(x) = (x+1) \cdot e^{-x} + C \cdot e^{-x^2/2}$

c) $y(x) = (x+1) \cdot e^{-x} + e^{-x^2/2}$

Exercice 3.38 **a)** a = 1/5

b) $y(x) = \dfrac{1}{5}e^{2x} + C \cdot e^{-3x}$ ou $y(x) = \dfrac{1}{5}\left(e^{2x} + C \cdot e^{-3x}\right)$

c) $y(x) = \dfrac{1}{5}\left(e^{2x} + 4 \cdot e^{-3x}\right)$

Exercice 3.39 $y(x) = 2x + 3 + C \cdot e^{-x^2/2}$

Exercice 3.40 **a)** $y(x) = \dfrac{1}{2} + C \cdot e^{-2x}$ **b)** $y(x) = \dfrac{1}{5}\left(-12 + C \cdot e^{5x}\right)$

c) $y(x) = x^2 + Cx$ **d)** $u(t) = \dfrac{1}{6}e^{5t} + C \cdot e^{-t} + 1$

e) $y(x) = \dfrac{1}{3}\left(C \cdot e^{3x^2/2} - 1\right)$ **f)** $y(x) = \dfrac{\ln(x^2+1) + C}{2x^2}$

g) $x(t) = \dfrac{t - C}{\sin(t)}$ **h)** $y(t) = \dfrac{1}{5}\left(\sin(t) - 2\cos(t)\right) + C \cdot e^{2t}$

Exercice 3.41 **a)** $y(x) = \dfrac{1}{5}\left(8 - 3e^{-5x}\right)$ **b)** $y(x) = e^{-x^2} + 1$

c) $x(t) = e^{2t}\left(\dfrac{2}{e^2} - 3 + 3t\right)$ **d)** $y(x) = \dfrac{1}{5}\left(2e^{-x} + \sin(2x) - 2\cos(2x)\right)$

Exercice 3.42 **a)** $\vartheta(t) = 20 - 20e^{-0{,}1t}$ **b)** environ 6,93 secondes **c)** 20°C

Exercice 3.43 Le 21 avril, il y aura environ 577 oiseaux.

Le 21 août, il y aura environ 2177 oiseaux.

Exercice 3.44 **a)** Solution générale: $i(t) = \dfrac{\varepsilon}{R} + C \cdot e^{-Rt/L}$

Solution particulière: $i(t) = \dfrac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} i(t) = \dfrac{\varepsilon}{R}$

c) $i(t) = \dfrac{1}{10}\left(1 - e^{-500t}\right)$

Exercice 3.45 **a)** $y(x) = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{2x}$ **b)** $y(x) = \left(C_1 \cdot x + C_2\right) \cdot e^{-3x}$

c) $y(x) = e^{-x}\left[C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x)\right]$

Exercice 3.46 $y(x) = \left(-\dfrac{1}{3}x + 1\right) \cdot e^{x/3}$