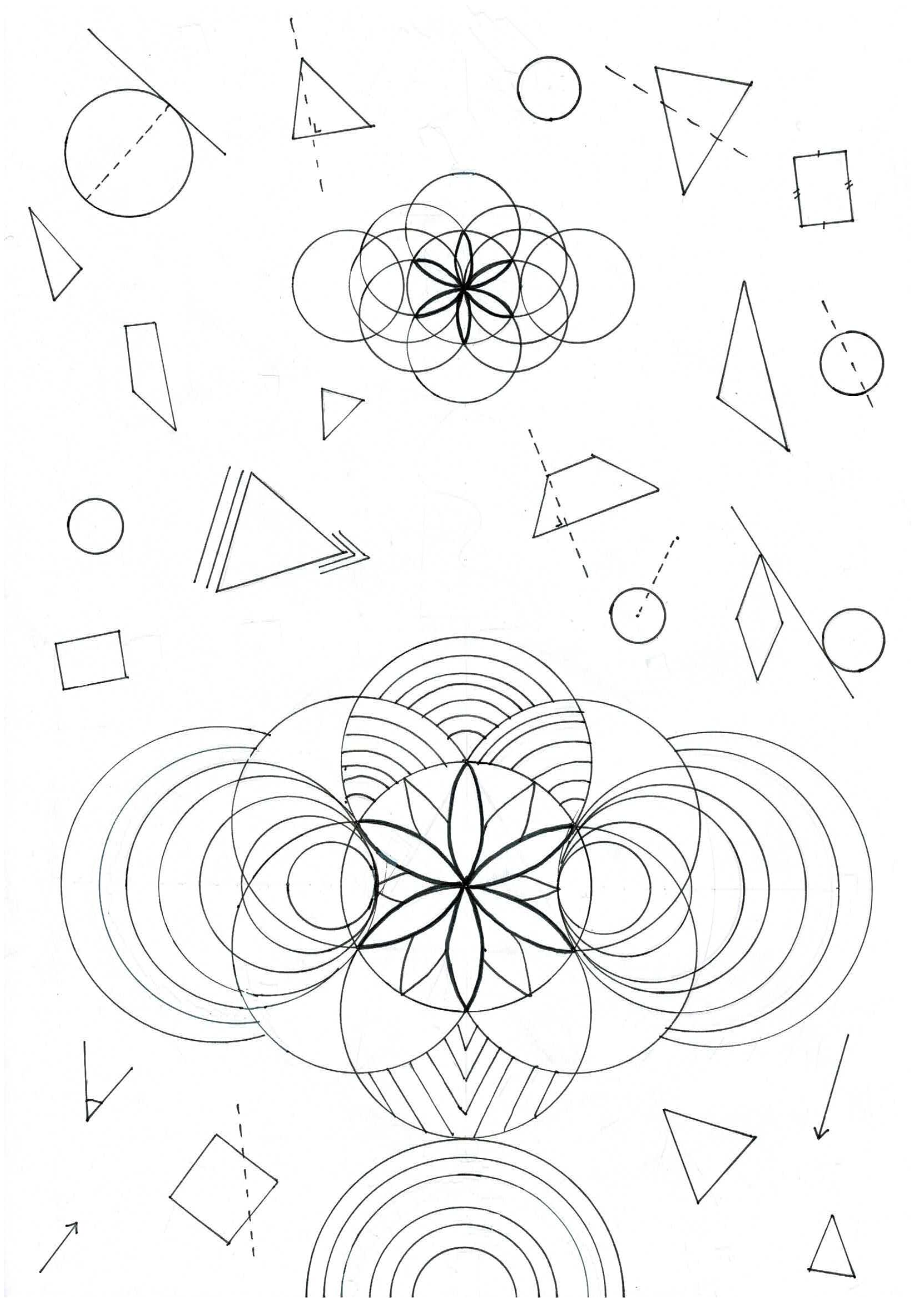
Analytische Geometrie

Carole Engelberger

20. Juni 2023



Inhaltsverzeichnis

Herzlichen Dank an Erwan Caraça, ehemaliger Schüler des Gymnase de Morges (3M14, 2019-2022), der das Bild der ersten Seite produziert hat.

Einführung

Es gibt drei Arten von Geometrie:

• Die synthetische Geometrie (oder euklidische Geometrie) ist eine Geometrie, die ihre Sätze ohne Bezug zu einem Zahlensystem auf einer axiomatischen Grundlage begründet. In dieser Geometrie werden die Sätze durch logische Vorgehen bewiesen.

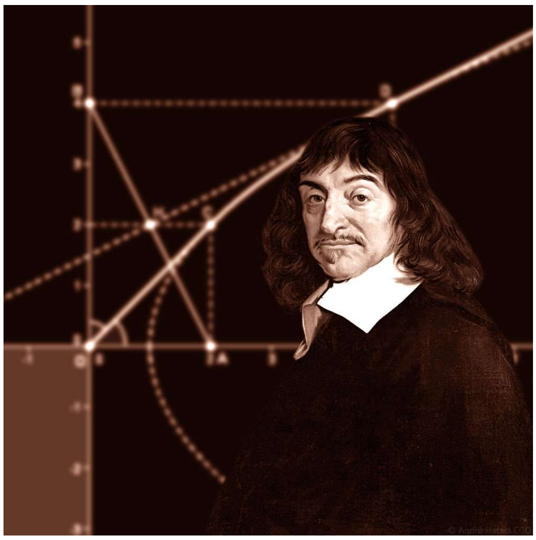
• In der vektoriellen Geometrie studiert man Vektoren. Mit Hilfe von Vektoren kann man leicht überprüfen, ob Punkte auf derselben Geraden liegen, oder ob Geraden parallel oder senkrecht zueinander sind. Der Abstand zweier Punkte ist mit ihrer Hilfe auch einfach zu berechnen.

• In der analytischen Geometrie arbeitet man mit Punkten, Geraden, Kreisen, Ebenen, Kugeln, Vektoren, usw. Man arbeitet immer mit einem kartesischen Koordinatensystem. Dies ermöglicht es, alle Übungen durch Formeln und Gleichungen zu lösen. Die analytische Geometrie ermöglicht also, in vielen Fällen, geometrische Aufgabenstellungen rein rechnerisch zu lösen, ohne die Anschauung zu Hilfe zu nehmen.

Die Verfahren der analytischen Geometrie werden in allen Naturwissenschaften angewendet, vor allem aber in der Physik, wie zum Beispiel bei der Beschreibung von Planetenbahnen. Ursprünglich befasste sich die analytische Geometrie nur mit Fragestellungen der ebenen und der räumlichen (euklidischen) Geometrie. Im allgemeinen Sinn jedoch beschreibt die analytische Geometrie affine Räume beliebiger Dimension über beliebigen Körpern.

Viele Rechnungen der analytischen Geometrie werden durch die Methoden der Vektorrechnung vereinfacht. Obwohl die gesamte analytische Geometrie ohne Vektoren erfunden wurde und natürlich immer noch ohne Vektoren praktiziert werden kann, erscheint die Verwendung von Vektoren in kartesischen Koordinatensystemen so natürlich, dass man Sie sehr häufig braucht. Deswegen heisst das erste Kapitel "Vektoren". In diesem Kapitel werden wir schauen, was Sie vom 1. Jahr noch wissen, und die wichtigsten Methoden überarbeiten.

Euklid (-325 bis -265)



Descartes (1596 - 1650)

1 Vektoren

Was Sie (normalerweise) im ersten Jahr gelernt haben:

- Definition eines Vektors:

- Verkettung von Vektoren ("Regel von Chasles")

- Unterschied zwischen Koordinaten und Komponenten

- Zwei Vektoren sind kollinear, falls

- $A(3;-1)$, $B(-2;4)$, $\overrightarrow{AB}$=

- Liegen $A(5;1)$, $B(3;2)$ und $C(-3;-5)$ auf derselben Gerade ?

- Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke AB mit $A(7;3)$ und $B(-3;9)$.

- Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunkt des Dreiecks ABC mit $A(3;-1)$, $B(-2;4)$ und $C(1;2)$.

- Die Punkte $A(2;3)$, $B(5;2)$, $C(-1;-1)$ und $D(1;-2)$ sind gegeben. Ist $ABCD$ ein Parallelogramm ?

- Die Punkte $A(2;3)$ und $B(5;-10)$ sind gegeben. Wie lang ist die Strecke AB ?

- Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \end{pmatrix}$ orthogonal ?

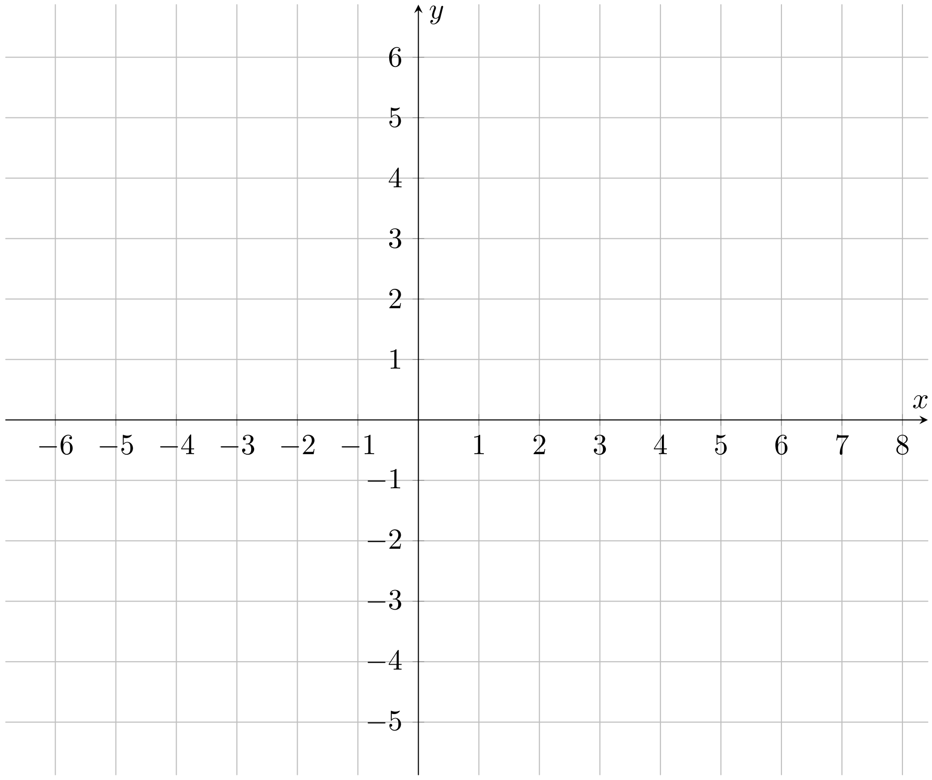
- Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \end{pmatrix}$

2 Geraden

Beispiel. Berechnen Sie für die Werte $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, die Werte von x und y:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zeichnen Sie die Punkte, die Sie berechnet haben, im Koordinatensystem:



2.1 Parameterdarstellung einer Geraden

Man kann jede Gerade durch einen Punkt A und die Richtung eines Vektors $\vec{v}$ (mit $\vec{v} \neq \vec{o}$) festlegen. Für jeden Punkt P der Geraden gilt:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{v} \qquad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

Parametrisches Gleichungssystem (kurz: Parametergleichung) : Man kann jede Gerade durch einen Punkt $A(a_1; a_2)$ und die Richtung eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ (mit $\vec{v} \neq \vec{o}$) festlegen. Für jeden Punkt $P(x; y)$ der Geraden gilt:

$$\begin{cases} x = a_1 + k \cdot v_1 \\ y = a_2 + k \cdot v_2 \end{cases} \qquad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

Beispiele. Bestimmen Sie eine Parmeterdarstellung der Geraden g und h:

a) Die Punkte $A(3;-4)$ und $B(7;1)$ liegen auf g.

b) Der Punkt $C(-1;-2)$ liegt auf h und h ist senkrecht zu g.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden a, b, c und d. Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Punkt $T(-4;3)$ auf der Geraden liegt. Zeichnen Sie dann diese Geraden in einem kartesischen Koordinatensystem.

a) Gerade a geht durch den Punkt $P(4;3)$ verläuft und hat den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b) Gerade b geht durch die Punkte $I(12;-1)$ und $J(-8;4)$.

c) Gerade c geht durch den Ursprung und ist orthogonal zum Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

d) Gerade d geht durch den Punkt $D(-4;1)$ und ist parallel zur Geraden $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ e \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.2 Kartesische Formen einer Geraden (Hauptform und Koordinatengleichung)

Es gibt zwei kartesische Formen einer Geraden.

(1) $g : y = mx + h$ ist die Hauptform.

(2) $g : ax + by + c = 0,\ \text{mit } a, b, c \in \mathbb{Z}$ ist eine Koordinatengleichung.

In der Hauptform kann die Steigung (m) und der y-Achsenabschnitt (oder Höhe) (h) leicht abgelesen werden. In der Koordinatengleichung kann ein Normalvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ abgelesen werden, der orthogonal zur Geraden g ist.

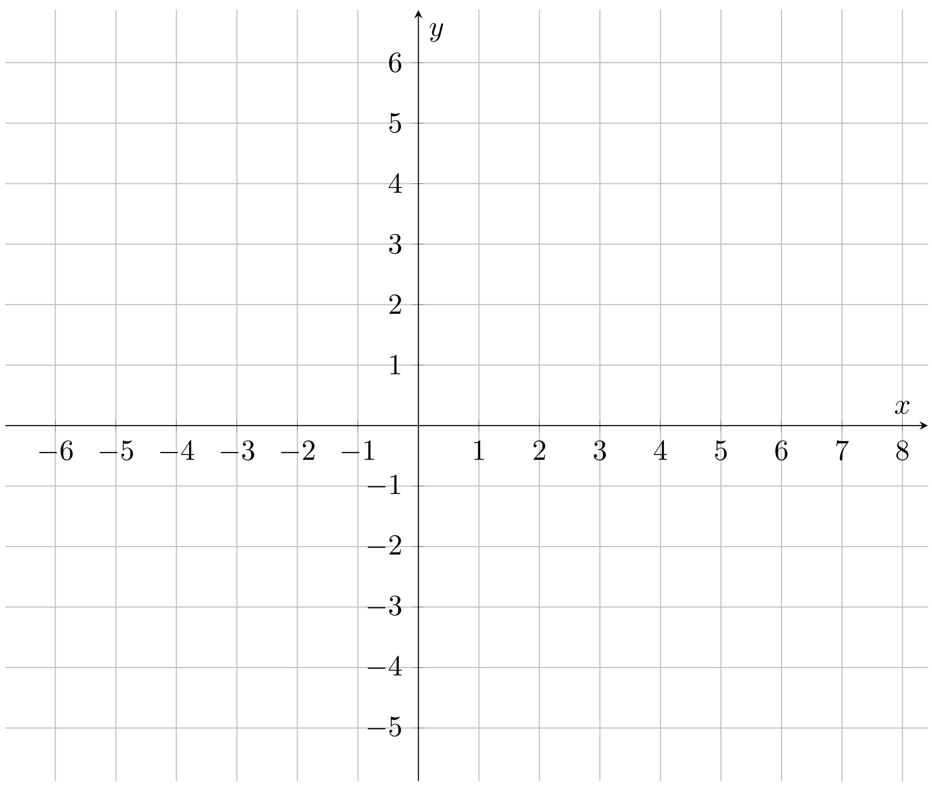
Beweis.

Beispiele. a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Geraden $g : y = \frac{5}{3}x + 1$?

b) Wie lautet die Hauptform der Geraden $h : 2x + 5y - 4 = 0$?

c) Wie lautet die Hauptform der Geraden $j : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$?

d) Berechnen Sie die Steigung, den x- und y-Achsenabschnitt der Gerade $h : 2x + 5y - 15 = 0$ und stellen Sie diese Gerade graphisch dar. Dieselbe Frage für die Gerade $i : 2x - 3y + 1 = 0$.

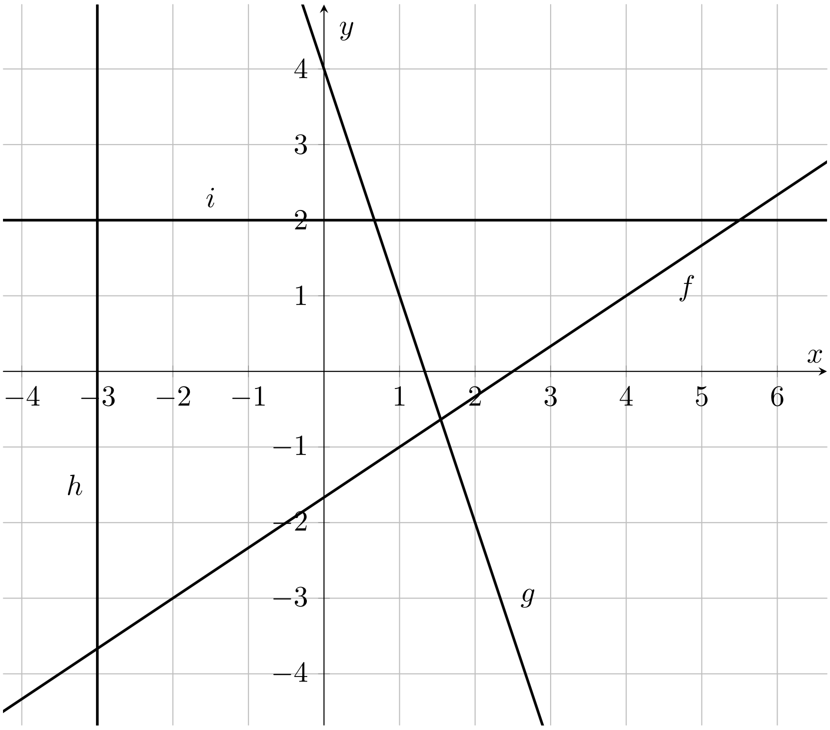


Aufgabe 2. Berechnen Sie die Steigung, den x-Achsenabschnitt und den y-Achsenabschnitt folgender Geraden. Stellen Sie diese Geraden graphisch dar.

a) $g : y = \frac{2}{3}x - 1$ **b)** $h : 5x + 2y - 8 = 0$ **c)** $i : 4x - 3y + 10 = 0$

d) $j : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$

Beispiel. Bestimmen Sie die Geradengleichung (in der Form $y = mx+h$ und $ax+by+c = 0$) folgender Geraden:



Bemerkung. Das folgende Schema zeigt anhand eines Beispiels, wie die verschiedenen Darstellungsarten von Geradengleichungen zusammenhängen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{array}{ccccc} m = \dfrac{5}{3} & \Leftrightarrow & \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} & \Leftrightarrow & \overrightarrow{v_\perp} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{n} \\ \Updownarrow & & & & \Updownarrow \\ y = \dfrac{5}{3}x + h & & & & -5x + 3y + c = 0 \end{array}$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Steigung, den y-Achsenabschnitt und eine Koordinatengleichung der Geraden, die

a) eine Steigung von $m = -\frac{1}{5}$ und durch den Punkt $A(3; -7)$ verläuft.

b) den Stützvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und Richtungsvektor $\vec{v} = -3\vec{e_1} + \vec{e_2}$ aufweist.

c) den Stützpunkt $S(-0,5\,; 0,75)$ und den Richtungsvektor $\vec{v} = -\frac{2}{3}\vec{e_1} + \frac{1}{3}\vec{e_2}$ aufweist.

d) durch die Punkte $A(7\,; 2)$ und $B(-5; 8)$ verläuft.

e) durch die Punkte $A(4/3\,; 2/5)$ und $B(3/4\,; -1/3)$ verläuft.

f) den Punkt $P(-7\,; 8)$ und den Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{e_1}$ besitzt.

g) parallel zur y-Achse ist und durch den Punkt $A(4\,; 5)$ verläuft.

Aufgabe 4. Durch einen Vergleich der Koordinaten, untersuchen Sie, ob die Gerade AB senkrecht, waagerecht oder schief ist.

a) $A(2; -3)$ $B(5; -3)$ **b)** $A(2; -3)$ $B(2; -8)$

c) $A(-5; -3)$ $B(-5; -3)$ **d)** $A(2; -3)$ $B(3; -5)$

e) $A(0; 0)$ $B(0; 1)$ **f)** $A(1; -2)$ $B(3; 4)$

2.3 Gegenseitige Lage zweier Geraden

Zwei Geraden sind parallel, falls

Zwei Geraden sind identisch, falls

Zwei Geraden sind senkrecht zueinander, falls...

Aufgabe 5. Sind die Geraden g und h parallel, identisch, senkrecht zueinander ?

a) $g : y = \frac{2}{3}x + 1$ und $h : 2x - 3y + 7 = 0$

b) $g : y = \frac{2}{3}x + 1$ und $h : 6x + 4y + 7 = 0$

c) $g : y = \frac{2}{3}x + 1$ und $h : 2x - 3y + 3 = 0$

d) $g : y = \frac{2}{3}x + 1$ und $h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$

Beispiel. Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g und h

a) $g : y = 3x + 5$ und $h : 4x - 6y + 1 = 0$

b) $g : 2x + y + 4 = 0$ und $h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$

Aufgabe 6. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g und h:

a) $g : 4x - 3y = 6$ $\qquad$ $h : 6x + y = 20$

b) $g : 3x - 7y = 57$ $\qquad$ $h : y = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$

c) $g : x + y = 3$ $\qquad$ $h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$

d) $g : 2x + 3y = 15$ $\qquad$ $h : 6x - 2y + 7 = 0$

e) $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $k, l \in \mathbb{R}$

f) $g : 2x + 5y = 13$ $\qquad$ $h : \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 2 + 3k \end{cases}$ mit $k \in \mathbb{R}$

Beispiel. Eines Dreiecks ABC sind folgende Informationen bekannt: der Punkt B, die Mittelsenkrechte m der Seite BC, eine Gerade g, die parallel zur Seite AC ist, und die Gleichung der Geraden AB:

$$B(0;-2) \qquad m: 3x - y - 12 = 0 \qquad g: 8x + 3y - 57 = 0 \qquad AB: y = 2x - 2$$

Berechnen Sie die Koordinaten von A und C, und bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden BC und AC.

2.4 Schnittwinkel zweier Geraden

Um den Schnittwinkel zweier Geraden zu berechnen, muss man den Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren berechnen.

Beispiel. Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden g und h:

$$g: 2x - 5y + 12 = 0 \qquad\qquad h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 7. Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Geraden g und h:

a) $g: 3x + y - 5 = 0$ $\qquad$ $h: y = \frac{5}{3}x + 2$

b) $g: y = 3x - 1$ $\qquad$ $h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$

c) $g: y = 3x + 4$ $\qquad$ h ist die x-Achse

d) g ist die y-Achse $\qquad$ $h: x + y = 0$

Aufgabe 8. Bestimmen Sie die Gleichung der Normale n zur Gerade d, die durch den Punkt P verläuft.

a) $d: 4x - 3y + 7 = 0$ und $P(-7; 8)$.

b) $d: -3x + 5y + 15 = 0$ und $P(-2; 3)$.

Aufgabe 9. Von einem Viereck (quadrilatère) $ABCD$, das in einem Koordinatensystem liegt, sind die Gleichungen zweier Seiten gegeben. Bestimmen Sie die Koordinaten der Ecken A, B, C und D.

$AB: y + 3 = 0$ $\qquad$ $BC: x - 11 = 0$ $\qquad$ $CD: y + \frac{3}{7}x - 11 = 0$ $\qquad$ $AD: 3y - 4x + 4 = 0$

Aufgabe 10. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Mittelsenkrechte m der Strecke AB mit $A(2; 5)$ und $B(-4; 17)$.

Aufgabe 11. Gegeben sind die Geraden g und h:

$$g: tx - 5y + 12 = 0 \qquad h: 8x - (t + 6)y = 4$$

a) Für welchen Wert von t ist die Steigung der Gerade g gleich $\frac{1}{2}$?

b) Für welchen Wert von t sind die Geraden g und h parallel ?

c) Für welchen Wert von t sind die Geraden g und h senkrecht zueinander ?

Aufgabe 12. Gegeben ist die Gerade $g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie

a) m, so dass sich die Geraden g und $h: y = mx - 2$ nicht schneiden.

b) q, so dass sich die Geraden g und $h: y = x - q$ im Punkt $P(-4; ?)$ schneiden.

c) die Gleichung der senkrechten Geraden zu g, die den gleichen y-Achsenabschnitt aufweist wie g.

Aufgabe 13. Gegeben sind drei Eckpunkte $A(1;2)$, $B(6;0)$, $C(9;2)$ eines Parallelogramms. Bestimmen Sie die Gleichungen der Seiten des Parallelogramms, sowie die Koordinaten von D.

Aufgabe 14. Gegeben sind die Gleichungen zweier Seiten eines Parallelogramms: $x - 2y = 4$ bzw. $x + 5y = -24$, sowie die Gleichung einer Diagonale: $d_1 : 2x + 3y = -13$.

Bestimmen Sie die Gleichung der zweiten Diagonale, sowie die Koordinaten der Eckpunkten des Parallelogramms.

Aufgabe 15. Gegeben sind die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks ABC:

$$a : 2x - 3y = -5 \qquad b : 5x - 2y = 26 \qquad c : 3x + y = 9$$

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Ecken A, B und C des Dreiecks.

b) Berechnen Sie die Innenwinkel des Dreiecks.

c) Bestimmen Sie die Gleichungen der Seitenhalbierenden dieses Dreiecks.

Aufgabe 16. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion P' des Punktes P auf die Gerade g:

a) $P(-5;10)$ und $g : 3x - 5y + 6 = 0$

b) $P(3;4)$ und $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit einer Zahl $k \in \mathbb{R}$

Aufgabe 17. Von einem Dreieck ABC sind folgende Informationen gegeben:

- Die Koordinaten von C sind: $C(4;-1)$
- Eine Gleichung der Seitenhalbierende durch A ist $s_A : 2x + 3y = 0$
- Eine Gleichung der Höhe durch A ist $h_A : 2x - 3y + 12 = 0$

Berechnen Sie die Koordinaten von A und B und die Gleichungen aller Seiten des Dreiecks.

Aufgabe 18. Gegeben sind die Gleichungen zweier Seiten eines Rechtecks: $x = 2y$ bzw. $2y - x = 15$, sowie die Gleichung einer Diagonale: $7x + y = 15$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der zweiten Diagonale, sowie die Koordinaten der Eckpunkte des Rechtecks.

Aufgabe 19. Von einem Dreieck ABC kennt man die Eckpunkte $A(3\ ;\ 1)$ und $B\left(\frac{63}{5}; \frac{41}{5}\right)$ und den Schnittpunkt $H(4\ ;\ 8)$ der Höhengeraden.
Bestimmen Sie den dritten Eckpunkt C des Dreiecks.

Aufgabe 20. Welcher Punkt der Geraden $g : 3x - 2y - 6 = 0$ hat von den Punkten $A(-3\,;0)$ und $B(-1\,;4)$ denselben Abstand?

Aufgabe 21. Gegeben sind eine Gerade $g : 2x - 3y + 6 = 0$ und zwei Punkte $P(1\,;7)$, $Q(1\,;-6)$. Bestimme Sir ihre Spiegelpunkte bezüglich g.

Aufgabe 22. Zeigen Sie, dass sich bei einem Dreieck ABC mit $A(1\,;4)$, $B(9\,;0)$ und $C(10\,;7)$ die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten in einem Punkt M schneiden. Bestimmen Sie dessen Koordinaten. Weisen Sie nach, dass die Strecken $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ und $\overline{CM}$ gleich lang sind. Was folgt daraus?

2.5 Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden

Beispiel. Beschreiben Sie ihr Vorgehen, um den Abstand zwischen dem Punkt $P(3;4)$ und der Geraden $g : y = \frac{3}{4}x - 1$ zu berechnen:

Der Abstand zwischen einem Punkt $P(p_1;p_2)$ und einer Geraden $g : ax + by + c = 0$ berechnet man folgenderweise:

$$\delta(P;g) = \frac{|a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Beispiel. Bestimmen Sie den Abstand zwischen dem Punkt P und der Gerade g mit:

$$P(3;-1) \qquad\qquad g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ mit einer Zahl } k \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 23. Bestimmen Sie den Abstand zwischen dem Punkt P und der Gerade g mit:

a) $P(3;8)$ $\quad g : 3x + y - 5 = 0$

b) $P(5;-2)$ $\quad g : y = \frac{2}{3}x - 14$

c) $P(1;-1)$ $\quad g$ verläuft durch die Punkte $A(2;4)$ und $B(-1;6)$.

Aufgabe 24. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit $A(1;2)$, $B(8;-1)$ und $C(6;5)$.

Aufgabe 25. Die Geraden $g : 3x-4y+10 = 0$ und $h : 3x-4y+20 = 0$ verlaufen zueinander parallel.

a) Berechnen Sie den Abstand der beiden Geraden.

b) Wie lautet die Gleichung der Geraden, die denselben Abstand von g und h hat ?

Aufgabe 26. Berechnen Sie den Flächeninhalt eines durch einen Eckpunkt $A(2;-5)$ und eine Seite $g : x = 2y + 7$ definierten Quadrats.

Aufgabe 27. Ein Rechteck wird durch seinen Eckpunkt $A(-2;1)$ und die Gleichungen zweier zueinander nicht parallelen Seiten $g : 3x = 2y + 5$ und $h : 4x + ay + 14 = 0$ definiert. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

Beispiel. Bestimmen Sie die Gleichungen zweier Geraden, die den Abstand 1 von der Geraden $g : 4x - 3y = 8$ haben.

Beispiel. Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, die auf der Gerade $h : x + y = 2$ liegen und den Abstand $\sqrt{5}$ von der Geraden $g : 2x - y + 6 = 0$ haben.

Aufgabe 28. Berechnen Sie die Gleichungen zweier Geraden, die von der Geraden $g : x - y + 12 = 0$ einen Abstand $\sqrt{50}$ haben.

Aufgabe 29. Gegeben sind drei Geraden:

$$d : x + y - 1 = 0 \qquad g : 3x + 4y = 0 \qquad h : x + 5 = 0$$

Berechnen Sie die Koordinaten von P, so dass: $P \in d$ und $\delta(P; g) = 2 \cdot \delta(P; h)$.

Aufgabe 30. Gegeben sind die Punkte $A(-2; y)$, $B(x\,; 1)$, $C(-5; 2)$ und die Gerade $g : x - y - 1 = 0$. Man weiss, dass A und B auf g liegen.

a) Berechnen Sie den Abstand zwischen C und g.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

c) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, die auf $h : y = 5x - 3$ liegen und den Abstand $3\sqrt{2}$ von g haben.

2.6 Winkelhalbierende

Definition. Die Winkelhalbierenden sind die Menge aller Punkte der Ebene, welche von zwei sich schneidenden Geraden den gleichen Abstand haben.

Eigenschaft. *Die Winkelhalbierenden sind zwei Geraden.*

Die Gleichungen der Winkelhalbierenden der Geraden $g : ax + by + c = 0$ und $h : a'x + b'y + c' = 0$ bestimmt man folgenderweise:

$$w_1, w_2 : \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}}$$

Beweis.

Beispiel. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Winkelhalbierenden der Geraden g und h:

$$g : x + y - 12 = 0 \qquad h : 7x + y - 5 = 0$$

Aufgabe 31. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Winkelhalbierenden der Geraden g und h:

a) $g: 2x - 5y + 10 = 0$ $\qquad$ $h: 5x - 2y + 13 = 0$

b) $g: y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ $\qquad$ $h: 8x + 6y - 3 = 0$

c) $g: 9x + 9y - 5 = 0$ $\qquad$ $h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit einer Zahl $k \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 32. Berechnen Sie die Gleichung der Winkelhalbierenden des stumpfen (obtus) Schnittwinkels der Geraden $g: x = 3y - 5$ und $h: y = 3x + 15$.

Aufgabe 33. Bestimmen Sie die Gleichung der Winkelhalbierenden von $d: 2x = 3y + 5$ und $h: 4y = 6x + 7$, die die negative Hälfte der x-Achse schneidet.

Aufgabe 34. Gegeben sind $d: y = x$ und $g: 3x + 4y - 12 = 0$. Bestimmen Sie einen Punkt P von d, der den gleichen Abstand von der Geraden g und von der x-Achse aufweist.

Aufgabe 35. Bestimmen Sie eine Gleichung aller inneren Winkelhalbierenden des Dreiecks $A(-5; -5)$, $B(-5, 10)$, $C(15; -5)$.

---

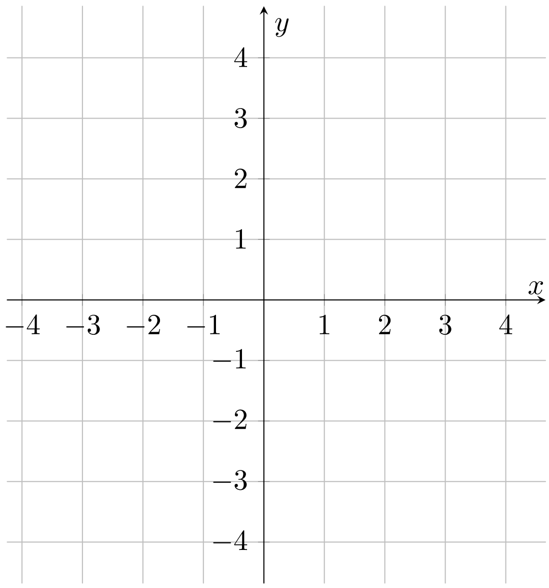
3 Kreise

Definition. Die Menge aller Punkte von $\mathbb{R}^2$, die von einem Punkt M denselben Abstand haben, heisst Kreis. M ist der Mittelpunkt des Kreises und der Abstand ist der Radius R des Kreises.

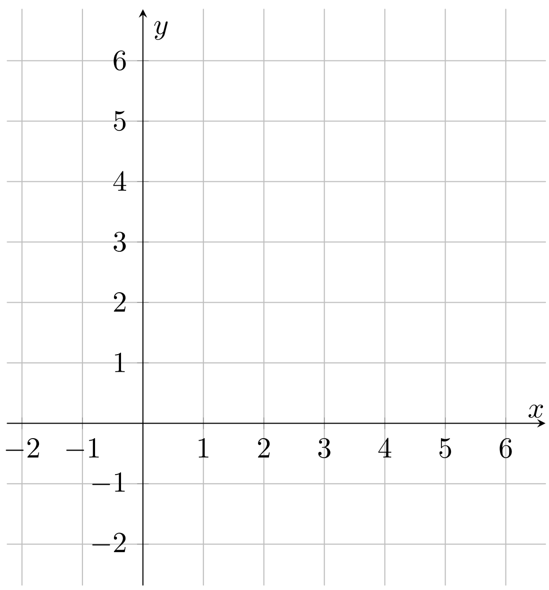
3.1 Gleichung eines Kreises

Beispiel. Wie erstellt man die Gleichung eines Kreises ?

a) Bestimmen Sie eine Gleichung des Kreises mit Mittelpunkt $M(0;0)$ und Radius 3:



b) Bestimmen Sie eine Gleichung des Kreises mit Mittelpunkt $M(\alpha;\beta)$ und Radius R:



Beispiel. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises mit der Gleichung:

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y = 5$$

Aufgabe 36. Untersuchen Sie, ob durch die folgenden Gleichungen ein Kreis beschrieben wird. Falls ja, bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$

b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

d) $x^2 + y^2 + x = 0$

e) $x^2 + y^2 + 6x + 16y = 7$

Beispiel. $A(-3; 4)$ und $B(5; -2)$ liegen auf einem Kreis mit Radius $R = \sqrt{50}$. Bestimmen Sie eine Gleichung dieses Kreises.

Aufgabe 37. Bestimmen Sie die Gleichung des Kreises

a) mit Radius 7 und dem Mittelpunkt $C(2; -3)$.

b) der durch den Urspung verläuft und den Mittelpunkt $C(6; -8)$ besitzt.

c) der den Durchmesser [AB] hat, mit $A(3; 2)$ und $B(-1; 6)$.

d) mit dem Mittelpunkt $C(1; -1)$ und der Geraden $d : 5x + 9 = 12y$ als Tangente.

e) der durch die Punkte $A(3; 1)$ und $B(-1; 3)$ verläuft und dessen Mittelpunkt auf der Geraden $d : 3x = y + 2$ liegt.

f) der die Gerade $d : x + y = 4$ im Punkt $T(1; 3)$ berührt, und dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt.

g) der durch die Punkte $A(-1; 5)$, $B(-2; -2)$ und $C(5; 5)$ verläuft.

Aufgabe 38. Bestimmen Sie die Gleichungen der Kreise $\Gamma_{1,2}$, so dass die Geraden $a : 2x = 3y + 10$ und $b : 2y = 3x + 5$ Tangenten an $\Gamma_{1,2}$ sind und deren Mittelpunkte auf der Geraden $m : 4x - 5y = 3$ liegen.

Aufgabe 39. Bestimmen Sie die Gleichungen der Kreise $\Gamma_{1,2}$ mit dem Radius $R = \sqrt{5}$, so dass die Gerade $d : x - 2y = 1$ im Punkt $T(3; ?)$ eine Tangente an $\Gamma_{1,2}$ ist.

Aufgabe 40. Bestimmen Sie die Gleichung eines Kreises Γ, so dass die Geraden $3y = 4x + 10$ und $4x = 3y + 30$ Tangenten an Γ sind, und dessen Mittelpunkt auf der Geraden $2x + y = 0$ liegt.

Aufgabe 41. Bestimmen Sie die Gleichungen der Kreise $\Gamma_{1,2}$, so dass die Geraden $g : y = 7x - 5$ und $h : x + y + 13 = 0$ Tangenten an $\Gamma_{1,2}$ sind. Einer der Berührpunkte ist $T(1; 2)$.

Aufgabe 42. Bestimmen Sie die Gleichungen der Kreise $\Gamma_{1,2}$, so dass die drei Geraden $3y = 4x - 10$, $3x = 4y + 5$ und $3x - 4y = 15$ Tangenten an $\Gamma_{1,2}$ sind.

Aufgabe 43. Ein Kreis geht durch die Punkte $A(1; 1)$, $B(1; -1)$ und $C(2; 0)$. Bestimmen Sie drei Unbekannte a, b und c der Kreisgleichung $\Gamma : x^2+y^2+ax+by+c = 0$ mit Hilfe eines Gleichungssytems.

3.2 Gegenseitige Lage...

3.2.1 Eines Punktes bezüglich eines Kreises

3.2.2 Einer Geraden bezüglich eines Kreises

Beispiel. Bestimmen Sie die Schnittpunkte folgender Kreisen:

$$\Gamma : x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0 \qquad\qquad g : x - 2y + 1 = 0$$

3.2.3 Zweier Kreise

Beispiel. Bestimmen Sie die Schnittpunkte folgender Kurven:

$$\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 2x - 30y + 146 = 0 \qquad \Gamma_2 : x^2 + y^2 - 6x - 22y + 30 = 0$$

Aufgabe 44. Bestimmen Sie die Lage des Punktes $B(3;9)$ bezüglich des Kreises $\Gamma : x^2 + y^2 - 26x + 30y = -313$. Berechnen Sie den kürzesten Abstand zwischen B und einem Punkt von Γ.

Aufgabe 45. Untersuchen Sie, ob die Gerade Tangente, Sekante oder Passante des Kreises ist:

a) $g : y = 2x - 3$ $\qquad \Gamma : x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3$

b) $g : x - 2y - 1 = 0$ $\qquad \Gamma : x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$

c) $g : y = x + 10$ $\qquad \Gamma : x^2 + y^2 = 1$

Aufgabe 46. Bestimmen Sie die Zahl c so, dass die Gerade $g : 3x + 4y + c = 0$ den Kreis $\Gamma : x^2 + 2x + y^2 = 224$ berührt.

Aufgabe 47. Für welche reellen Zahlen c sind die zueinander parallelen Geraden $g_c : x + 2y + c = 0$ Sekanten, Tangenten oder Passanten des Kreises $\Gamma : x^2 + y^2 = 5$?

Aufgabe 48. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreis:

a) $\Gamma : x^2 + y^2 = 25$ $\qquad$ $g : 2x - y - 5 = 0$

b) $\Gamma : x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ $\qquad$ $g : 3x - 4y - 19 = 0$

Aufgabe 49. Zeigen Sie, dass die Kreise $\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 49$ und $\Gamma_2 : x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ nur einen gemeinsamen Punkt A besitzen. Bestimmen Sie die Koordinaten von A.

Aufgabe 50. Bestimmen Sie die Länge der Sehne (corde), die die Kreise Γ_1 und Γ_2 gemeinsam haben.

$$\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 10x + 10y \quad \text{und} \quad \Gamma_2 : x^2 + y^2 + 6x + 2y = 40$$

Aufgabe 51. Bestimmen Sie die Gleichung des Durchmessers (diamètre) des Kreises $\Gamma : x^2 + y^2 + 4x - 6y = 17$, der die Gerade $g : 5x + 2y = 13$ rechtwinklig schneidet.

Aufgabe 52. Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Kreises $x^2 + y^2 + 15x - 12y + 36 = 0$ mit den Koordinatenachsen.

3.3 Tangenten

3.3.1 Tangente in einem gegebenen Punkt des Kreises

Beispiel. Zeigen Sie, dass der Punkt T auf dem Kreis Γ liegt. Bestimmen Sie dann die Gleichung der Tangente an Γ im Berührpunkt T:

$$\Gamma : x^2 + y^2 - 6x + 10y + 29 = 0 \qquad T(2; -3)$$

Aufgabe 53. Zeigen Sie, dass der Punkt T auf dem Kreis Γ liegt. Bestimmen Sie dann die Gleichung der Tangente an Γ im Berührpunkt T:

a) $T(-1; 2)$ $\quad$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 5$

b) $T(-5; 7)$ $\quad$ $\Gamma : (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

c) $T(0; 0)$ $\quad$ $\Gamma : x^2 + y^2 = 3x - 7y$

d) $T(-1; 2)$ $\quad$ $\Gamma : x^2 + y^2 - 2x + 6y = 19$

e) $T(2; 3)$ $\quad$ $\Gamma : 2x^2 + 2y^2 = x + 4y + 12$

Aufgabe 54. Stellen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P(-5; y), y < 0$, des Kreises $\Gamma : x^2 + y^2 + 16x - 4y + 43 = 0$ auf.

3.3.2 Tangenten an einen Kreis mit vorgegebenr Steigung

Beispiel. Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten des Kreises $\Gamma : (x+1)^2 + y^2 = 4$ die parallel zur Geraden $g : 3x + 4y = 2$ verläufen.

Aufgabe 55.

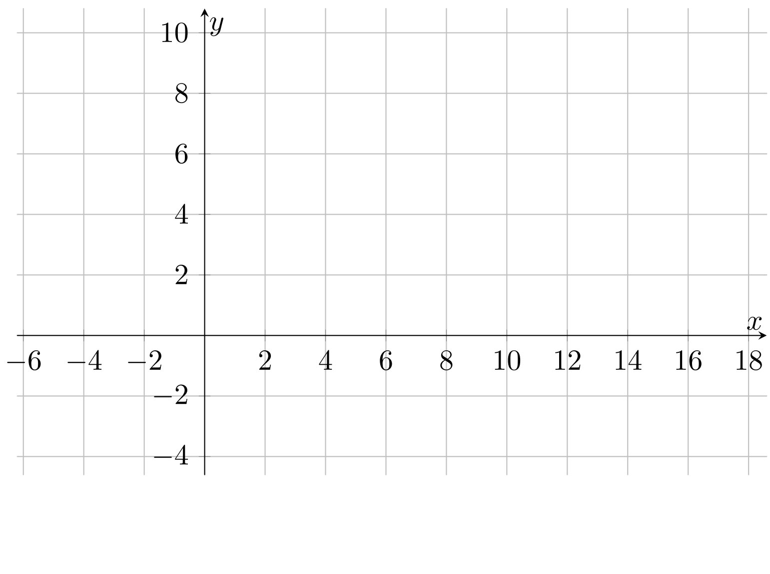
a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten des Kreises $\Gamma : x^2 + y^2 + 10x = 2y - 6$, die parallel zur Geraden $g : 2x + y = 7$ verlaufen.

b) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten des Kreises $\Gamma : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, die senkrecht zur Geraden $g : x = 2y + 345$ sind.

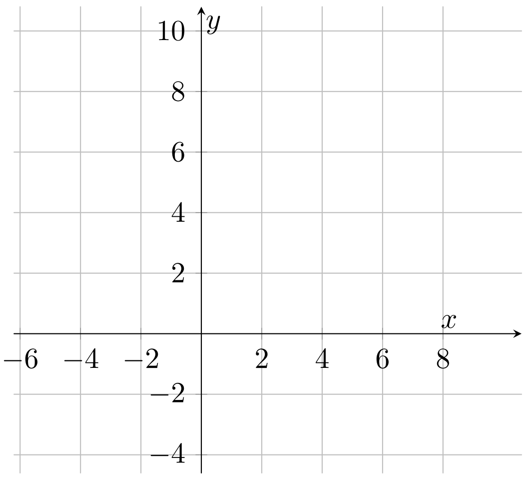
Aufgabe 56. Gegeben sind die Gerade $g : 3x + 4y - 34 = 0$ und der Kreis $\Gamma : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$. Zeigen Sie, dass g eine Tangente des Kreises Γ ist. Bestimmen Sie die Gleichungen der drei Geraden, die zusammmen mit g ein Tangentenquadrat (carré exinscrit) von Γ bilden.

3.3.3 Kreistangenten durch einen gegebenen Punkt ausserhalb des Kreises

Beispiel. Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten des Kreises $\Gamma : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$, die durch den Punkt $A(16; -3)$ gehen.



Beispiel. Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten des Kreises $\Gamma : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$, die durch den Punkt $A(-4; 9)$ gehen.



Aufgabe 57. Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten des Kreises Γ, die durch den Punkt A gehen.

a) $\Gamma : x^2 + y^2 = 19 - 2x$ $\quad A(1; 6)$

b) $\Gamma : x^2 + y^2 = 5$ $\quad A\left(\frac{5}{3}; -\frac{5}{3}\right)$

c) $\Gamma : x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$ $\quad A(6; 5)$

Aufgabe 58. Der Inkreis des Dreiecks ABC hat als Mittelpunkt den Ursprung $O(0; 0)$. Berechnen Sie die Koordinaten der Ecke C, mit $A(-15; -5)$ und $B(1; 7)$.

---

4 Lösungen

Aufgabe 1. $k \in \mathbb{R}$

a) $a : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, T liegt nicht auf a.

b) $b : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $b : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, T liegt auf b, $k = 4$.

c) $c : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, T liegt nicht auf c.

d) $d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, T liegt auf d, $k = 2$.

Aufgabe 2.

	Steigung (m)	x-Achsenabschnitt (z)	y-Achsenabschnitt (h)
a)	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	-1
b)	$-\frac{5}{2}$	$\frac{8}{5}$	4
c)	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{10}{3}$
d)	-4	$\frac{3}{2}$	6

Aufgabe 3.

	Steigung (m)	y-Achsenabschnitt (h)	Koordinatengleichung
a)	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{32}{5}$	$b : x + 5y + 32 = 0$ oder $b : y = -\frac{1}{5}x - \frac{32}{5}$
b)	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$a : x + 3y - 7 = 0$ oder $a : y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$
c)	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$c : x + 2y - 1 = 0$ oder $c : y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
d)	$-\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$	$d : x + 2y - 11 = 0$ oder $d : y = -\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$
e)	$\frac{44}{35}$	$-\frac{134}{105}$	$e : 132x - 105y - 134 = 0$ oder $e : y = \frac{44}{35}x - \frac{134}{105}$
f)	0	8	$f : y - 8 = 0$ oder $f : y = 8$
g)	$\emptyset$	$\emptyset$	$g : x - 4 = 0$ oder $g : x = 4$

Aufgabe 4.

a) waagerecht **b)** senkrecht **c)** es ist nicht eine Gerade **d)** schief
e) senkrecht **f)** schief

Aufgabe 5.

a) parallel **b)** senkrecht zueinander **c)** identisch
d) weder parallel, noch identisch, noch senkrecht zueinander

Aufgabe 6.

a) $S(3;2)$ **b)** $S(5;-6)$ **c)** $S(26;-23)$ **d)** $S\left(\frac{9}{22};\frac{52}{11}\right)$ **e)** $S(3;1)$
f) $S\left(\frac{12}{13};\frac{29}{13}\right)$

Aufgabe 7.

a) $\alpha = 49.40°$ **b)** $\alpha = 38.99°$ **c)** $\alpha = 71.57°$ **d)** $\alpha = 45°$

Aufgabe 8.

a) $n : 3x + 4y - 11 = 0$ **b)** $n : 5x + 3y + 1 = 0$

Aufgabe 9.

$A\left(-\frac{5}{4};-3\right)$ $B(11;-3)$ $C\left(11;\frac{44}{7}\right)$ $D(7;8)$

Aufgabe 10.

$m : x - 2y + 23 = 0$

Aufgabe 11.

a) $t = \frac{5}{2}$ **b)** $t = 4$ oder $t = -10$ **c)** $t = -\frac{30}{13}$

Aufgabe 12.

a) $m = -\frac{1}{3}$ **b)** $q = -\frac{17}{3}$ und $P\left(-4;\frac{5}{3}\right)$ **c)** $s : y = 3x + \frac{1}{3}$

Aufgabe 13.

$D(4;4)$ $AB : 2x + 5y - 12 = 0$ $BC : 2x - 3y - 12 = 0$ $CD : 2x + 5y - 28 = 0$
$AD : 2x - 3y + 4 = 0$

Aufgabe 14.

$A(-2;-3)$, $B(-4;-4)$, $C(1;-5)$, $D(3;-4)$, $d_2 : y = -4$.

Aufgabe 15.

a) $A(4;-3)$, $B(2;3)$, $C(8;7)$

b) $\alpha = 40,24°$, $\beta = 105,26°$, $\gamma = 34,51°$

c) $s_A : 8x - y - 35 = 0$, $s_B : x + 4y - 14 = 0$, $s_C : 7x - 5y - 21 = 0$

Aufgabe 16.

a) $P'\left(\frac{7}{34}; \frac{45}{34}\right)$

b) $P'\left(\frac{13}{5}; \frac{21}{5}\right)$

Aufgabe 17.

$A(-3;2)$, $B(8;-7)$, $AB : 9x + 11y + 5 = 0$, $BC : 3x + 2y - 10 = 0$, $AC : 3x + 7y - 5 = 0$.

Aufgabe 18.

$d_2 : x + y - 6 = 0$, $A(1;8)$, $B(-1;7)$, $C(2;1)$, $D(4;2)$.

Aufgabe 19.

$C\left(\frac{14}{5}; \frac{48}{5}\right)$

Aufgabe 20.

$P(2;0)$

Aufgabe 21.

$P'(5;1)$, $Q'(-7;6)$

Aufgabe 22.

$M(6;4)$, $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = 5$, M ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks.

Aufgabe 23.

a) $\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$ **b)** $2\sqrt{13}$ **c)** $\dfrac{17\sqrt{13}}{13}$

Aufgabe 24.

$F = 18E^2$

Aufgabe 25.

a) $A = 2$ **b)** $i : 3x - 4y + 15 = 0$

Aufgabe 26.

$F = 5u^2$

Aufgabe 27.

$F = 6u^2$

Aufgabe 28.

$h_1 : x - y + 2 = 0$ $h_2 : x - y + 22 = 0$

Aufgabe 29.

$P_1(-6; 7)$ $P_2\left(-\frac{46}{11}; \frac{57}{11}\right)$

Aufgabe 30.

a) $4\sqrt{2}$ **b)** $F = 16u^2$ **c)** $P_1(-1; -8)$ $P_2(2; 7)$

Aufgabe 31.

a) $w_1 : x + y + 1 = 0$ $w_2 : 7x - 7y + 23 = 0$

b) $w_1 : 2x - 2y - 5 = 0$ $w_2 : 14x + 14y - 1 = 0$

c) $w_1 : 9x + 9y - 34 = 0$ w_2 existiert nicht weil g und h parallel sind.

Aufgabe 32.

$w_1 : x + y + 5 = 0$

Aufgabe 33.

$w_1 : 2x + 2y + 17 = 0$

Aufgabe 34.

$P_1(1; 1)$ $P_2(6; 6)$

Aufgabe 35.

$w_A : y = x$ $w_B : y = -2x$ $w_C : y = -\frac{1}{3}x$

Aufgabe 36.

a) $M(1;-2) \qquad R = 5$

b) Diese Gleichung ist keine Kreisgleichung.

c) Es ist ein Punkt $P(-2;1)$

d) $M\left(-\frac{1}{2};0\right) \qquad R = \frac{1}{2}$

e) $M(-3;-8) \qquad R = 4\sqrt{5}$

Aufgabe 37.

a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$

b) $(x-6)^2 + (y+8)^2 = 100$

c) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$

d) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

e) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$

f) $(x+2)^2 + y^2 = 18$

g) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$

Aufgabe 38.

$\Gamma_1 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{81}{13} \qquad \Gamma_2 : (x+8)^2 + (y+7)^2 = \frac{25}{13}$

Aufgabe 39.

$\Gamma_1 : (x-4)^2 + (y+1)^2 = 5 \qquad \Gamma_2 : (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$

Aufgabe 40.

$\Gamma : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$

Aufgabe 41.

$\Gamma_1 : (x+6)^2 + (y-3)^2 = 50 \qquad \Gamma_2 : (x-29)^2 + (y+2)^2 = 800$

Aufgabe 42.

$\Gamma_1 : (x+10/7)^2 + (y+25/2)^2 = 1 \qquad \Gamma_2 : (x-30/7)^2 + (y-5/7)^2 = 1$

Aufgabe 43.

$\Gamma : x^2 + y^2 - 2x = 0$

Aufgabe 44.

B ist ausserhalb des Kreises. Der kürzeste Abstand ist 17.

Aufgabe 45.

a) Sekante

b) Tangente

c) Passante

Aufgabe 46.

$c_1 = 78$ $\qquad$ $c_2 = -72$

Aufgabe 47.

Die Gerade ist eine Sekante falls $-5 < c < 5$, Tangente falls $c = \pm 5$, Passante falls $|c| > 5$.

Aufgabe 48.

a) $S_1(4; 3)$ $\qquad$ $S_2(0; -5)$

b) $S_1(5; -1)$

Aufgabe 49.

$A(21/5; 28/5)$

Aufgabe 50.

$l = 10$

Aufgabe 51.

$d : 2x - 5y + 19 = 0$

Aufgabe 52.

$S_1(-12; 0)$ $\qquad$ $S_2(-3; 0)$ $\qquad$ $S_3(0; 6)$

Aufgabe 53.

a) $t : x - 2y + 5 = 0$

b) $t : 3x - 4y + 43 = 0$

c) $t : 3x - 7y = 0$

d) $t : 2x - 5y + 12 = 0$

e) $t : 7x + 8y - 38 = 0$

Aufgabe 54.

$t: 3x - 4y + 7 = 0$

Aufgabe 55.

a) $t_1: 2x + y - 1 = 0 \qquad t_2: 2x + y + 19 = 0$

b) $t_1: 2x + y - 5 = 0 \qquad t_2: 2x + y + 5 = 0$

Aufgabe 56.

$g_1: 3x + 4y + 16 = 0 \qquad g_2: 4x - 3y + 38 = 0 \qquad g_3: 4x - 3y - 12 = 0$

Aufgabe 57.

a) $t_1: 2x + y - 8 = 0 \qquad t_2: x - 2y + 11 = 0$

b) $t_1: x - 2y - 5 = 0 \qquad t_2: 2x - y - 5 = 0$

c) $t_1: x = 6 \qquad t_2: 12x - 35y + 103 = 0$

Aufgabe 58.

$C(10; -5)$

Literatur

[1] Lambacher Schweizer 9/10, *Grundlagen der Mathematik für Schweizer Maturitätsschulen*, Klett und Balmer Verlag Zug, 2011

[2] Elemente der Mathematik 12/13, *Grundkurs Nordrhein-Westfalen*, Schroedel, 2000

[3] dtv-Atlas zur Mathematik, *Grundlagen Algebra und Geometrie*, dtv, 1974

[4] Duden, *Rechnen und Mathematik*, Dudenverlag, 2000

[5] Gasser, Steven, *Übungen zur analytischen Geometrie*

[6] Javet, Jean-Philippe, *Géométrie Analytique*

[7] Morand, Ignace, *Übungen zur analytischen Geometrie*

[8] Engelberger, Carole, Gunn-Sechehaye, Martin, Morand, Ignace, *Mathematik Lexikon*, 2017

[9] https://www.futura-sciences.com/sciences/personnalites/mathematiques-rene-descartes-203/

[10] https://fr.wikipedia.org/wiki/Euclide

[11] https://de.wikipedia.org/wiki/Analytische_Geometrie