Chapitre 1: Suites et Séries : une première approche

1.1 Définitions de base et premiers exemples

Introduction : *Les **suites réelles** sont liées à la mathématique de la mesure (mesures d'un phénomène prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse (une suite réelle est l'équivalent discret d'une fonction réelle). La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des **procédés illimités** de calcul. On en trouve, par exemple, dans la mathématique babylonienne, chez Archimède, spécialiste des procédés illimités d'approximation pour des **calculs d'aires** et de **volumes**, ou encore en Égypte au 1^{er} siècle après Jésus-Christ, dans le procédé d'**extraction d'une racine carrée** par la méthode de Héron d'Alexandrie.*

Dans la seconde moitié du XX^e siècle, le développement des calculateurs et des ordinateurs donne un second souffle à l'étude des suites en analyse numérique grâce à la méthode des éléments finis. On en retrouve l'usage aussi dans les mathématiques financières.

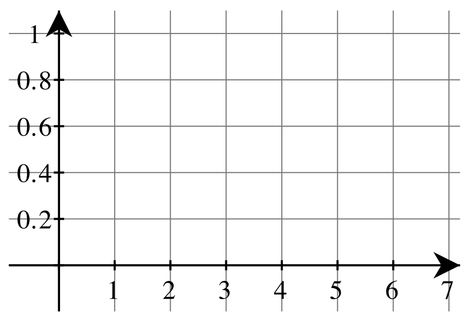
*Parallèlement à l'étude de **la convergence** des suites (lorsque la suite va toujours en s'approchant de plus en plus d'une quantité finie), se développe un certain goût pour l'étude de **son terme général**. C'est le cas par exemple d'un grand nombre de suites d'entiers comme **la suite de Fibonacci** ou, plus récemment, celle de **Syracuse**.*

Définitions : Une **suite réelle** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

L'image d'un entier naturel n par une suite réelle $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est généralement noté u_n (qui se lit u indice n) ; le réel u_n est appelé **terme général** de la suite u, à ne pas confondre avec la suite elle-même notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple : Considérons la suite $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Déterminer son terme général, les cinq premiers termes de cette suite, puis les représenter sur le graphique.



Exercice 1.1 : Calculer les 5 premiers termes ainsi que le 9e terme des suites proposées, puis les représenter graphiquement.

a) $\left(12-3n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **b)** $\left(\dfrac{3n-2}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

c) $\left(9\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **d)** $\left(2+(-0{,}8)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

e) $\left(\dfrac{2^n}{n^2+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

f) $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où u_n est le nombre de décimales de $(0{,}1)^n$

Remarque : Dans les exemples précédents, la suite était définie par une formule permettant de calculer directement n'importe quel terme d'indice n. Ce ne sera pas toujours le cas. Dans l'exemple qui suit, nous indiquerons le premier terme u_0, ainsi qu'une formule permettant d'obtenir n'importe quel terme u_{k+1} à partir du terme précédent u_k quel que soit $k \geq 0$. Une telle suite sera appelée **suite définie par récurrence**.

Exemple : On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{k+1} = 2u_k \end{cases}$

a) Calculer les quatre premiers termes de la suite:

b) En déduire le terme général probable:

Il ne sera pas toujours aussi facile de déterminer le terme général d'une suite définie par récurrence.

Définition : Une suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **définie par récurrence** par la donnée de u_0 ainsi que $u_{k+1} = f(u_k)$

Exercice 1.2 : Calculer les cinq premiers termes des suites définies par récurrence, puis les représenter graphiquement :

a) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{k+1} = 3u_k - 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} u_0 = -3/4 \\ u_{k+1} = u_k^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{k+1} = -ku_k \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{k+1} = \left(u_k\right)^{-k+3} \end{cases}$

Exemple : Quel est le terme général des suites suggérées par :

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$$

a) Où le premier terme est u_0

b) Où le premier terme est u_1

Définition : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **alternée** si ses termes sont alternativement positifs et négatifs. Le terme général d'une suite alternée peut s'écrire sous la forme $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n \in \mathbb{R}$

Exercice 1.3 : Quel est le terme général des suites *suggérées* par :
(on considérera u_0 puis u_1 comme premier terme.)

a) -1, -2, -3, -4, …

b) 1,1 , 1,01 , 1,001 , 1,0001 , …

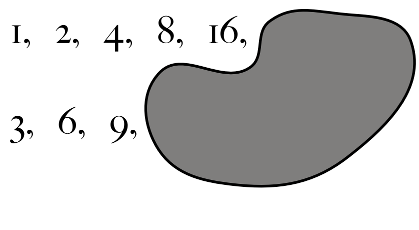
c) 1, 0, 1, 0, 1, …

d) 1, -2, 3, -4, 5, -6, …

e) 1,1 , 0,99 , 1,001 , 0,9999 , …

f) $-2, \frac{4}{3}, -\frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \ldots$

Exercice 1.4 : Dans un cahier d'élève, on a trouvé le début de deux suites, le restant étant illisible :



À quelle activité peuvent-elles correspondre ?

Mise en garde : Si seuls quelques-uns des premiers termes d'une suite sont connus, alors il est impossible de prévoir les termes suivants. Par exemple, si on nous donne 3, 6, 9, . . . et que l'on nous demande de calculer le quatrième terme, nous ne pouvons pas continuer sans informations supplémentaires.

La suite, dont le $n^{\text{ième}}$ terme est :

$$u_n = 3n + (1-n)^3(2-n)^2(3-n)$$

admet 3, 6, 9 et 120 comme quatre premiers termes.

Il est possible de décrire des suites dont les trois premiers termes sont 3, 6 et 9 et le quatrième terme est *n'importe quel* nombre donné. Cela montre que lorsque nous avons affaire à des suites, il est essentiel d'avoir des informations précises à propos du $n^{\text{ième}}$ terme ou une formule générale pour obtenir chaque terme à partir du précédent.

Exercice défi : On considère la suite suivante : 1, 2, 4, 8, 16, 31, …

a) Quel pourrait être le 7^{e} terme de cette suite ?

b) Déterminer alors le terme général de cette suite.

Exercice 1.5 : La suite ci-dessous peut-être utilisée pour calculer des valeurs rapprochées du nombre π.

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{k+1} = u_k - \tan(u_k) \end{cases}$$

a) Calculer les cinq premiers termes de cette suite.
(après avoir mis votre calculatrice en mode radian)

b) Qu'advient-il des termes de cette suite lorsque $u_0 = 6$?

Exercice 1.6 : La suite de Bode, définie par $\begin{cases} u_1 = 0{,}4 \\ u_k = 0{,}1(3\cdot 2^{k-2}+4) \quad \text{pour} \quad k \geq 2 \end{cases}$

peut être utilisée pour évaluer les distances entre des planètes et le soleil. Ces distances sont mesurées en unités astronomiques (UA), avec 1 UA = $1{,}49597870 \cdot 10^{11}$ m.
Par exemple, le troisième terme correspond à la Terre.

a) Calculer les 8 premiers termes de la suite.

b) Comparer ces valeurs aux distances indiquées dans une table numérique.

c) À quel astre correspond la distance u_5 ?

Exercice 1.7 : Quelques calculatrices utilisent un algorithme semblable à celui qui suit pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{N}$ pour un nombre réel positif N :

$$\begin{cases} u_1 = N/2 \\ u_k = \dfrac{1}{2}\left(u_{k-1} + \dfrac{N}{u_{k-1}}\right) \end{cases}$$

Utiliser cette suite pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à six décimales près.

Exercice 1.8 : **La suite de Fibonacci**

Leonardo Pisano
1170-1250

La suite de Fibonacci est une des suites mathématiques les plus connues. Elle doit son nom au mathématicien italien Leonardo Pisano, plus connu sous le pseudonyme de Fibonacci . Dans un problème récréatif posé dans un de ses ouvrages, le *Liber Abaci*, Fibonacci décrit la croissance d'une population de lapins :

« Possédant initialement un couple de lapins, combien de couples obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence? »

Ce problème est à l'origine de la suite dont le $n^{\text{ième}}$ terme correspond au nombre de couples de lapins au $n^{\text{ième}}$ mois. Dans cette population (idéale), on suppose que :

- le premier mois, il y a juste un couple de lapereaux ;
- les lapereaux ne peuvent procréer qu'à partir du 2^{e} mois;
- chaque mois, tout couple susceptible de procréer engendre effectivement un nouveau couple de lapereaux;
- les lapins ne meurent jamais.

En notant F_n le nombre de couples de lapins au mois *n*, on aura :

$$F_1 = 1\ ,\quad F_2 = 1\ ,\quad F_3 = 2\ldots$$

a) Déterminer F_4, F_5, F_6 puis F_{12}

b) Cette suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ peut être définie par récurrence, compléter la relation ci-dessous :

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+1} = \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

c) Mais elle peut également être définie par son terme général :

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}\cdot 2^n}$$

Ici, il ne s'agit pas de démontrer cette formule, mais de contrôler, à la calculatrice, la correspondance des valeurs obtenues pour F_1, F_2, F_3 et F_{12}.

La suite de Syracuse : Cette suite ressemble à un jeu de calcul. On prend n'importe quel nombre entier plus grand que 1 (2, 3, 73, 153, …); s'il est pair, on le divise par 2; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En réitérant l'opération plusieurs fois, on obtient une suite de nombres… qui finit toujours par aboutir à la même séquence.

Cette **suite de Syracuse** se définit de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_1 = N \quad \text{(valeur initiale entière)} \\ u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est paire} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impaire} \end{cases} \end{cases}$$

La **conjecture** affirme que, quel que soit le terme initial N de la suite, celle-ci finit inexorablement par boucler sur 4, 2, 1. Par exemple, en commençant par $N = 6$, nous obtenons la suite :

$$6\ ,\ 3\ ,\ 10\ ,\ 5\ ,\ 16\ ,\ 8\ ,\ 4\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ 4\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ \ldots$$

Sous son apparente simplicité, elle défie encore les mathématiciens actuels.

La naissance de ce problème semble se situer autour des années 1950 ; il fut proposé aux étudiants de l'université américaine de Syracuse. Celui-ci remporta un vif succès. Cette conjecture mobilisa tant les mathématiciens durant les années 60, en pleine guerre froide, qu'une blague courut selon laquelle ce problème serait l'œuvre d'un complot soviétique pour ralentir la recherche américaine. Plus sérieusement, le mathématicien Paul Erdös dit à propos de cette conjecture: « les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes ». Il proposa une offre de 500 $ à quiconque lui donnerait une solution. On cherche encore …

1.2 Quelques conventions sur les sommes

Nous aurons souvent besoin de calculer la somme de plusieurs termes d'une suite. Pour exprimer facilement cette somme, nous utilisons la **notation d'une somme**.

Soit une suite $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$, le symbole $\sum_{k=0}^{m-1} u_k$ représente la somme des m premiers termes, comme suit.

$$\sum_{k=0}^{m-1} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{m-1}$$

La lettre majuscule grecque sigma, Σ, indique une somme et le symbole u_k représente le $k^{\text{ième}}$ terme. La lettre k est l'**indice de sommation**, les nombres 0 et $m-1$ désignent, respectivement, la plus petite et la plus grande valeur de l'indice de sommation.

Exemple : Calculer la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{3} k^2(k-3)$

Remarque: La lettre que nous utilisons comme indice de sommation est sans importance. Par exemple, si j est l'indice de sommation, alors $\sum_{j=0}^{m} u_j = u_0 + u_1 + \ldots + u_m$ représente la même somme que $\sum_{k=0}^{m} u_k$.

Exercice 1.9 : Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{k=0}^{5}(2k-7)$ **b)** $\sum_{k=0}^{5}k(k-2)$ **c)** $\sum_{k=1}^{5}(-3)^{k-1}$

d) $\sum_{k=1}^{30}5$ **e)** $\sum_{k=23}^{30}5$

Théorème :

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$

Preuve :

Exercice 1.10 : De la formule précédente, montrer que $\sum_{k=m}^{n} c = (n-m+1)c$

Exercice 1.11 : Calculer

a) $\sum_{k=253}^{571} \frac{1}{3}$ **b)** $\sum_{k=137}^{428} 2{,}1$

Théorème : Soit 2 suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
alors pour tout entier positif n on a :

$$(1)\quad \sum_{k=0}^{n}(u_k+v_k)=\sum_{k=0}^{n}u_k+\sum_{k=0}^{n}v_k$$

$$(2)\quad \sum_{k=0}^{n}(u_k-v_k)=\sum_{k=0}^{n}u_k-\sum_{k=0}^{n}v_k$$

$$(3)\quad \sum_{k=0}^{n}cu_k=c\sum_{k=0}^{n}u_k$$

Preuve (1) :

Exercice 1.12 : Démontrer les 2 dernières formules.

Intéressons-nous maintenant à la somme des termes d'une suite.

Prenons par exemple la suite : $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, alors nous définirons:

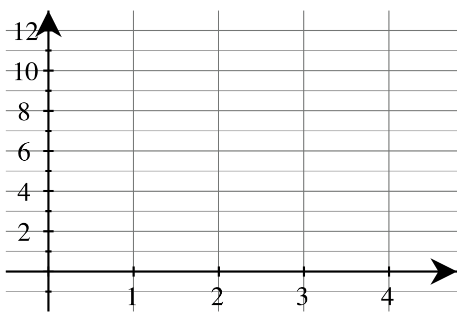
$$\begin{aligned} S_0 &= u_0 \\ S_1 &= u_0 + u_1 \\ S_2 &= u_0 + u_1 + u_2 \\ S_3 &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \end{aligned}$$

Ou plus généralement:

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

Définition : Le nombre S_n est appelé la $\boldsymbol{n}^{\text{ième}}$ **somme partielle** de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$ est appelée une **suite de sommes partielles**. Les suites de sommes partielles $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont importantes dans l'étude des séries, important sujet que nous aborderons un peu plus loin dans ce polycopié.

Exemple : Calculer les quatre premiers termes de la suite S_n des sommes partielles associées à la suite 1, 2, 3, …, n, … des entiers positifs. Représenter graphiquement les 4 premiers termes de la suite S_n.



Exercice 1.13 : Calculer les quatre premiers termes de la suite S_n des sommes partielles pour les suites données. Représenter graphiquement les 4 premiers termes de ces suites S_n.

a) $\left(3+\frac{1}{2}n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **b)** $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **c)** $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème : $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve :

Anecdote célèbre : *Le célèbre mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) avait 7 ans (ou 10 ans, suivant la source) lorsqu'un jour son maître d'école demanda à la classe de calculer la somme de tous les nombres entiers de 1 à 100. Chaque professeur connaît ce genre d'exercices qui occupent les élèves jusqu'à la fin de l'heure. Alors que ses camarades se lancèrent dans ce calcul et que le maître s'installa pour lire son journal, le jeune Gauss surprit tout le monde en annonçant le résultat : 5050. Il venait de découvrir tout seul l'algorithme décrit dans le théorème précédent :*

$$S = (1 + 100) + (2 + 99) + \ldots + (50 + 51) = 50 \cdot 101 = 5050$$

Exercice 1.14 : Exprimer les sommes suivantes en fonction de *n*.

a) $\sum_{k=1}^{n} 2k$ **b)** $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}k + 5\right)$ **c)** $\sum_{k=12}^{n} k$

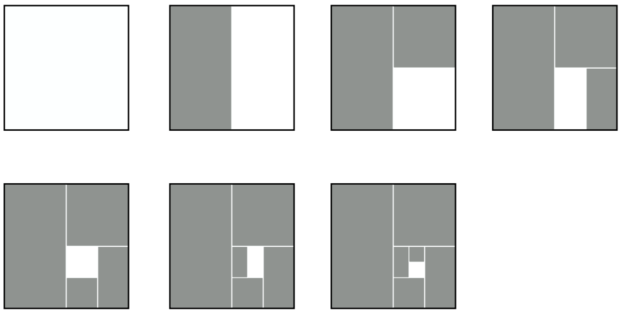
Exercice 1.15 : Lequel de ces 2 nombres est-il le plus grand ?

$$S = 2007 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 2006 + 2007 + 2008)$$
$$T = 2008 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 2005 + 2006 + 2007)$$

Définition : On appelle **série** (ou série infinie) une expression de la forme $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ où les u_k sont les termes d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Remarque : Nous aborderons l'étude algébrique de quelques séries dans la suite de ce polycopié. Contentons-nous maintenant de trois exercices d'introduction.

Exercice 1.16 : **a)** Quelle égalité vous suggère cette figure :



b) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Que peut bien valoir $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$?

Exercice 1.17 : Soit la série 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + … dont on se propose de calculer la somme.

Un premier élève propose :

« Pour calculer cette série, je regroupe les termes à l'aide de parenthèses :

(1 – 1) + (1 – 1) + (1 – 1) + … = 0 + 0 + 0 + … = 0

*Cette série vaut donc **0** »*

Un deuxième élève propose alors :

« Moi, je propose de l'écrire de la manière suivante :

1 – (1 – 1) – (1 – 1) – (1 – 1) – … = 1 – 0 – 0 – … = 1

*Cette série vaut donc **1** »*

Qu'en pensez-vous ?

Exercice 1.18 : Concentrons-nous maintenant sur la série suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots$$

Léonard Euler proposa dans son article *"De seriebus divergentibus"* (Opera omnia, tome XIV, série 1, p. 585 et suivante) le calcul suivant :

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = \mathbf{-1}$$

Certes, Euler lui-même trouve bizarre d'obtenir un résultat négatif comme somme de termes tous positifs. Il justifie ce résultat, ou tout au moins essaye de le justifier sans trop y croire, par le calcul suivant:

« Posons S = 1 + 2 + 4 + 8 + …, donc 2S = 2 + 4 + 8 + 16 + ….
On observe alors que 2S = S – 1 et donc S = -1 »

Qu'en pensez-vous ?