Chapitre 2: Suites arithmétiques et suites géométriques

2.1 Suites arithmétiques

Introduction : *Dans ce chapitre, nous allons étudier* ***deux*** *sortes de suites particulières : les* ***suites arithmétiques*** *et les* ***suites géométriques****.*

Exemple : Pour financer son projet de vacances, Vincent décide de mettre de côté 110.- par mois. Son épargne actuelle est de 427.- et le voyage coûte 2'270.-. Vincent devra donc patienter…

Définitions : Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que, pour tout entier positif k,

$$\boxed{a_{k+1} = a_k + r}$$

Le nombre $r = a_{k+1} - a_k$ est appelé la **raison** de la suite arithmétique.

Remarquons que la raison r est la différence entre *n'importe quels* termes successifs d'une suite arithmétique.

Exemple : La suite $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_k = a_{k-1} + 7 \end{cases}$ définie par récurrence est-elle une suite arithmétique ?

Exercice 2.1 : Les suites suivantes sont-elles des suites arithmétiques ?

a) $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_k = a_{k-1} - 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_k = 3c_{k-1} + 1 \end{cases}$

c) -3, 2, 7, 12, …, $5n - 8$, …

Exemple : Démontrer que la suite $\left(3n-2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique.

Exercice 2.2 : Démontrer que les 2 suites données sont des suites arithmétiques et préciser leur raison.

a) $\left(4n-10\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **b)** $\left(58-5n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 2.3 : Démontrer que la suite $\left(n^2-10\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite arithmétique.

Théorème : Soit $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite arithmétique de raison r. Montrer que le $k^{\text{ième}}$ terme a_n de cette suite est donné par la formule ci-dessous :

$$\boxed{a_k = a_1 + (k-1)r}$$

Preuve :

Exemple : Les trois premiers termes d'une suite arithmétique sont :

20 , 16,5 et 13.

Calculer le quinzième terme.

Exercice 2.4 : Calculer le cinquième terme, le vingtième terme, ainsi que le terme général de la suite arithmétique.

a) 2, 6, 10, … **b)** 3 , 2,7 , 2,4 , …

c) $x-8$, $x-3$, $x+2$, … **d)** log(3), log(9), log(27), …

Exemple : Sachant que le quatrième terme d'une suite arithmétique est 5 et que le neuvième terme est 20, calculer le sixième terme.

Exercice 2.5 : Calculer la raison de la suite arithmétique dont on connaît $a_2 = 21$ et $a_6 = -11$.

Exercice 2.6 : Calculer le terme spécifié de la suite arithmétique dont deux termes sont donnés :

a) a_{12} ;	$a_1 = 9{,}1$	$a_2 = 7{,}5$
b) a_1 ;	$a_6 = 2{,}7$	$a_7 = 5{,}2$
c) a_{15} ;	$a_3 = 7$	$a_{20} = 43$

Exercice 2.7 : On considère une suite arithmétique (a_n) de raison r. Démontrer que la suite (b_n) définie par $b_n = -3a_n + 2$ est aussi une suite arithmétique ; quelle en est sa raison ?

Exercice 2.8 : Soit (a_n) une suite arithmétique de raison r. On définit une nouvelle suite (b_n) par son terme général $b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$. Démontrer que la suite (b_n) est aussi une suite arithmétique ; quelle en est sa raison ?

2.2 Sommes partielles d'une suite arithmétique

Le théorème suivant contient une formule pour la $n^{\text{ième}}$ somme partielle S_n d'une suite arithmétique.

Théorème : Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique de raison r, alors la $n^{\text{ième}}$ somme partielle S_n *(c'est-à-dire, la somme des n premiers termes)* est donnée par :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Exemple : Calculer la somme de tous les entiers pairs de 2 à 100

Exercice 2.9 : Calculer la somme S_n de la suite arithmétique qui satisfait les conditions suivantes :

a) $a_1 = 40$, $r = -3$, $n = 30$
b) $a_1 = -9$ $a_{10} = 15$, $n = 10$

Exercice 2.10 : Sans utiliser la formule développée dans la preuve précédente, donner un nouveau raisonnement permettant de démontrer que S_n est donnée par $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$

Exercice 2.11 : Montrer que les sommes suivantes correspondent à *des sommes partielles de suites arithmétiques*. En déduire alors leur valeur:

a) $\sum_{k=1}^{20}(3k-5)$ **b)** $\sum_{k=1}^{18}(\frac{1}{2}k+7)$

Exemple : Exprimer à l'aide du symbole de sommation le calcul suivant :

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\frac{3}{14}+\frac{4}{19}+\frac{5}{24}+\frac{6}{29}$$

Exercice 2.12 : Exprimer la somme à l'aide du symbole de sommation. *(Il peut y avoir plusieurs réponses.)*

a) $1 + 3 + 5 + 7$ **b)** $2 + 4 + 6 + \ldots + 150$

c) $\frac{3}{7}+\frac{6}{11}+\frac{9}{15}+\frac{12}{19}+\frac{15}{23}+\frac{18}{27}$

Exercice 2.13 : Déterminer une suite arithmétique qui comporte 18 termes, sachant que la somme de ses 17 premiers termes est égale à 663 et que la somme de ses 17 derniers termes est égale à 731.

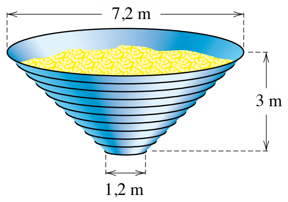
Exercice 2.14 : Si f est une fonction affine, montrer que la suite $a_n = f(n)$ est une suite arithmétique.

2.3 Quelques applications sur les suites arithmétiques

Exercice 2.15 : **Places dans un stade**

Les dix premières rangées de places assises dans une certaine partie d'un stade ont 30 sièges, 32 sièges, 34 sièges, et ainsi de suite. De la onzième rangée à la vingtième rangée, chaque rangée est formée de 50 sièges.
Calculer le nombre total de sièges dans cette partie du stade.

Exercice 2.16 : **Construction d'un silo à grains**



Un silo à grains doit être construit en forme de tronc de cône (voir la figure). Le silo doit avoir une hauteur de 3 m et 11 anneaux métalliques de renforcement répartis uniformément sur son pourtour, à partir de l'ouverture, d'un diamètre de 1,2 m à la base, jusqu'à un diamètre de 7,2 m au sommet.
Calculer la longueur totale de métal nécessaire pour fabriquer les anneaux.

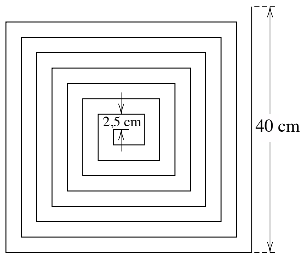
Exercice 2.17 : **Montant de prix**

Un concours sera doté de cinq prix en argent d'une valeur totale de 5000 fr., et il y aura une différence de 100 fr. entre chaque récompense. Calculer la valeur de la plus petite des récompenses.

Exercice 2.18 : **Suite génétique**

La suite définie par récurrence par $x_{k+1} = \dfrac{x_k}{1+x_k}$ se rencontre en génétique dans l'étude de l'élimination d'un gène déficient dans une population.
Démontrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dont le $n^{\text{ième}}$ terme est défini par $y_n = 1/x_n$, est une suite arithmétique.

Exercice 2.19 : **Dimensions d'un labyrinthe**



Calculer la longueur totale de la ligne brisée dans la figure ci-contre, sachant que la largeur totale du labyrinthe formé par la courbe est de 40 cm et tous les couloirs du labyrinthe ont une largeur de 2,5 cm.

Exercice 2.20 : **Dépréciation**

Les méthodes de dépréciation sont parfois utilisées par les financiers et les particuliers pour estimer la valeur d'un capital pendant une durée de vie de n années. Dans la méthode de la somme des années, pour chaque année $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, la valeur du capital est diminuée de la fraction $A_k = \dfrac{n-k+1}{T_n}$ de sa valeur initiale, où $T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

a) Sachant que $n = 8$, calculer $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_8$.
b) Démontrer que la suite établie sous a) est une progression arithmétique, et calculer S_8.
c) Sachant que la valeur initiale d'un capital est 1000 fr, quelle sera sa dépréciation après 4 ans ?

2.4 Suites géométriques

Introduction : *Le second type de suite particulière que nous allons examiner, **les suites géométriques**, se rencontre fréquemment dans les applications.*

Exemple : Un capital de 10'000.- est placé à intérêts composés à un taux annuel de 4,25%. Quelle est sa valeur après 25 ans de placement ?

Définitions : Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une **suite géométrique** si $a_1 \neq 0$ et s'il existe un nombre réel $r \neq 0$ tel que, pour tout entier positif k,

$$\boxed{a_{k+1} = a_k \cdot r}$$

Le nombre $r = \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ est appelé la **raison** de la suite géométrique.

Remarquons que la raison $r = \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ est le quotient de *tout* couple de termes successifs d'une progression géométrique.

Exemple : Le premier terme d'une suite géométrique est 3, sa raison r est -1/2. Calculer les cinq premiers termes ainsi que son terme général.

Exercice 2.21 : Calculer le cinquième terme, le huitième terme, ainsi que le terme général des suites géométriques suivantes :

a) 8, 4, 2, … **b)** 300, -30, 3, …

c) 1, $-\sqrt{3}$, 3, … **d)** 4, -6, 9, …

e) 2, 2^{x+1}, 2^{2x+1}, … **f)** 1 , 0,1 , 0,01, …

Exemple : Montrer que la suite 6, -12, 24, -48, …, $6 \cdot (-2)^{k-1}$ est une suite géométrique de raison -2.

Exercice 2.22 : Démontrer que la suite donnée est une suite géométrique et calculer sa raison.

$$5,\ -\frac{5}{4},\ \frac{5}{16},\ \ldots,\ 5\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1},\ \ldots$$

Théorème : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite géométrique de raison r. Montrer que le $n^{\text{ième}}$ terme a_n de cette suite est donné par la formule ci-dessous :

$$\boxed{a_k = a_1 \cdot r^{k-1}}$$

Preuve :

Exemple : Pour une suite géométrique, $a_3 = 5$ et $a_6 = -40$. Calculer a_8.

Exercice 2.23 : Calculer la raison d'une suite géométrique dont on donne $a_4 = 3$ et $a_6 = 9$.

Exercice 2.24 : Calculer le septième terme d'une suite géométrique dont les deuxième et troisième termes sont 2 et $-\sqrt{2}$.

Exercice 2.25 : Soit une suite géométrique dont $a_4 = 4$ et $a_7 = 12$. Calculer r et a_{10}.

2.5 Sommes partielles d'une suite géométrique

Le prochain théorème contient une formule donnant la $n^{\text{ième}}$ somme partielle S_n d'une suite géométrique.

Théorème : La $n^{ième}$ somme partielle S_n d'une suite géométrique dont le premier terme est a_1 et dont la raison est $r \neq 1$ est

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

Preuve :

Exemple : Sachant que 1 , 0,3 , 0,09 , 0,027 , … est une suite géométrique, calculer la somme des dix premiers termes.

Exercice 2.26 : Sachant que 1, 1/2, 1/4, 1/8 , … est une suite géométrique, calculer la somme des dix premiers termes.

Exercice 2.27 : Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{k=1}^{10} 3^k$ **b)** $\sum_{k=0}^{5} \left(-\frac{2}{5}\right)^k$

Exercice 2.28 : Exprimer la somme à l'aide du symbole de sommation. *(Il peut y avoir plusieurs solutions.)*

a) $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$ **b)** $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{36} - \frac{1}{108}$

Exercice 2.29 : Une balle en caoutchouc est lâchée d'une hauteur de 18 m. Sachant que, lors de chaque bond, elle rebondit approximativement des deux tiers de la hauteur qu'elle avait atteinte précédemment, évaluer la distance que la balle aura parcourue au moment du 10e rebond.

Exercice 2.30 : Un homme désire épargner de l'argent en mettant de côté 1 centime le premier jour, 2 centimes le deuxième jour, 4 centimes le troisième jour, et ainsi de suite.

a) S'il continue à doubler le montant mis de côté chaque jour, combien doit-il mettre de côté le quinzième jour ?

b) En supposant qu'il ne soit pas à court d'argent, quel est le montant total économisé à la fin du trentième jour ?

Exercice 2.31 : Un peu de calcul économique:

- **Capital accumulé après le versement de *n* mensualités:**

  On verse une somme d'argent a fixe chaque mois rémunérée à taux mensuel i fixe (type plan épargne logement). Le compte est bloqué, c'est-à-dire que vous ne pouvez pas retirer de l'argent de ce compte pendant un temps donné.

  a) Montrer que le capital $C_t(n)$ accumulé après avoir versé n mensualités est donné par la formule:

$$C_t(n) = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- **La mensualité *a* à verser sur *n* mensualités pour rembourser un emprunt à la banque de V_0:**

  b) Montrer que la mensualité a à payer pour rembourser un emprunt V_0 de sur n mois est donnée par la formule:

$$a = V_0\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

- **Applications numériques:**

  c) On place tous les mois CHF 50.- à un taux annuel de 3 %. Quelle somme possède-t-on au bout de 5 ans ? En déduire le montant total des intérêts.

  d) On emprunte CHF 40'000.- sur 3 ans à 4,5 % annuel. Que doit-on rembourser chaque mois ? En déduire le montant des intérêts.

Exercice 2.32 : **a)** Calculer $\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k$, $\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^k$, $\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^k$, $\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{3}\right)^k$

b) En déduire la valeur probable de $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k$

c) Appliquer une démarche semblable afin d'en déduire :

$$S_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

Théorème : Si $|r| < 1$, alors $S = S_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{a_1}{1-r}$

Ce théorème implique que plus nous additionnons de termes de la suite géométrique, plus sa somme s'approche de $a_1/(1 - r)$.

Justification :

Définition : De manière générale, étant donné une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$, la suite de sommes partielles.

S'il existe un nombre S tel que $S_n \to S$ lorsque $n \to \infty$, alors, comme lors de notre étude des suites géométriques, S est la **somme de la série** et nous pouvons écrire $S = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$.

Exercice 2.33 : Calculer les sommes des séries géométriques, si elles existent :

a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ **b)** $\sum_{k=1}^{\infty} 1,5\cdot\left(\frac{1}{100}\right)^{k-1}$

c) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots$ **d)** $1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\dots$

e) 256 + 192 + 144 + 108 + …

2.6 Quelques applications sur les suites géométriques

Exemple : Une balle en caoutchouc est lâchée d'une hauteur de 10 mètres. Supposons que, lors de chaque bond, elle rebondisse de la moitié de la hauteur qu'elle avait atteinte précédemment.

Calculer la distance totale que la balle parcourt avant de s'arrêter.

Exercice défi : Combien de temps dure tout le processus ?

On rappelle que la distance parcourue en chute libre, mesurée en mètres, est égale à $\frac{1}{2}gt^2$*, où t est le temps de chute, mesuré en secondes, et g = 9,81*

Exercice 2.34 : Le poids d'un pendule balance le long d'un arc de 24 cm de long lors de son premier balancement. Sachant que la longueur de chaque balancement successif est approximativement les cinq sixièmes de la longueur qu'il avait parcourue lors du balancement précédent, évaluer la distance totale que parcourt le poids avant de s'arrêter.

Exercice 2.35 : Un nommé Sissa, l'inventeur du jeu d'échecs, présenta son jeu au Sultan. Enthousiasmé, ce dernier lui proposa de choisir sa récompense. Sissa, d'après la légende, répondit:

« Que les serviteurs mettent un grain de blé sur la première case, deux sur la seconde, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième et ainsi de suite en doublant chaque fois le nombre de grains de blé jusqu'à la soixante-quatrième case. »

a) Combien de grains de blé aurait-il fallu pour récompenser Sissa selon ses désirs?

b) En supposant qu'un grain de blé occupe un volume de 1 mm^3, et sachant que la Suisse s'étend sur une superficie de 41’288 km^2, quelle serait l'épaisseur de la couche de blé qui recouvrirait alors le pays?

Exercice 2.36 : **Dosage d’un médicament**

Un certain médicament a une durée de demi-vie d’environ 2 heures dans le sang[1]. Le médicament est destiné à être administré en doses de D milligrammes toutes les 4 heures, mais D doit encore être déterminé.

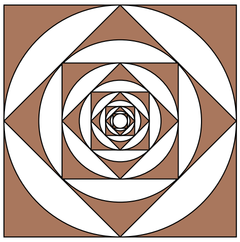
a) Montrer que le nombre de milligrammes de médicament dans le sang après que la $n^{\text{ième}}$ dose a été administrée est de :

$$D+\frac{1}{4}D+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}D$$

et que cette somme vaut approximativement $\frac{4}{3}D$ pour des valeurs élevées de n.

b) Une quantité de plus de 500 mg de médicament dans le sang est considérée comme dangereuse. Calculer la dose la plus grande possible qui peut être prescrite régulièrement pendant une grande période de temps.

Exercice 2.37 : La figure ci-contre représente plusieurs termes d’une suite formée d’une alternance de cercles et de carrés. Chaque cercle est inscrit dans un carré, et chaque carré (à l’exception du plus grand carré) est inscrit dans un cercle.



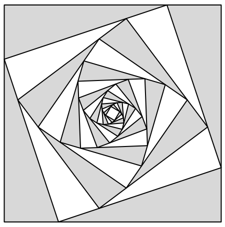
Soit S_n la surface du $n^{\text{ième}}$ carré et C_n la surface du $n^{\text{ième}}$ cercle.

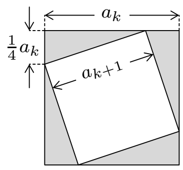
a) Calculer la relation entre S_n et C_n et entre C_n et S_{n+1}.

b) Quelle portion du plus grand carré est ombrée sur la figure ci-dessous ?

[1] La demi-vie est le temps mis par un médicament pour perdre la moitié de son activité pharmacologique ou physiologique.

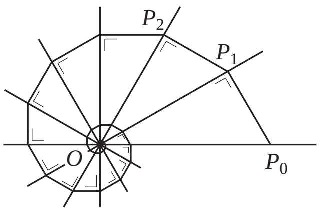
Exercice 2.38 : La première figure montre quelques termes d'une suite de carrés S_1, S_2, …, S_k, … . Soit a_k, A_k, et P_k respectivement le côté, l'aire et le périmètre du carré S_k. Le carré S_{k+1} est construit à partir de S_k en reliant quatre points se trouvant sur S_k, chaque point se trouvant à une distance de $\frac{1}{4}a_k$ d'un sommet du carré, comme indiqué sur la seconde figure.





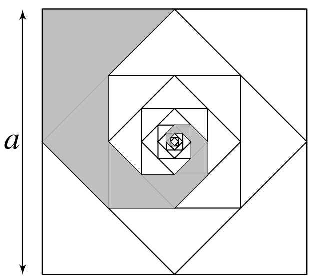
a) Calculer la relation entre a_{k+1} et a_k.
b) Calculer le terme général des trois suites a_n, A_n et P_n .
c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ en fonction de a_1

Exercice 2.39 : On considère six droites concourantes en O, chacune déterminant un angle de 30° avec ses voisines. Par un point P_0 d'une des droites, situé à une distance a de O, on abaisse une perpendiculaire sur sa voisine et on trouve ainsi le point P_1. On fait de même avec P_1, P_2, … en créant ainsi une spirale (voir figure).



a) Calculer, en fonction de a, les distances P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3.
b) Les distances P_nP_{n+1} déterminent une suite, quel est son terme général ?
c) Quelle est la longueur totale de la spirale ?

Exercice 2.40 : En partant d'un carré de côté a, on construit une suite infinie de carrés emboîtés dont les sommets sont les milieux des côtés du carré précédent. On considère pour finir la figure grisée, formée par la réunion de triangles rectangles.

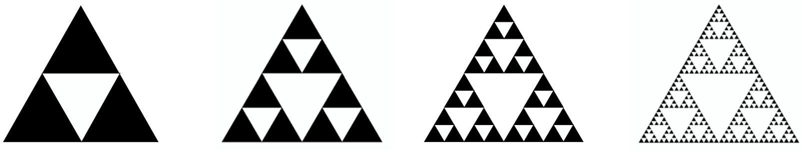


Calculer l'aire et le périmètre de cette figure.

Exercice 2.41 : **Le triangle de Sierpinski**

Waclaw Sierpinski (1882 - 1969)

Le triangle de Sierpinski, dessiné en 1915, est un exemple de fractale. Il peut être construit en commençant par un triangle équilatéral, de couleur noire et sous forme de pièce solide. Ce triangle est divisé en quatre triangles équilatéraux et congruents, puis le triangle central est enlevé de la pièce. À l'étape suivante, chacun des trois triangles restants est divisé en quatre triangles équilatéraux et congruents, puis le triangle central à l'intérieur de chacun de ces triangles est enlevé de la pièce, comme montré sur la première figure. Lors de la troisième étape, neuf triangles sont enlevés de la pièce. Si l'on poursuit ce processus à l'infini, on obtient le triangle de Sierpinski.



a) Déterminer une suite géométrique a_k qui donne le nombre de triangles enlevés lors de la $k^{\text{ième}}$ étape.

b) Calculer le nombre de triangles enlevés de la pièce lors de la quinzième étape.

c) Calculer le nombre total de triangles enlevés de la pièce après quinze étapes.

d) En supposant que le triangle de départ ait une surface de 1 unité, calculer une suite b_k qui donne la surface des pièces enlevées lors de la $k^{\text{ième}}$ étape. Montrer que cette suite est une suite géométrique.

e) Déterminer la surface enlevée lors de la septième étape.

f) Déterminer la surface totale enlevée de la pièce après la septième étape.

g) Déterminer quelle proportion de l'aire du triangle de départ est encore noire lorsque le nombre d'étapes tend vers l'infini.

2.7 Pour aller un peu plus loin

Exemple : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1+\sqrt{2} \\ u_{n+1} = 1+\sqrt{u_n^2 - 2u_n + 4} \end{cases}$$

a) Calculer u_1 et u_2.
b) Justifier que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq 1$.

On pose la suite (v_n) définie tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = (u_n - 1)^2$

c) Cette nouvelle suite, est-elle arithmétique, géométrique ou quelconque ?
d) Déterminer le terme général de la suite (v_n).

Exercice 2.42 : Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Justifier.

On considère la suite (v_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

b) Calculer les 3 premiers termes de cette suite. Peut-on en déduire que (v_n) est arithmétique ?
c) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
d) En déduire le terme général de (v_n), puis celui de (u_n).

Exercice 2.43 : On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$.

a) Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2}$, en déduire la nature de la suite (v_n).
b) Donner le terme général de (v_n), et en déduire celui de (u_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$ *.

c) Montrer que $P_n = e^{S_n}$.
d) Exprimer S_n en fonction de n puis en déduire l'expression de P_n en fonction de n.
e) Déterminer la limite de la suite (S_n), en déduire celle de (P_n).

Exercice 2.44 : On définit la suite suivante : $u_0 = 2$ et pour tout n entier naturel : $u_{n+1} = (0{,}8)u_n + 2$.

a) Calculez u_1 , u_2 et u_3.
b) Déterminez un réel a tel que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + a$ soit une suite géométrique.

On pose alors pour tout n entier naturel $v_n = u_n - 10$.

c) Calculez v_0 puis donnez l'expression de v_n en fonction de n.
d) Quelle est l'expression de u_n en fonction de n ?
Déterminez la limite de la suite (u_n).

Pour n entier naturel, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

e) Quelle est l'expression de T_n en fonction de n ?
Quelle est la limite de la suite (T_n) ?
f) Quelle est l'expression de S_n en fonction de n ?
Quelle est la limite de la suite (S_n) ?

* $\prod_{k=0}^{n} u_k = u_0 \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n$ (produit partiel des $n+1$ premiers termes de la suite u_k)

Exercice 2.45 : Une personne décide de placer sur un livret d'épargne et ceci tous les ans, la somme de CHF 10'000. Ce livret d'épargne rapporte 8% d'intérêts composés par an. Le premier dépôt sur le livret est effectué le 1er janvier 2007. Les intérêts sont versés sur le livret le 31 décembre de l'année en cours (les premiers intérêts seront versés le 31 décembre 2007). On appelle (C_n) le capital disponible, au 1er janvier de l'année (2007 + n). Ainsi , C_0 = 10'000.

a) Calculez C_1 et C_2.
b) Quelle est l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n ?
c) Montrez que la suite (V_n) définie par : $V_n = C_n + 125'000$ est une suite géométrique. Quelle est sa raison? Donnez l'expression de V_n en fonction de n puis celle de C_n en fonction de n.
d) Quel sera le capital disponible sur le livret au 1er janvier 2018 ? (résultat arrondi à l'entier le plus proche)

Exercice 2.46 : La population d'une ville est, pour l'année 2006, de 55'000 habitants. On estime que cette population devrait évoluer dans les années à venir pour deux raisons:

- Un accroissement naturel de 1,25% par an qui correspond à la natalité.
- Une arrivée de 250 nouveaux habitants par an qui correspond à une augmentation du nombre de logements.

On appelle P_n le nombre de milliers d'habitants prévisible de cette ville pour l'année (2006 + n). Ainsi, $P_0 = 55$

a) Calculer P_1, P_2 et P_3 (résultats arrondis à l'entier le plus proche).
b) Quelle l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n?
La suite (P_n) est-elle arithmétique? géométrique?
c) Déterminez un réel a tel que la suite (U_n) définie par :
$U_n = P_n + a$ soit géométrique.
d) Donnez l'expression de U_n puis celle de P_n en fonction de n. À partir de quelle année la population de cette ville dépassera les 75'000 habitants?

Exercice 2.47 : Soit (a_n) et (b_n) les deux suites réelles définies par :

$$a_0 = 2,\ b_0 = 4 \text{ et pour tout entier } n : \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n) \end{cases}$$

On considère la droite réelle Ox afin d'y représenter les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n, b_n.

a) Placer les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2 sur la droite Ox.

b) Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = a_n + b_n$.
Démontrer que cette suite est constante. Que peut-on alors affirmer au sujet du milieu du segment $\overline{A_nB_n}$?

c) Soit (v_n) la suite de terme général $v_n = a_n - b_n$.
De quel type du suite s'agit-il ? (justifier), que peut-on en déduire au sujet de la distance A_nB_n ?

d) Exprimer v_n en fonction de n.

e) Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

f) Les suites (a_n) et (b_n) sont-elles convergentes ? que peut-on affirmer au sujet de leur limite ?