

Chapitre 3: La démonstration par récurrence

3.1 Un exemple pour comprendre le principe

Introduction : Pour découvrir une formule donnant la somme des n premiers nombres impairs, on commence par quelques essais

$$\text{Si } n = 1: \quad 1 = 1$$

$$\text{Si } n = 2: \quad 1 + 3 = 4$$

$$\text{Si } n = 3: \quad 1 + 3 + 5 = 9$$

$$\text{Si } n = 4: \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

Il semblerait que cette somme soit toujours égale au carré du nombre de termes, c'est-à-dire que pour tout $n \geq 2$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Mais comment en être certain? Un plus grand nombre d'essais confirme cette conjecture; il restera cependant toujours une infinité de cas non vérifiés¹. Le raisonnement qui suit permettra de procéder à cette vérification en un temps record, puisque fini :

Supposons que la formule $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ soit vraie pour une valeur de n , ce qui est le cas pour $n = 4$, par exemple. En additionnant $2n + 1$, le nombre impair suivant, on obtient :

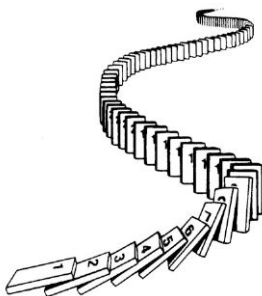
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1)$$

on observe que le membre de droite de l'égalité vaut justement $(n + 1)^2$. La formule est encore vraie pour $n + 1$; elle est donc vraie pour $n = 5$. La formule étant maintenant prouvée pour $n = 5$, le même raisonnement montrera qu'elle est encore vraie pour $n = 6$, puis pour $n = 7 \dots$. Le passage de n à $n + 1$ fonctionne comme un moteur qui vérifie "automatiquement" la formule pour toutes les valeurs de n supérieures à 4.

De manière générale, on caractérise le **raisonnement par récurrence** de la manière suivante:

Soit $p(n)$ une condition pour la variable $n \in \mathbb{N}^*$. Pour démontrer que la proposition $\forall n \in \mathbb{N}^*, p(n)$ est vraie, on montre que

1. $p(1)$ est une proposition vraie
2. $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$ pour tout $n \geq 1$



On peut comparer une démonstration par récurrence au jeu qui consiste à faire tomber une file de pièces de dominos :

Considérons une rangée infinie de dominos, étiquetés $1, 2, \dots, n, \dots$ où chaque domino est en position verticale.

Soit $p(n)$ la proposition "on fait tomber le domino n ".

Si on arrive à faire tomber le premier domino, autrement dit $p(1)$ est vraie et si, peu importe quand le $n^{\text{ième}}$ domino est poussé, il fait tomber le $(n + 1)^{\text{ième}}$ domino c'est-à-dire $p(n) \Rightarrow p(n + 1)$ est vraie, alors tous les dominos peuvent tomber les uns après les autres.

¹ Jusqu'au XIX^e siècle, les mathématiciens n'hésitaient pourtant pas à recourir à un tel raisonnement "par induction", couramment utilisé dans les sciences expérimentales.

Exemple : Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Marche à suivre : Pour effectuer une démonstration par récurrence, il faut :

- 1°) **Vérifier** que la proposition est **vraie pour $n = 1$** ;
- 2°) **Poser l'hypothèse de récurrence**, c'est-à-dire affirmer, par hypothèse, que la proposition est vraie pour n .
- 3°) **Formuler la conclusion**, c'est-à-dire adapter la formule pour $n + 1$
- 4°) Effectuer le **raisonnement** permettant de "passer de n à $n + 1$ ".

Exercice 3.1 : Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{a) } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{b) } 1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{c) } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

d) En comparant les réponses a) et c), compléter cette célèbre

$$\text{égalité : } \sum_{k=1}^n k^{\dots} = \left(\sum \dots \right)^{\dots}$$

Exercice 3.2 : Effectuer les sommes suivantes :

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \dots$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \dots$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \dots$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \dots$$

À l'aide de ces résultats, conjecturer une formule donnant la somme suivante, puis démontrer votre conjecture.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

Exercice 3.3 : Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{a) } \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^n \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

$$\text{d) } \sum_{i=1}^n i \cdot 5^i = \frac{5 + (4n-1)5^{n+1}}{16}$$

$$\text{e) } \sum_{i=1}^n \frac{1}{i \cdot (i+1)(i+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Exercice 3.4 : Établir une formule pour :

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n},$$

puis la démontrer.

Exercice 3.5 : a) Montrer que si l'égalité $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1}{8}(2n+1)^2$ est vraie pour $n = k$, alors elle est vraie pour $n = k + 1$.

b) Peut-on alors affirmer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1}{8}(2n+1)^2 ?$$

Exercice 3.6 : Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{i}\right) = n + 1$$

Indication : Le symbole \prod indique non pas une somme, mais un produit des $(1 + 1/i)$ pour i allant de 1 jusqu'à n .

Exemple : Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 4^n - 1 \text{ est divisible par } 3$$

Exercice 3.7 : Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,

- a) $8^n - 1$ est divisible par 7.
- b) $n^2 + 5n$ est un nombre pair.
- c) $n^3 + 5n$ est un multiple de 3.

Exercice 3.8 : Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ que :

$$3^{3n+2} + 2^{n+4} \text{ est un multiple de } 5$$

Exercice 3.9 : a) Démontrer par récurrence la formule suivante :

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R} - \{1\}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

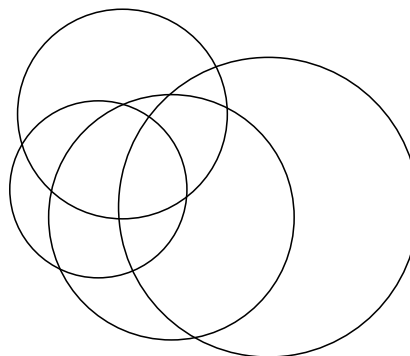
- b) Cette formule, ne l'avions-nous pas déjà démontrée ?

Exercice 3.10 : Démontrer que la proposition suivante est fausse:

$$"\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - n + 41 \text{ est premier}"$$

Indication : Pour démontrer qu'une proposition est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur de n , ne vérifiant pas la proposition.

Exercice 3.11 : On considère n cercles dans le plan de sorte que le nombre de points d'intersection de ces cercles deux à deux soit le plus grand possible. Déterminer en fonction de n le nombre de ces points d'intersection. Justifier tout ce que vous affirmez.



Exercice 3.12 : a) On considère l'ensemble $A = \{1 ; 2 ; 3\}$.

Déterminer tous les sous-ensembles que l'on peut former à partir de l'ensemble A et montrer qu'il y en a alors 8.

- b) Montrer par récurrence que:

Le nombre de sous-ensembles de tout ensemble de n éléments est égal à 2^n .

Exemple : Soit $x \in]-1 ; +\infty[$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad (\text{Inégalité de Bernoulli})$$



Jacques Bernoulli
1654 – 1705

Exercice 3.13 : Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $n \leq 2^n$.

Exercice 3.14 : Démontrer¹ que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $(2n)! \geq 2^n \cdot (n!)^2$.

Remarque : Soit j un entier positif, et supposons qu'à chaque entier $n \geq j$ est associé une proposition $p(n)$, le principe de preuve par **récur-**
rence peut être **étendu** pour englober cette situation. Pour dé-
montrer que la proposition $p(n)$ est vraie pour tout $n \geq j$, nous
employons les deux étapes suivantes, de la même manière que
vous l'avons fait pour $n \geq 1$.

1. $p(j)$ est une proposition vraie

2. $p(k) \Rightarrow p(k + 1)$ pour tout $\forall k \geq j$

Exercice 3.15 : Calculer le plus petit entier positif j pour lequel la proposition est vraie. Appliquer alors le principe de récurrence étendu pour démontrer cette proposition.

a) $n + 12 \leq n^2$

b) $2n + 2 \leq 2^n$

¹ On rappelle que $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$, expression que l'on appelle **n factorielle** ($\forall n \in \mathbb{N}^*$).
2MSPM – JtJ 2023

3.2 Retour aux suites

Exercice 3.16 : Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $u_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

a) Écrire les quatre premiers termes de cette suite

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n}{3n+1}$.

Exercice 3.17 : Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est définie par:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n + 1 \quad \text{pour tout } n \geq 1 \end{cases}$$

Deviner une expression pour le terme général puis la démontrer par récurrence.

Exemple : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = -5 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \quad \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a: $u_n = 8 \cdot 2^n - 7 \cdot 3^n$.

Exercice 3.18 : Une suite (u_n) est définie par:

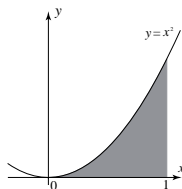
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 0 \\ u_{n+1} = 4u_n - 4u_{n-1} \quad \text{pour tout } n \geq 2 \end{cases}$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a: $u_n = (2-n) \cdot 2^{n-1}$.

Exercice 3.19 : Une suite (u_n) est définie par
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} \quad \text{pour tout } n \geq 2 \end{cases}$$

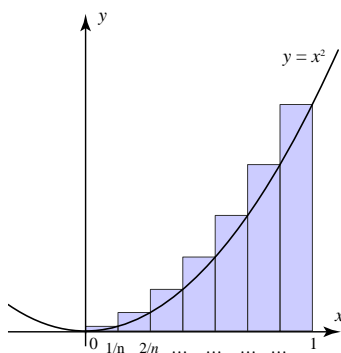
Deviner une expression pour le terme général puis démontrer qu'elle correspond $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Question : Comment calculer l'aire grisée située sous la parabole $y = x^2$?



Méthode : Les tranches de Tabit Ibn Qurra (908 – 946)

Les mathématiciens arabes du X^e siècle connaissaient très bien les formules donnant la somme des entiers, des carrés ou des cubes... :



$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

Ils eurent donc l'idée de découper en n tranches verticales la partie dont on cherche à calculer l'aire.

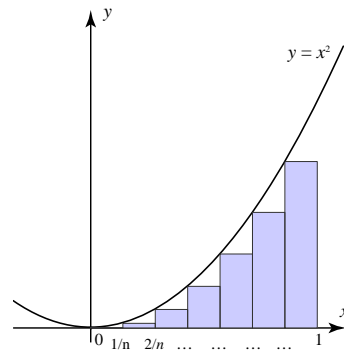
ainsi la somme des aires des n petites tranches d'épaisseur $1/n$ (que l'on appelle **somme supérieure**) vaut :



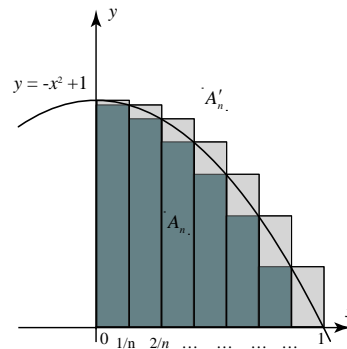
www.javmath.ch



Exercice 3.20 : Appliquer une démarche comparable pour la **somme inférieure** suggérée par la figure ci-dessous.



Exercice 3.21 : On cherche à calculer l'aire A de la surface comprise entre la parabole d'équation $y = -x^2 + 1$ et les axes du repère.



Pour cela, on a divisé l'intervalle $[0 ; 1]$ en n parties égales et l'on remarque que A est comprise entre l'aire A_n (somme inférieure) et l'aire A'_n (somme supérieure).

- Calculer A_n et A'_n
- Calculer A_n et A'_n pour $n = 10, 10^2$ puis 10^{10} . Quel résultat semble se dégager ?
- Justifier ce résultat par un calcul afin d'en déduire la valeur de A .