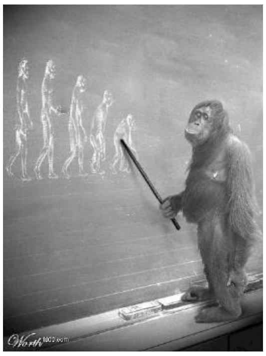
Chapitre 4: Croissance, divergence et convergence des suites

4.1 Quelques définitions

Définitions :



- Une suite est **croissante** si chaque terme est supérieur ou égal à son précédent : $u_{n+1} \geq u_n$ ou:
- Une suite est **décroissante** si chaque terme est inférieur ou égal à son précédent : $u_{n+1} \leq u_n$ ou:
- Une suite est **monotone** si elle est croissante ou si elle est décroissante.
- De manière analogue, on définit une suite strictement croissante, strictement décroissante ou strictement monotone lorsque l'inégalité qui lie ses termes est stricte.
- Une suite est **constante** si tous ses termes sont égaux.

Exemples :

a) La suite 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, … est une suite croissante.

b) La suite 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, … est une suite strictement décroissante.

c) Observer la croissance de la suite $u_n = |\, n - 4 \,|$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Cette suite n'est ni croissante ni décroissante. On dira cependant que cette suite est strictement croissante à partir de son terme de rang 4.

d) La croissance ou la décroissance d'une suite (u_n) peut être déterminée par **l'étude du signe** de $u_{n+1} - u_n$.

La suite (u_n) donnée par $u_n = n^2 - n + 3$ est strictement croissante, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$u_{n+1} - u_n =$

Exemples : **e)** La suite (u_n) donnée par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 3}{2} \end{cases}$ pour $n \geq 1$

est décroissante, car

$u_{n+1} - u_n =$

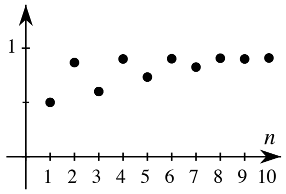
Exercice 4.1 : Les suites (u_n) suivantes sont-elles croissantes ? décroissantes ?

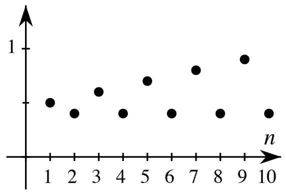
a) $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ **b)** $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

c) $u_n = \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$ **d)** $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{N}$

e) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{3} \end{cases}$, $n \geq 0$

Définitions :





- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que chaque terme de la suite est inférieur ou égal à ce nombre. Dans ce cas, le nombre M est appelé un **majorant** de la suite.
- La **borne supérieure** de la suite est le plus petit majorant de cette suite.
- Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que chaque terme de la suite est supérieur ou égal à ce nombre. Dans ce cas, le nombre m est appelé un **minorant** de la suite.
- La **borne inférieure** de la suite est le plus grand minorant de cette suite.
- Une suite est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples : La suite: 1 ; 1,1 ; 1,11 ; 1,111 ; 1,1111 ; … est une suite strictement croissante qui n'atteindra jamais la valeur 2. Elle est dite majorée par 2. Trouver d'autres majorants de cette suite et quel pourrait être le plus petit de tous les majorants ?

Théorème : Toute suite majorée possède un plus petit majorant. De même, toute suite minorée admet un plus grand minorant.

Preuve : Nous admettons ce théorème sans démonstration. Vous le démontrerez qu'une fois votre maturité en poche.

Exercice 4.2 : Reprendre les suites de l'exercice précédent ; sont-elles majorées ? minorées ? Indiquer les éventuelles bornes.
Indication : esquisser rapidement ces suites.

Exercice 4.3 : Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie pour tout entier $n > 0$ par :

$$u_1 = 0{,}1 \quad ; \quad u_2 = 0{,}11 \quad \text{etc…} \quad u_n = 0{,}1\ldots1 \text{ (} n \text{ chiffres 1)}$$

a) Montrer que cette suite est strictement croissante.
b) Cette suite semble-t-elle converger vers une valeur ?
c) Montrer que u_n peut s'écrire comme une somme de termes qui forment eux-mêmes une suite géométrique.
d) Trouver le terme général de la suite u_n.
e) Déterminer la borne supérieure de cette suite.
f) Qu'en est-il de la suite 1 ; 1,1 ; 1,11 ; …

Exercice 4.4 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{2n-7}{3n+2}$

a) Montrer que (u_n) est strictement croissante.

b) Démontrer que cette suite admet -1 pour minorant.

c) Quelle est la borne inférieure de la suite ?

Exercice 4.5 : Démontrer que 1/2 est un minorant de la suite $\left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 4.6 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \ , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

a) Écrire les quatre premiers termes de cette suite, puis les exprimer en puissance de 2.

b) Déterminer puis démontrer par récurrence le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Exprimer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de *n*.

d) En déduire que cette suite est croissante et majorée.

Exercice 4.7 : On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général *:*

$$s_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$$

a) Calculer s_1, s_2, s_3 et s_4.

b) Déterminer le plus petit terme figurant dans la somme définissant s_n.

c) Déterminer le plus grand terme figurant dans la somme définissant s_n.

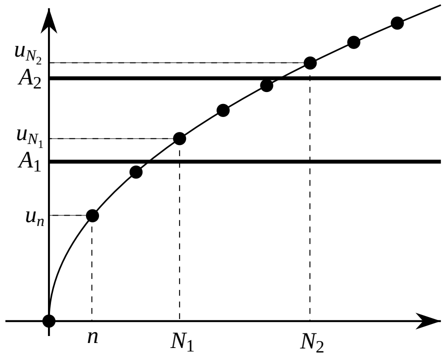
d) En déduire l'encadrement suivant : $\dfrac{n}{n+1} \leq s_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$

4.2 "Convergence" d'une suite vers +∞ ou -∞:

Exemple d'introduction : Considérons la suite $h_n = 5\sqrt{n}$.
Existe-t-il une valeur que h_n ne puisse dépasser ? Disons un milliard pour se fixer les idées.

Définition : Une suite (u_n) est dite **"convergente" vers +∞** si et seulement si, pour tout réel positif A, il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur ou égal à N, on a $u_n > A$.

En reprenant l'exemple précédent et en appliquant la définition précédente :



Quelle que soit la hauteur A de la "barre", à partir d'un certain indice N, on est sûr que les termes de la suite seront toujours au-dessus de A. Remarquons que la valeur de N dépend de la hauteur A que l'on veut dépasser.

Traduite en *langage symbolique*, la définition précédente devient :

Définition :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \geq N \ \Rightarrow\ u_n > A$$

Exemple: On considère la suite $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{2n^2}{n+1}$.

Calculer le plus petit entier naturel N tel que :

$$n \geq N \ \Rightarrow\ u_n > 1'000$$

Exercice 4.8 : On considère la suite $\left(u_n\right)_{\substack{n\in\mathbb{N}^* \\ n>1}}$ définie par $u_n = \dfrac{3n^2}{n-1}$.

Calculer le plus petit entier naturel N tel que :

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad u_n > 1\cdot 10^{10}$$

Exercice 4.9 : Déterminer un nombre entier naturel N tel que :

a) $n \geq N \;\Rightarrow\; (1{,}1)^n > 1'000$.

b) $n \geq N \;\Rightarrow\; (0{,}5)^n < 0{,}05$.

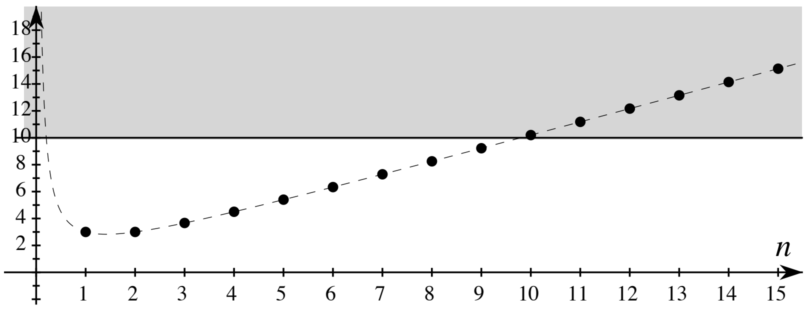
Ces suites sont-elles "convergentes" vers $+\infty$?

Exercice 4.10 : On considère la suite définie par $u_n = \dfrac{n^2+2}{n}$ pour $n \geq 1$

a) Calculer les 5 premiers termes de la suite et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b) Montrer que cette suite est monotone croissante.

c) En observant la représentation ci-dessous de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, quelle conjecture peut-on faire sur la limite de cette suite ?



d) On considère la bande $]10\ ;\ +\infty[$.
Montrer qu'à partir d'un certain indice n_0 à déterminer, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle.

e) Effectuer de même avec la bande $]A\ ;\ +\infty[$ avec $A > 10$.
Montrer qu'à partir d'un certain indice n_0 à déterminer en fonction de A, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle.

f) Que pouvez-vous affirmer au sujet de la convergence de la suite u_n ?

Exemple: Montrer que la suite (h_n) de terme général $h_n = 5n^2$ est "convergente" vers $+\infty$.

Exercice 4.11 : Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{3n^2 - 5}{4}$ est "convergente" vers $+\infty$.

Définition : Une suite (u_n) est dite **"convergente" vers -∞** si ses termes deviennent et restent inférieurs à tout nombre négatif donné arbitrairement.

Exercice 4.12 : Donner la définition précédente en *langage symbolique* en l'accompagnant d'une figure d'étude convaincante.

Exercice 4.13 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^* - \{1\}}$ définie par $u_n = \dfrac{n^2}{1-n}$.

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Calculer le plus petit entier naturel N tel que :

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad u_n < -1'000$$

c) Calculer le plus petit entier naturel N tel que :

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad u_n < A$$

Exercice 4.14 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \quad \text{pour } n \geq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que $u_n > 3 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $u_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3) \ \forall n \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que $u_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente, c'est-à-dire existe-t-il un nombre réel A tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = A$?

4.3 Convergence d'une suite vers un nombre

Exemple d'introduction : Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par $u_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

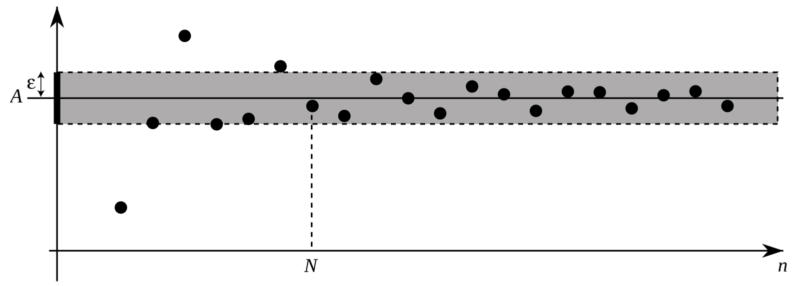
- Calculer les termes d'indice n = 1, 2, 3, 10, 100, 1'000. Quelle conjecture peut-on effectuer ?

- Esquisser cette suite :

On observe que les termes de cette suite (u_n) s'approchent de plus en plus du nombre 1/2 lorsque l'indice n devient grand.

Exemple (suite) : • Déterminer les indices n pour lesquels la différence entre 1/2 et u_n est inférieure à 1/100, puis 1/1000, puis 10^{-9}.

Définition : Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite. Un nombre réel A est appelé **limite de la suite** $\left(u_n\right)$ et on note $A = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, si u_n est arbitrairement proche de A dès que n est suffisamment grand. Lorsqu'une suite admet un nombre limite A, on dit qu'elle **converge** vers ce nombre.



Définition équivalente : On dit qu'une suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **converge vers le réel *A*** si et seulement si tout intervalle ouvert contenant A contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Traduites en *langage symbolique*, les définitions précédentes deviennent :

Définition :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = A$$

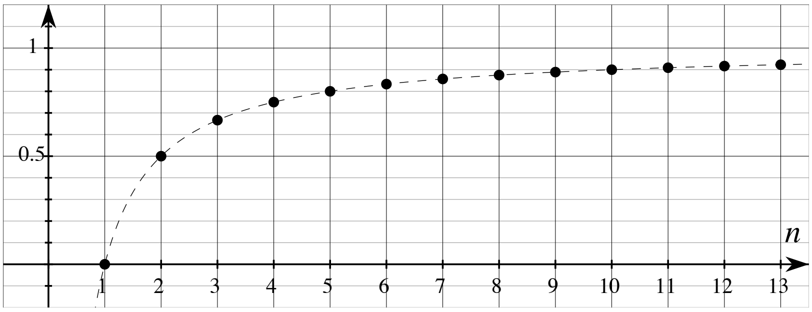
$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \geq N \ \Rightarrow\ A - \varepsilon < u_n < A + \varepsilon$$

Le nombre ε est un nombre strictement positif, il est arbitrairement petit. L'entier N indique un rang à partir duquel ($n \geq N$) tous les termes u_n sont « dans la bande » de demi-largeur ε centrée en A.

Remarque: Une suite qui n'est *pas "convergente" vers* $+\infty$ ou $-\infty$ et qui n'est *pas convergente* est appelée une **suite divergente**.

Exercice 4.15 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ représentée ci-dessous.



a) Vers quelle valeur cette suite semble-t-elle tendre ?

Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, déterminer N tel que :

b) $\forall n \geq N \;\Rightarrow$ les u_n sont compris dans une bande de demi-largeur $\varepsilon = 0{,}4$

c) $\forall n \geq N \;\Rightarrow$ les u_n sont compris dans une bande de demi-largeur $\varepsilon = 0{,}2$.

Exemple : La suite représentée dans l'exercice précédent est $u_n = \dfrac{n-1}{n}$.

Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$,

a) déterminer N tel que :

$\forall n \geq N \;\Rightarrow$ les u_n sont compris dans une bande de demi-largeur $\varepsilon = 10^{-9}$

b) déterminer N tel que :

$\forall n \geq N \;\Rightarrow$ les u_n sont compris dans une bande de demi-largeur ε

Exercice 4.16 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme général est :

$$u_n = \frac{-n+3}{n}$$

a) Vers quelle valeur cette suite semble-t-elle tendre ?

Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$, déterminer N tel que :

b) $\forall n \geq N \Rightarrow$ les u_n sont compris dans une bande de demi-largeur $\varepsilon = 0{,}1$

c) $\forall n \geq N \Rightarrow$ les u_n sont compris dans une bande de demi-largeur ε.

Exemple : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme général est donné par

$$u_n = \frac{-2n+1}{n}.$$

a) Vers quelle valeur semble converger cette suite ?

b) En utilisant la définition symbolique de la convergence d'une suite, montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 4.17 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{3n-1}{4n+5}$.

a) Écrire sous forme décimale les 1er, 10e, 1'000e et 10'000e termes de la suite. En déduire la valeur probable de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

b) En utilisant la définition de convergence en langage symbolique, déterminer $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq N\ ,\ A-\varepsilon < u_n < A+\varepsilon \text{ pour un } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$$

Théorème : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme général est $u_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0.

Exercice 4.18 : Démontrer le théorème précédent.

Exercice 4.19 : Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général :

$$u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

Et si vous considériez la suite $v_n = |u_n|$ *?*

Exercice 4.20 : Étudier la convergence de la suite $\left((-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 4.21 : Dans la littérature, la définition symbolique de la convergence d'une suite (u_n) est :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists p \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n > p \ \Rightarrow\ |u_n - a| < \varepsilon$$

Montrer que cette définition est équivalente à celles proposées dans le cadre de ce cours.

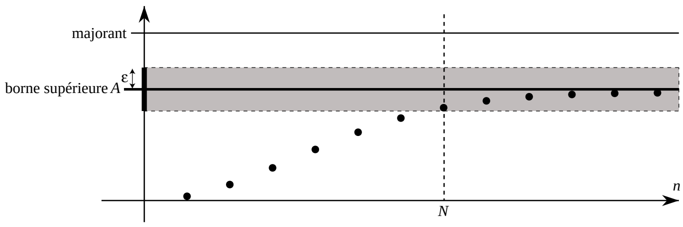
Exercice 4.22 : On considère la suite (u_n) convergente vers a.

Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1}$ converge vers un nombre dont on précisera la valeur.

4.4 Critères de convergence

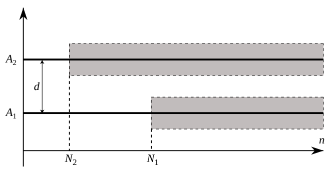
Théorème : • Une suite croissante et majorée converge.
• Une suite décroissante et minorée converge.
• Une suite monotone et bornée converge.

Preuve :



Théorème : Si une suite (u_n) converge vers A alors A est unique. On l'appelle donc <u>la</u> limite de la suite (u_n).

Exercice défi : Démontrer le théorème précédent en supposant par l'absurde qu'elle puisse converger vers 2 nombres différents A_1 et A_2 et en construisant une contradiction à l'aide de la figure ci-contre.



Théorème : La suite (u_n) converge vers 0 si et seulement si la suite $\left(|u_n|\right)$ converge vers 0.

Exercice défi : Démontrer le théorème précédent.

Théorème : Les puissances successives d'un nombre réel strictement positif et inférieur à 1 forment une suite convergente.

Preuve :

Théorème : Une suite convergente est bornée.

Remarque : Du théorème précédent, on en déduit un critère de divergence :

Une suite qui n'est pas bornée diverge.

Cette deuxième affirmation s'appelle la **contraposée** du théorème ci-dessus.

D'une implication, on peut toujours en proposer une deuxième qui s'appelle la contraposée :

Si A $\Rightarrow$ B	*alors*	*non B $\Rightarrow$ non A*
Si A implique B	*alors*	*non B implique non A*

Exemple : *Proposez la contraposée des affirmations suivantes au sujet d'un quadrilatère ABCD :*

- *Si ABCD est un rectangle alors il admet un angle droit.*
- *Si ABCD est un parallélogramme alors* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Théorème : Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.

Exercice 4.23 :

a) Proposer une figure d'étude permettant de visualiser le théorème précédent.

b) Que pouvez-vous affirmer au sujet de la suite $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$?

c) L'affirmation suivante est-elle exacte :

$$(u_n) \text{ bornée} \Leftrightarrow (u_n) \text{ convergente.}$$

Théorème : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites qui convergent respectivement vers a et b, et si λ est un nombre réel, alors :

1. La suite de terme général $u_n + v_n$ converge vers $a + b$.
2. La suite de terme général λu_n converge vers λa.
3. La suite de terme général $u_n \cdot v_n$ converge vers $a \cdot b$.
4. La suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers $\dfrac{a}{b}$,
si $b \neq 0$ et $v_n \neq 0$ pour tout n.

Si (u_n) est une suite qui converge vers a et que $\forall n$, $u_n \geq 0$, alors:

5. La suite de terme général $\sqrt{u_n}$ converge vers $\sqrt{a}$.

Exercice 4.24 :

a) Si (u_n) converge vers a et (v_n) converge vers b, montrer que $(u_n + v_n)$ converge vers $a + b$.

b) Si (u_n) est bornée et (v_n) converge vers 0, montrer que $(u_n \cdot v_n)$ converge vers 0.

c) En déduire que :

Si (u_n) converge vers a et (v_n) converge vers b, alors $(u_n \cdot v_n)$ converge vers $a \cdot b$.

Indication : Commencer par montrer que :

$$u_n \cdot v_n - a \cdot b = u_n (v_n - b) + (u_n - a) \cdot b$$

afin d'en déduire que $(u_n \cdot v_n - a \cdot b)$ *converge vers…*

Exercice 4.25 : Montrer que la proposition suivante est fausse.

Si (u_n) est bornée et (v_n) converge vers b, montrer que $(u_n \cdot v_n)$ converge.

Applications : *Rappelons que la suite* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *converge vers 0 et que toute suite constante ($u_n = \lambda$) converge vers λ.*

Vers quelles valeurs convergent les suites dont on donne le terme général :

a) $u_n = \dfrac{3n+1}{n}$

b) $u_n = \dfrac{-5n^2+3}{7n}$

c) $u_n = \dfrac{3}{n^2}$

d) $u_n = \dfrac{3n^2-5n+6}{2n^2-3}$

Exercice 4.26 : Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

a) $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$ **b)** $u_n = \dfrac{5-n^2}{3n^2+2} - \dfrac{2n+1}{n}$

Exercice 4.27 : Déterminer si les suites suggérées ci-dessous convergent ou divergent. Si elles convergent, trouver vers quelle valeur.

a) $\dfrac{7}{11}\,,\ \dfrac{9}{21}\,,\ \dfrac{11}{31}\,,\ \dfrac{13}{41}\,,\ \dfrac{15}{51}\,,\ \ldots$ **b)** $1\,,\ \dfrac{4}{3}\,,\ \dfrac{9}{5}\,,\ \dfrac{16}{7}\,,\ \dfrac{25}{9}\,,\ \ldots$

c) $-\dfrac{5}{6}\,,\ \dfrac{25}{36}\,,\ -\dfrac{125}{216}\,,\ \ldots$

Exercice 4.28 : Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

a) $u_n = \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ **b)** $u_n = \dfrac{1}{n}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$

Exercice 4.29 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par son terme général *:*

$$u_n = \sqrt{n^2+6n} - n$$

a) Conjecturer la limite de la suite à l'aide de la calculatrice.

b) Montrer que $u_n = \dfrac{6}{\sqrt{1+6/n}+1}$ et déduisez-en la limite.

Théorème des 2 gendarmes : Soient (u_n), (v_n), (w_n) des suites et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$
- $v_n \le u_n \le w_n$ (à partir d'un certain rang),

alors la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exemple : En utilisant le théorème des 2 gendarmes, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ est convergente.

Exercice défi : Démontrer le théorème précédent.

Exercice 4.30 : Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par leur terme général :

a) $u_n = \dfrac{1}{2^n}$

Indication : montrer que $2^n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ puis utiliser le théorème des 2 gendarmes.

b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + 5$

Exercice 4.31 : On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général *:*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$$

a) Montrer que $s_n \geq \dfrac{n}{n+1}$.

b) Montrer que $s_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$.

c) Après avoir observé que $\dfrac{n}{n+1} \leq s_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$, en déduire la limite de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4.32 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k}$.

Démontrer que (s_n) converge vers une limite que l'on précisera.

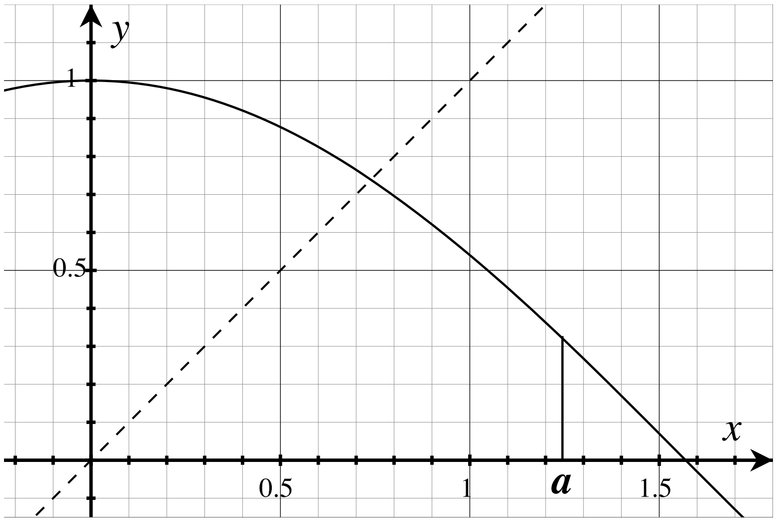
4.5 Convergence d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemple d'introduction : De nombreux algorithmes itératifs sont fondés sur des suites du type :

$$\begin{cases} u_0 = a \text{ (valeur initiale)} \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

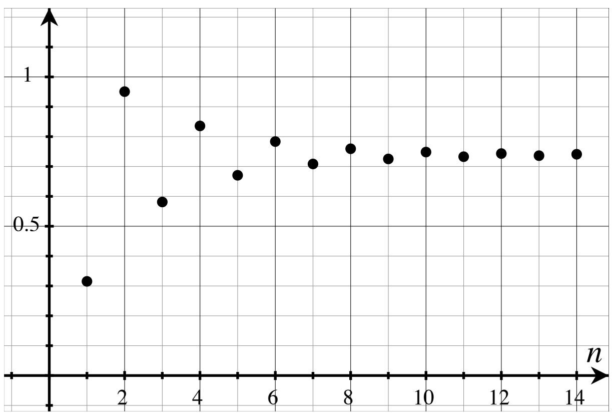
où f est une fonction réelle.

Pour $f(x) = \cos(x)$, on peut visualiser graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) sur le graphique ci-dessous:



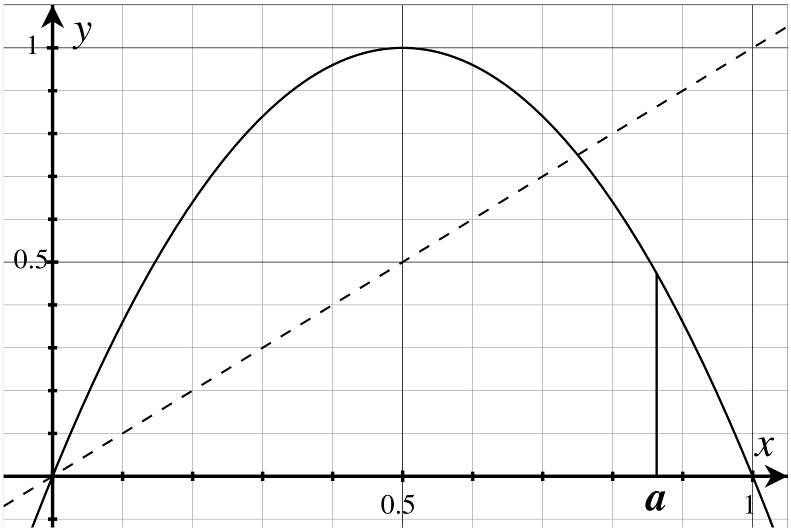
a) Quelle conjecture peut-on faire au sujet de cette suite ?

La représentation graphique de la suite u_n semble-t-elle confirmer votre conjecture ?

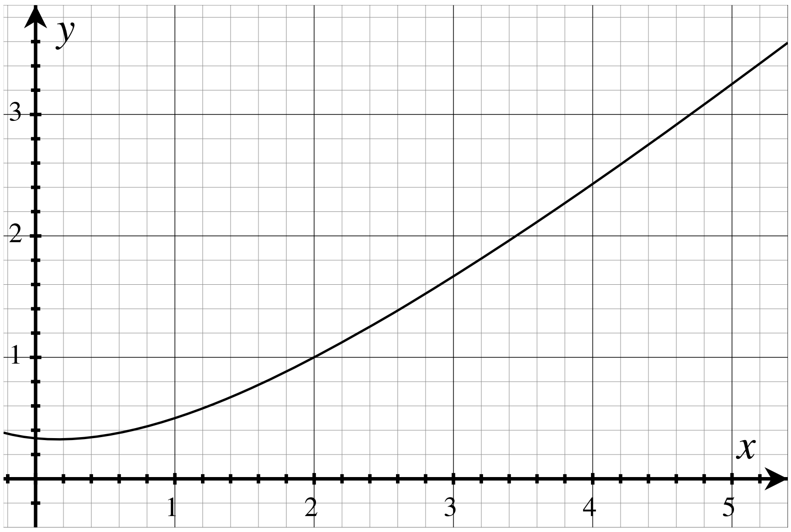


b) À la solution de quelle équation va correspondre $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?

Exercice 4.33 : Effectuer la même démarche avec $f(x) = 4(x - x^2)$ représentée ci-dessous :



Exemple de synthèse : On a représenté ci-dessous la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+3}$:



On considère la suite $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

a) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_1, u_2, u_3, u_4.

b) Construire sur le graphique la droite d d'équation $y = x$.

c) En vous aidant de la droite d, représenter sur l'axe des abscisses du graphique les 5 premiers termes de la suite (u_n).

Exemple (suite) : **d)** Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre la courbe de f et la droite d.

e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1/3$.

f) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

g) Quelle conjecture peut-on faire en ce qui concerne la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 4.34 : Soit la suite définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2} \end{cases}$

a) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2, u_3, u_4, u_5.

b) Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Résoudre $-x^2 + x + 2 \geq 0$, puis exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n. Déduire de ce qui précède que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n.

d) En déduire que cette suite est convergente.

e) En posant $a = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, justifier que cette suite converge vers la solution de l'équation : $a = \dfrac{3a+2}{a+2}$, que l'on calculera.

Exercice 4.35 : Soit la suite définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + u_n} \end{cases}$

a) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2, u_3, u_4, u_5.

b) Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

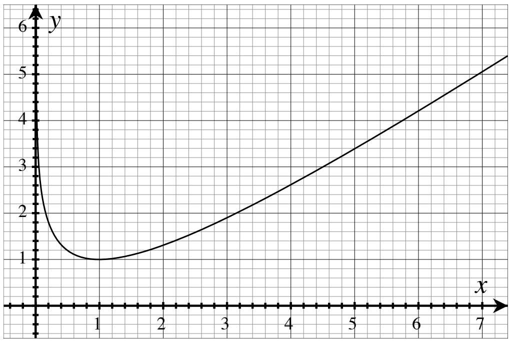
c) Cette suite est-elle décroissante ?

d) Cette suite semble-t-elle convergente ? Si oui, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

e) Estimer le nombre suivant : $p = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}$

Exercice 4.36 : On a représenté ci-dessous la fonction f définie par:

$$f(x) = x - \ln(x)$$



On considère la suite $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Au moyen du graphique ci-dessus (ou mieux algébriquement), déterminer le minimum de f sur $]0\,;+\infty[$, en déduire que pour tout n entier naturel, on a $u_n \geq 1$.

b) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n. Montrer que (u_n) est monotone décroissante.

c) Construire sur le graphique la droite d d'équation $y = x$.

d) En vous aidant de la droite d, représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n).

e) Montrer que cette suite est convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 4.37 : Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

On note f la fonction définie sur $[-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1}$

a) Représenter la courbe $y = f(x)$, la droite $y = x$ et les premiers termes de la suite u_n.

b) Quelles conjectures peut-on faire à partir de la représentation précédente ?

c) Montrer par récurrence que $0 \leq u_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

d) Montrer par récurrence que (u_n) est croissante.

e) Montrer que (u_n) est convergente.

f) En s'aidant de la représentation graphique, déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} u_n$$

g) Estimer le nombre suivant : $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}}$

Bibliographie et Ressources complémentaires:

1) E.W. SWOKOWSKI et J. A. COLE, “Algèbre”, LEP, 1998
2) A. WILLA, “Suites de nombres réels”, CRM, 2004
3) A. WILLA, “Séries numériques et séries de Taylor”, CRM, 2007

Sites WEB:

1) Ce polycopié en format PDF et quelques animations:

www.javmath.ch