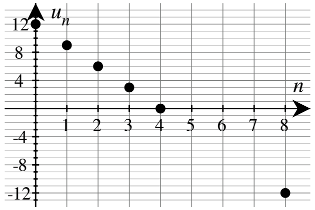
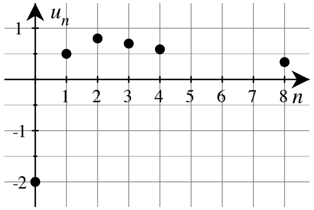
Éléments de réponses Chapitre 1:

Exercice 1.1 :

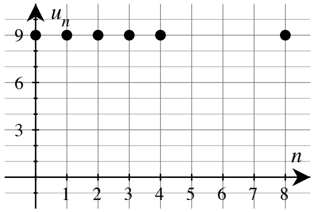
a) 12, 9, 6, 3, 0, …, -12



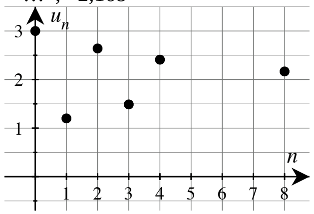
b) -2, 1/2, 4/5, 7/10, 10/17, …, 22/65



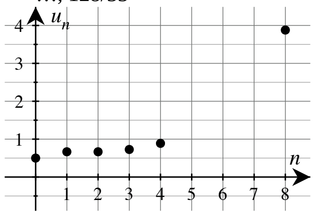
c) 9, 9, 9, 9, 9, …, 9



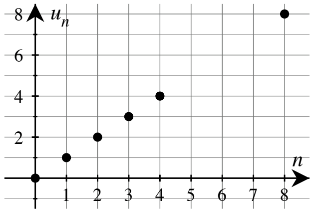
d) 3, 1,2 , 2,64 , 1,488 , 2,4096 , … , ~2,168



e) 1/2, 2/3, 2/3, 8/11, 8/9, …, 128/33



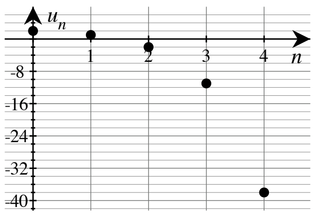
f) 0, 1, 2, 3, 4 , …, 8



Exercice 1.2 :

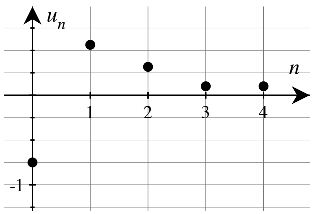
a) $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -2$

$u_3 = -11$, $u_4 = -38$



b) $u_0 = -3/4$, $u_1 = 9/16$, $u_2 = 81/256$

$u_3 = 6561/65536$, $u_4 \approx 0{,}010$

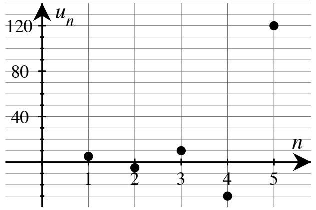


QUELQUES REPONSES AUX EXERCICES

Exercice 1.2 :

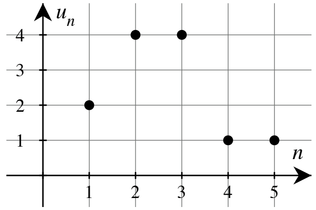
c) $u_1 = 5$, $u_2 = -5$, $u_3 = 10$

$u_4 = -30$, $u_5 = 120$



d) $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 4$

$u_4 = 1$, $u_5 = 1$



Exercice 1.3 :

a) $u_n = -n - 1$; $u_n = -n$

b) $u_n = 1 + (0{,}1)^{n+1}$; $u_n = 1 + (0{,}1)^n$

c) $u_n = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right)$; $u_n = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)$

d) $u_n = (-1)^n \cdot (n + 1)$; $u_n = (-1)^{n+1} \cdot (n)$

e) $u_n = 1 - (-0{,}1)^{n+1}$; $u_n = 1 - (-0{,}1)^n$

f) $u_n = -2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n$; $u_n = -2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Exercice 1.4 :

- On peut bien sûr imaginer que cette suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet comme terme général : $u_n = 2^n$, mais si le 6e terme vaut $u_5 = 31$??
  Je vous laisse y réfléchir dans l'exercice défi qui suit !!
- Même remarque. Il n'est pas certain qu'il s'agisse de $u_n = 3(n + 1)$.

Exercice 1.5 :

a) $u_0 = 3$, $u_1 = 3{,}142546543$, $u_2 = 3{,}141592653$,

$u_3 = 3{,}141592654$, $u_4 = 3{,}141592654$

b) Les termes de la suite convergent (s'approchent) de la valeur 2π.

Exercice 1.6 :

a) $u_1 = 0{,}4$ $u_2 = 0{,}7$ $u_3 = 1$ $u_4 = 1{,}6$
$u_5 = 2{,}8$ $u_6 = 5{,}2$ $u_7 = 10$ $u_8 = 19{,}6$

c) À voir ensemble

Exercice 1.7 : $u_1 = 2{,}5$, $u_2 = 2{,}25$, $u_3 = 2{,}236111$, $u_4 = 2{,}236068$

Ainsi $\sqrt{5} \approx 2{,}236068$

Exercice 1.8 :

a) $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_{12} = 144$

b) $\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \end{cases}$

Exercice 1.9 : **a)** -12 **b)** 25 **c)** 61 **d)** 150 **e)** 40

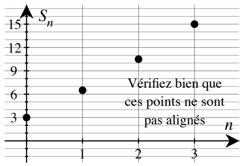
Exercice 1.10 : Il s'agit de créer une chaîne d'égalités :

$$\sum_{k=m}^{n} c = \sum_{k=1}^{n} c - \sum_{k=1}^{m-1} c = (n \cdot c) - ((m-1) \cdot c) = (n-m+1)c$$

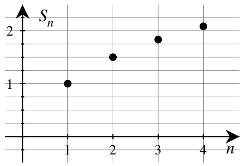
Exercice 1.11 : **a)** 319/3 **b)** 613,2

Exercice 1.12 : Dans les 2 cas, il s'agit de créer une chaîne d'égalités du même type que la preuve de (1).

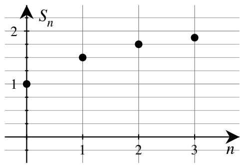
Exercice 1.13 : **a)** $S_0 = 3$, $S_1 = 13/2$, $S_2 = 21/2$, $S_3 = 15$



b) $S_1 = 1$, $S_2 = 3/2$, $S_3 = 11/6$, $S_4 = 25/12$



c) $S_0 = 1$, $S_1 = 3/2$, $S_2 = 7/4$, $S_3 = 15/8$



Exercice 1.14 : **a)** $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2\sum_{k=1}^{n} k = 2 \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = n(n+1)$

b) $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}k + 5\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}k + \sum_{k=1}^{n} 5 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k + 5n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + 5n = \underline{\underline{\frac{1}{4}n(n+21)}}$

c) $\sum_{k=12}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{11} k = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \left(\frac{132}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{(n-11)(n+12)}{2}}}$

Exercice 1.15 : Il s'agit de S car : S = 4'048'191'252 et T = 4'046'176'224

Exercice 1.16 : **a)** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$ **b)** $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{2}$

Exercice 1.17 : Et si aucune des 2 propositions n'était correcte !?!

Exercice 1.18 : Mais si cette série ne peut pas valoir -1, que peut-elle valoir ?

Éléments de réponses Chapitre 2:

Exercice 2.1 : **a)** Oui **b)** Non **c)** Oui

Exercice 2.2 : **a)** $r = a_{k+1} - a_k = 4$ ne dépendant pas de k, il s'agit bien d'une suite arithmétique de raison 4.
b) il s'agit d'une suite de raison r = -5.

Exercice 2.3 : En effet, $r = a_{k+1} - a_k = 2k + 1$ dépend de k.

Exercice 2.4 :

a) $a_5 = 18$ $a_{20} = 78$ $a_n = 2 + (n-1) \cdot 4$
b) $a_5 = 1,8$ $a_{20} = -2,7$ $a_n = 3 + (n-1) \cdot (-0,3)$
c) $a_5 = x + 12$ $a_{20} = x + 87$ $a_n = x - 8 + (n-1) \cdot 5$
d) $a_5 = \log(243)$ $a_{20} = \log(3^{20})$ $a_n = \log(3) + (n-1) \cdot \log(3) = \log(3^n)$

Exercice 2.5 : La raison vaut -8.

Exercice 2.6 : **a)** $a_{12} = -8,5$ **b)** $a_1 = -9,8$ **c)** $a_{15} = 551/17$

Exercice 2.7 : Il suffit de démontrer que $b_{k+1} - b_k$ ne dépend pas de k.
La raison de (b_n) est $-3r$.

Exercice 2.8 : La différence $b_{k+1} - b_k$ ne dépend pas de k. La raison de (b_n) est $2r^2$.

Exercice 2.9 : **a)** $S_{30} = -105$ **b)** $S_{10} = 30$

Exercice 2.10 : Un corrigé pourra être vu ensemble à votre demande.

Exercice 2.11 : **a)** 530 **b)** 423/2

Exercice 2.12 : **a)** $\sum_{k=1}^{4}(2k-1)$ ou $\sum_{k=0}^{3}(2k+1)$ **b)** $\sum_{k=1}^{75}2k$ ou $\sum_{k=0}^{74}2(k+1)$

c) $\sum_{k=1}^{6}\frac{3k}{4k+3}$ ou $\sum_{k=0}^{5}\frac{3k+3}{4k+7}$

Exercice 2.13 : Avec un minimum de calcul, vous obtiendrez rapidement $r = 4$, puis en utilisant une des formules des sommes partielles, $a_1 = 7$. Il s'agit donc de la suite $\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{k+1} = a_k + 4 \end{cases}$

Exercice 2.14 : L'expression d'une fonction affine est $f(n) = an + b$. Il reste à montrer que $f(k+1) - f(k)$ ne dépend pas de k.

Exercice 2.15 : Il y a 390 + 500 = 890 sièges.

Exercice 2.16 : la longueur totale est de 46,2π m.

Exercice 2.17 : la première récompense est de 800 fr.

Exercice 2.18 : Il s'agit de montrer que le $(k + 1)^{\text{ième}}$ terme est plus grand que le $k^{\text{ième}}$ terme d'une unité.

Exercice 2.19 : La longueur totale est de 680 cm.

Exercice 2.20 : **a)** $A_1 = \frac{8}{36},\ A_2 = \frac{7}{36},\ A_3 = \frac{6}{36},\ \ldots,\ A_8 = \frac{1}{36}$

b) Il s'agit d'une progression arithmétique de raison $r = -\frac{1}{36},\ S_8 = 1$.

c) 722,22 fr.

Exercice 2.21 :

a) $a_5 = 1/2$ $a_8 = 1/16$ $a_n = 8(1/2)^{n-1}$
b) $a_5 = 0,03$ $a_8 = -0,00003$ $a_n = 300(-0,1)^{n-1}$
c) $a_5 = 9$ $a_8 = -27\sqrt{3}$ $a_n = 1 \cdot \left(-\sqrt{3}\right)^{n-1}$
d) $a_5 = 81/4$ $a_8 = -2187/32$ $a_n = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
e) $a_5 = 2^{4x+1}$ $a_8 = 2^{7x+1}$ $a_n = 2^{(n-1)x+1}$
f) $a_5 = 1 \cdot 10^{-4}$ $a_8 = 1 \cdot 10^{-7}$ $a_n = 1 \cdot 10^{1-n}$

Exercice 2.22 : Il s'agit de montrer que $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ est une constante qui va correspondre à la raison r. Ici $r = -\frac{1}{4}$.

Exercice 2.23 : $r = \pm\sqrt{3}$

Exercice 2.24 : $a_7 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

Exercice 2.25 : $r = \sqrt[3]{3}$, $a_{10} = 36$

Exercice 2.26 : $S_{10} = \frac{1023}{512} \approx 1,998$

Exercice 2.27 : Il s'agit d'abord de montrer que ces calculs reviennent à calculer des sommes partielles de suite géométrique.

a) 88'572 **b)** $\frac{2223}{3125}$

Exercice 2.28 : **a)** $\sum_{k=1}^{7}2^k$ **b)** $\sum_{k=1}^{4}(-1)^{k+1}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ ou $\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

Exercice 2.29 : $d = \left[18 + 18\cdot\left(\frac{2}{3}\right) + \ldots + 18\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^9\right] + \left[12 + 12\cdot\left(\frac{2}{3}\right) + \ldots + 12\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^8\right]$

$= \frac{192734}{2187}$ m $\approx 88{,}127$ m

Exercice 2.30 : **a)** Le montant est de $0{,}01 \cdot 2^{14} = 163.84$ fr.
b) S_{30} = 10'737'418.23 fr.

Exercice 2.31 : **a)** On reconnaît une somme partielle d'une suite géométrique de premier terme a et de raison $(1 + i)$.
b) Il s'agit de manipuler l'équation:

$$V_0(1+i)^n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

c) $C_t(60)$ = 3'232,34 Frs et donc un intérêt d'environ 232,34 Frs.
d) a = 1'189,88 Frs et donc un intérêt d'environ 2835,68 Frs.

Exercice 2.32 : **a)** $\frac{13}{27}$, $\frac{121}{243}$, $\frac{29524}{59049}$, presque $\frac{1}{2}$.
b) Valeur probable : $\frac{1}{2}$.
c) Cette somme semble tendre vers $\frac{8}{3}$.

Exercice 2.33 : **a)** 2 **b)** $\frac{50}{33}$ **c)** $\frac{2}{3}$
d) Comme $r > 1$, cette somme n'existe pas. **e)** 1024

Exercice 2.34 : Distance totale = 144 cm.

Exercice 2.35 : **a)** $1{,}84 \cdot 10^{19}$ grains de blé.
b) La Suisse serait recouverte par une couche de 45 cm d'épaisseur.

Exercice 2.36 : **b)** 375 mg

Exercice 2.37 : **a)** $S_n = \frac{4}{\pi}C_n,\ C_n = \frac{\pi}{2}S_{n+1}$
b) Il s'agit de $\sum_{n=1}^{\infty}S_n - \sum_{n=1}^{\infty}C_n = \ldots = \frac{4-\pi}{2}S_1 \approx 43\%$ de S_1.

Exercice 2.38 : **a)** $a_{k+1} = \frac{1}{4}\sqrt{10}\cdot a_k$
b) $a_n = \left(\frac{1}{4}\sqrt{10}\right)^{n-1}\cdot a_1,\ A_n = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}\cdot A_1,\ P_n = \left(\frac{1}{4}\sqrt{10}\right)^{n-1}\cdot P_1$
c) $\sum_{n=1}^{\infty}P_n = \frac{16a_1}{4-\sqrt{10}}$ ou mieux $\sum_{n=1}^{\infty}P_n = \frac{8(\sqrt{10}+4)a_1}{3}$

Exercice 2.39 : **a)** $P_0P_1 = \frac{1}{2}a,\ P_1P_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a,\ P_2P_3 = \frac{3}{8}a$.
b) $P_nP_{n+1} = \frac{1}{2}a\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.
c) Longueur de la spirale : $(2+\sqrt{3})\cdot a$.

Exercice 2.40 : aire = $\frac{1}{4}a^2$, le périmètre = $(2+\sqrt{2})\,a$.

Exercice 2.41 : **a)** $a_k = 3^{k-1}$ **b)** $a_{15} = 3^{14}$ **c)** $\sum_{k=1}^{15}3^{k-1} = 7'174'453$
d) $b_1 = \frac{1}{4},\ b_2 = 3\cdot\frac{1}{16},\ b_3 = 9\cdot\frac{1}{64}$ qui se généralise en $b_k = \frac{3^{k-1}}{4^k}$.
La suite b_k est bien une suite géométrique, car elle peut s'écrire sous la forme : $b_k = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$.
e) $b_7 = 4{,}45\%$.
f) $\sum_{k=1}^{7}b_k = 0{,}8665$.
g) $1 - \sum_{k=1}^{\infty}b_k = 0$

Exercice 2.42 : **a)** $u_1 = 2/3 \quad u_2 = 2/5$
Cette suite n'est pas arithmétique, car $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.
b) $v_0 = 1/2$, $v_1 = 3/2$, $v_3 = 5/2$
L'étude de 3 termes de cette suite ne permet pas de conclure pour tout n.
d) $v_n = \frac{1}{2} + n,\ u_n = \frac{2}{1+2n}$

Exercice 2.43 : **a)** Il s'agit d'une suite géométrique de raison 1/2 et de premier terme 1.
b) $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n,\ u_n = e^{(1/2)^n}$
c) On pourra aussi montrer que $S_n = \ln(P_n)$.
d) $S_n = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right),\ P_n = e^{2\left(1-(1/2)^{n+1}\right)}$
e) Comme $(1/2)^{n+1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, S_n tend vers 2, et P_n vers e^2.

QUELQUES REPONSES AUX EXERCICES

Exercice 2.44 :

a) $u_1 = 3{,}6$ $u_2 = 4{,}88$ $u_3 = 5{,}904$

b) La suite (v_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout n entier naturel, on a: $v_{n+1} = q \cdot v_n \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a = -10$.

c) $v_0 = -8$, on obtient : $v_n = -8(0{,}8)^n$

d) $u_n = 10 + (-8)(0{,}8)^n$. La suite (v_n) géométrique de raison 0,8 converge vers 0. Ainsi (u_n) converge vers 10.

e) $T_n = -8\dfrac{1-(0{,}8)^{n+1}}{1-0{,}8} = -40\left[1-(0{,}8)^{n+1}\right]$, cette limite vaut -40.

f) $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(10+(-8)(0{,}8)^n\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} 10\right) + T_n = 10(n+1) - 40\left[1-(0{,}8)^{n+1}\right]$.

Cette limite vaut $+\infty$.

Exercice 2.45 :

a) $C_1 = 20'800$ $C_2 = 32'464$

b) $C_{n+1} = 1{,}08 \cdot C_n + 10'000$

c) Il s'agit de montrer que $V_{n+1} = 1{,}08 \cdot V_n$. Sa raison est 1,08.
$V_n = 135'000(1{,}08)^n$
$C_n = 135'000(1{,}08)^n - 125'000$

d) $C_{11} = 189'771$

Exercice 2.46 :

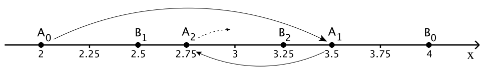
a) $P_1 = 56$, $P_2 = 57$, $P_3 = 58$

b) $P_{n+1} = (1{,}0125) \cdot P_n + 0{,}250$
La suite P_n n'est ni arithmétique, ni géométrique.

c) $a = 20$

d) $U_n = 75 \cdot (1{,}0125)^n$ $P_n = 75(1{,}0125)^n - 20$
20 ans

Exercice 2.47 :

a) 

b) Se montre en calculant $u_{n+1} - u_n$. Ainsi $u_n = 6$ pour tout n. Le milieu du segment $\overline{A_nB_n}$ se situe au point de coordonnée 3 et ceci pour tout n.

c) v_n est une suite géométrique de premier terme -2 et de raison -1/2. Cette distance va tendre vers 0.

d) $v_n = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

e) En utilisant les informations sur les suites u_n et v_n, vous obtiendrez :

$$a_n = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n,\ b_n = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

f) Ces 2 suites convergent vers le même nombre 3.

2MSPM – JtJ 2023

Éléments de réponses Chapitre 3:

Exercice 3.1 : **Attention :** *Seules quelques pistes algébriques sont proposées ici. Il manque tout l'habillage rigoureux d'une preuve par récurrence.*

a) $$1+2+3+\ldots+n+\boldsymbol{(n+1)}=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

b) $$1^2-2^2+3^2-\ldots+\boldsymbol{(-1)^{n+2}(n+1)^2}=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^{n+2}(n+1)^2$$
$$=(-1)^{n+1}(n+1)\left[\frac{n}{2}+(-1)(n+1)\right]$$
$$=(-1)^{n+1}(n+1)\left[\frac{n}{2}-\frac{2(n+1)}{2}\right]$$
$$=(-1)^{n+1}(n+1)\left[\frac{-n-2}{2}\right]$$
$$=(-1)^{n+2}\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]$$

c) $$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+\boldsymbol{(n+1)^3}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$$
$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4(n+1)^3}{4}$$
$$=\frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}$$
$$=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

d) $$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$$

Exercice 3.2 : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\cdot(i+1)}=\frac{n}{n+1}$. Formule qu'il reste à montrer par récurrence !!

Exercice 3.3 : Un corrigé pourra être vu ensemble à votre demande.

Exercice 3.4 : $\displaystyle 1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+n}=\frac{n^2}{1+2+3+\ldots+n}$ ou plutôt :

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+n}=\frac{2n}{(n+1)}$$

Formule qu'il reste à montrer par récurrence !!

Exercice 3.5 : **b)** Surtout pas, il aurait fallu commencer par vérifier que cette proposition est vraie pour n = 1. Ce qui n'est pas le cas ici. On voit l'importance de la 1[re] étape de la démonstration par récurrence !!!

Pour mémoire : $1+2+3+4+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

Exercice 3.6 : Un corrigé pourra être vu ensemble à votre demande.

Exercice 3.7 : **Attention :** *Seules quelques pistes algébriques sont proposées ici. Il manque tout l'habillage rigoureux d'une preuve par récurrence.*

a) $$8^{\boldsymbol{n+1}}-1=8\cdot 8^n-1=8\cdot 8^n-8+7=8(8^n-1)+7$$
$$=8(7\cdot\ldots)+7=\boldsymbol{7}(8\cdot\ldots+1)$$

b) $$(n+\boldsymbol{1})^2+5(n+\boldsymbol{1})=n^2+2n+1+5n+5=(n^2+5n)+(2n+6)$$
$$=2(\ldots\ldots)+2(n+3)=\boldsymbol{2}(\ldots+n+3)$$

c) $$(n+\boldsymbol{1})^3+5(n+\boldsymbol{1})=n^3+3n^2+3n+1+5n+5$$
$$=(n^3+5n)+(3n^2+3n+6)=3(\ldots\ldots)+3(n^2+n+2)$$
$$=\boldsymbol{3}(\ldots+n^2+n+2)$$

Exercice 3.8 : Un corrigé pourra être vu ensemble à votre demande.

Exercice 3.9 : **b)** Il s'agit de la formule de la $n^{\text{ième}}$ somme partielle S_n d'une suite géométrique de premier terme a et de raison r (page 22).

Exercice 3.10 : n = 41 nous fournit le contre-exemple.

Cette suite $u_n = n^2 - n + 41$ est due à Euler et permet d'obtenir une grande quantité de nombres premiers. En effet,

$n < 41$	donnent tous des nombres premiers
$n = 41$	$41^2 - 41 + 41 = 41^2$ qui est donc non premier !
$n > 41$	Grande proportion de nombres premiers
$n < 1'000$	Probabilité de fournir un nombre premier est d'environ 50%

Exercice 3.11 : Par un raisonnement géométrique, montrer que cette suite peut se définir par récurrence ainsi : $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n \end{cases}$

Observer alors que le terme général de cette suite semble être : $u_n = n \cdot (n-1)$ qu'il reste à démontrer par récurrence.

Exercice 3.12 : **a)** Il s'agit des 8 sous-ensembles suivants:

$$\{1\,;2\,;3\},\ \{1\,;2\},\ \{1\,;3\},\ \{2\,;3\}\ ,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \varnothing$$

b) Un corrigé pourra être vu ensemble à votre demande.

Exercice 3.13 : **Attention :** *Seules quelques pistes algébriques sont proposées ici. Il manque tout l'habillage rigoureux d'une preuve par récurrence.*

$$n + \mathbf{1} < 2^n + 1 < 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Exercice 3.14 : Un corrigé pourra être vu ensemble à votre demande.

Exercice 3.15 : **a)** Cette proposition est vraie $\forall n \geq 4$.
b) Cette proposition est vraie $\forall n \geq 3$.
Il reste à démontrer ceci à l'aide de récurrences.

Exercice 3.16 : **a)** 1/4 ; 1/28 ; 1/70 ; 1/130

Exercice 3.17 : $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (Formule de Gauss).
Il reste à démontrer votre expression à l'aide d'une récurrence.

Exercice 3.18 : Un corrigé pourra être vu ensemble à votre demande.

Exercice 3.19 : $u_n = n$
Il reste à démontrer que votre expression correspond $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3.20 : $S_n = \dfrac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3}$ ainsi l'aire vaut également 1/3.

Exercice 3.21 : **a)** $A_n = \dfrac{\left(4 - \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{6}$, $A_n' = \dfrac{\left(4 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{6}$

b) $A_{10} = \frac{123}{200} = 0{,}615$, $A_{10^2} = \frac{13233}{20000} \approx 0{,}662$, $A_{10^{10}} \approx 0{,}667$

$A_{10}' = \frac{143}{200} = 0{,}715$, $A_{10^2}' = \frac{13433}{20000} \approx 0{,}672$, $A_{10^{10}}' \approx 0{,}667$

L'aire A étant "emprisonnée" entre les 2 valeurs A_n' et A_n, c'est-à-dire $A_n \leq A \leq A_n'$, et que ces 2 valeurs tendent vers 0,667, on peut supposer que $A \approx 0{,}667$

c) $A = 2/3$

Éléments de réponses Chapitre 4:

Exercice 4.1 : **a)** croissante **b)** ni croissante, ni décroissante

c) croissante *et si vous calculiez* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$*, qu'en déduisez-vous ?*

d) ni croissante, ni décroissante **e)** décroissante *(avec récurrence)*

Exercice 4.2 : **a)** minorée et majorée ; borne inférieure vaut 0, borne supérieure vaut 1.

b) minorée et majorée ; borne inférieure vaut 0, borne supérieure vaut 3/2.

c) minorée et non majorée ; borne inférieure vaut 1/2, pas de borne supérieure.

d) minorée et majorée ; borne inférieure vaut -1, borne supérieure vaut 1.

e) minorée et majorée ; borne inférieure vaut -1, borne supérieure vaut 3.

Exercice 4.3 : **a)** $u_{n+1} - u_n = 0{,}\underbrace{0\ \dots\ 0}_{n \text{ décimales}}\mathbf{1}$

b) Oui, car elle est croissante et majorée par 2 (par exemple).

c) $u_n = 0{,}1 + 0{,}01 + \dots + 0{,}00\dots01 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k}$

d) $u_n = 0{,}1 \cdot \frac{1-0{,}1^n}{1-0{,}1} = \frac{1}{9}(1-0{,}1^n)$

e) borne supérieure est de 1/9.

f) elle admettra 1+1/9 comme borne supérieure.

Exercice 4.4 : **a)** $u_{n+1} - u_n = \frac{25}{(3n+2)(3n+5)} > 0$

b) Étant strictement croissante, elle est minorée par son premier terme $u_1 = -1$.

c) La valeur -1 est la borne inférieure.

Exercice 4.5 : Il s'agit d'abord de montrer que cette suite (u_n) est croissante en vérifiant que $u_{n+1} - u_n > 0$, puis d'en calculer son 1[er] terme.

Exercice 4.6 : **a)** $u_1 = \sqrt{2} = 2^{1/2}$

$u_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^3} = 2^{3/4}$

$u_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7} = 2^{7/8}$

$u_4 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2} = \sqrt[16]{2^{15}} = 2^{15/16}$

Exercice 4.6 : **b)** $u_n = \sqrt[2^n]{2^{2^n-1}} = 2^{\frac{2^n-1}{2^n}}$

c) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}}}{2^{\frac{2^n-1}{2^n}}} = 2^{\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} - \frac{2^n-1}{2^n}} = \dots = 2^{\frac{1}{2^{n+1}}}$

d) u_n est croissante: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2^{\frac{1}{2^{n+1}}}$ est toujours supérieur à 1 car $\frac{1}{2^{n+1}} > 0$.

u_n est majorée par la valeur 2 car:

l'exposant $\frac{2^n-1}{2^n}$ du terme général $u_n = 2^{\frac{2^n-1}{2^n}}$ est plus petit que 1.

Exercice 4.7 : **a)** $s_1 = 1/2,\ s_2 = 11/15,\ s_3 = 181/220,\ s_4 = 12'617/14'535$

b) le plus petit terme de cette somme est le dernier $\frac{n}{n^2+n}$.

c) le plus grand terme de cette somme est le premier $\frac{n}{n^2+1}$.

d)

$$s_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \geq \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$$

$$\geq n \cdot \frac{n}{n^2+n} = \frac{n}{n+1}$$

$$s_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+1}$$

$$\leq n \cdot \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}$$

Exercice 4.8 : N = 3'333'333'333.

Exercice 4.9 : **a)** $N = [\ln(1'000)/\ln(1{,}1)] + 1 = 73.$

b) $N = [\ln(0{,}05)/\ln(0{,}5)] + 1 = 5.$

c) La première suite est bien "convergente" vers +∞, pas la deuxième.

Exercice 4.10 : **a)**

n	1	2	3	4	5
u_n	3,00	3,00	3,67	4,50	5,40

b) Il s'agit de montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

c) La suite semble "converger" vers +∞.

d) $u_n > 10 \Leftrightarrow n^2 - 10n + 2 > 0 \Rightarrow n_0 = [5 + \sqrt{23}] + 1 = 10.$

e) $u_n > A \Rightarrow n_0 = \left[\frac{A + \sqrt{A^2 - 8}}{2}\right] + 1.$

f) La suite "converge" vers +∞.

Exercice 4.11 : Il s'agit donc de montrer pour tout réel positif A, il existe un entier N (que l'on va exhiber) tel que pour tout entier n supérieur ou égal à N, on a $u_n > A$. Il s'agira de $N = \left[\dfrac{\sqrt{3(4A+5)}}{3}\right] + 1$

Exercice 4.12 :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall A \in \mathbb{R}_-,\ \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \geq N \ \Rightarrow\ u_n < A$$

Exercice 4.13 : **a)** Un petit tableau de signes de l'expression $u_{n+1} - u_n$ permet de s'en convaincre.
b) $N = 999$
c) $N = \left[\dfrac{-A+\sqrt{A(A+4)}}{2}\right] + 1$

Exercice 4.14 : **a)** Par une récurrence, supposer que $u_n > 3$ et montrer que $u_{n+1} - 3 > 0$.
b) Étudier le signe de $u_{n+1} - \frac{3}{2}(u_n - 3) - 3$.
c) Par une récurrence, supposer que $u_n - 3 > \left(\frac{3}{2}\right)^n$ et montrer que $u_{n+1} - 3 > \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$ en utilisant la majoration démontrée en **b)**.
d) Elle ne peut pas être convergente, car elle est plus grande ou égale à une expression dont la limite "converge" en $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

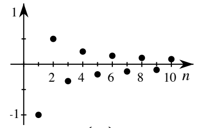
Exercice 4.15 : **a)** elle semble tendre vers $A = 1$.
b) $N = 3$.
c) $N = 6$.

Exercice 4.16 : **a)** elle semble tendre vers $A = -1$ *(par exple : $u_{100} = -0{,}97$, $u_{1000} = -0{,}997$).*
b) $N = 31$.
c) $N = [3/\varepsilon] + 1$.

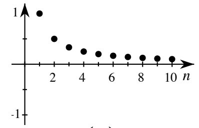
Exercice 4.17 : **a)** $u_1 \cong 0{,}22$, $u_{10} \cong 0{,}64$, $u_{1'000} \cong 0{,}749$, $u_{10'000} \cong 0{,}750$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{4}$ probablement.
b) il s'agira de considérer $N = \left[\dfrac{19 - 20\cdot\varepsilon}{16\cdot\varepsilon}\right] + 1$.

Exercice 4.18 : Cette preuve sera vue ensemble.

Exercice 4.19 : Cette suite converge vers 0.



(u_n)



(v_n)

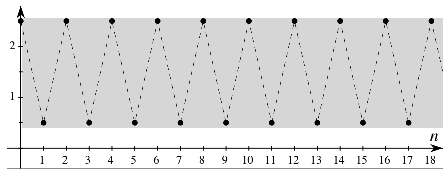
Question : Seriez-vous tenté d'affirmer que si la suite $(|u_n|)$ converge vers 0, alors la suite (u_n) aussi ?

Exercice 4.20 : Cette suite ne converge pas.

Exercice 4.21 : Le corrigé de cet exercice sera vu ensemble.

Exercice 4.22 : Le corrigé pourra être vu ensemble à votre demande.

Exercice 4.23 : **a)**



b) Il s'agit d'un exemple de suite bornée non convergente.
c) Non. **convergente ⇒ bornée** **<u>mais</u>** **bornée ⇏ convergente.**

Exercice 4.24 : **a)** Une bonne figure d'étude permet de déterminer la valeur de N tel que …
b) Comme la suite u_n est bornée, $|u_n| \leq B$, il ne restera plus qu'à exhiber la valeur de N tel que …
c) Tout est dit dans l'indication… non ?

Exercice 4.25 : Il suffit donc de trouver un contre-exemple à cette proposition :
Et si vous jetiez un coup d'œil à l'exercice 4.20.

Exercice 4.26 : **a)** la suite (u_n) converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$,
b) la suite (u_n) converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -7/3$.

Exercice 4.27 : **a)** Terme général: $u_n = \dfrac{2n+5}{10n+1}$ pour $n \geq 1$, elle converge vers 1/5.

b) Terme général: $u_n = \dfrac{n^2}{2n-1}$ pour $n \geq 1$, elle "converge" vers $+\infty$.

c) Terme général : $u_n = (-1)^n\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ pour $n \geq 1$, elle converge vers 0.

Exercice 4.28 : **a)** La suite (u_n) converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. *(application de l'exercice 4.24 b)*

b) Il s'agit de montrer dans un premier temps que la suite (v_n) définie par $v_n = 1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est bornée. Plusieurs démarches possibles…

Vous en déduirez que la suite (u_n) converge, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 4.29 : **a)** Conjecture : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

b) Dans le développement du calcul, n'oubliez pas que :

$$\sqrt{n^2+6n} = |\,n\,|\cdot\sqrt{1+6/n}$$

Vous obtiendrez alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{\sqrt{1+6/n}+1} = \dfrac{6}{2} = 3$.

Exercice 4.30 : **a)** la suite (u_n) converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, *(cf. aussi l'exercice 3.13)*

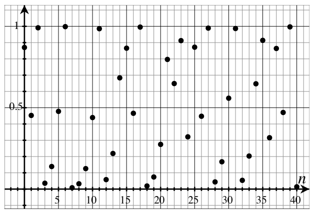
b) la suite (u_n) converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$.

Exercice 4.31 : **a)**, **b)** et début du **c)** ont déjà été effectués dans un exercice précédent.

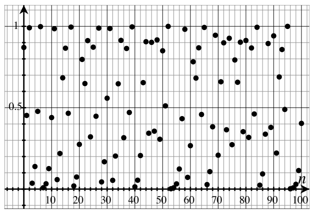
c) En appliquant le théorème des 2 gendarmes: $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 1$

Exercice 4.32: Il s'agit d'abord de montrer que $\dfrac{1}{n+1} \leq s_n \leq \dfrac{n}{n^2+1}$ puis par le théorème des 2 gendarmes, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0$.

Exercice 4.33: Ici, la suite ne converge pas, elle admet un comportement chaotique. Voici la représentation graphique de cette suite :



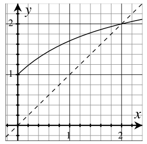
(u_n) *pour* $n \in [0\,;\,40]$



(u_n) *pour* $n \in [0\,;\,100]$

Exercice 4.34 : **a)** $u_2 = \dfrac{5}{3} \cong 1{,}667$, $u_3 = \dfrac{21}{11} \cong 1{,}909$, $u_4 = \dfrac{85}{43} \cong 1{,}977$, $u_5 = \dfrac{341}{171} \cong 1{,}994$

b) en deux temps, montrer que si $u_n \geq 0$, alors $u_{n+1} \geq 0$;
montrer que si $u_n \leq 2$, alors $u_{n+1} - 2 \leq 0$.



c) $-x^2 + x + 2 \geq 0 \;\Rightarrow\; S = [-1\,;\,2]$.

Comme $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2}$, on en déduit bien que $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

d) Cette suite est croissante et bornée donc ………

e) Comme $a = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = a$ *(application de l'exercice 4.22)*

Ainsi par la définition de la suite : $u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{u_n+2}$, on obtient bien l'équation voulue.

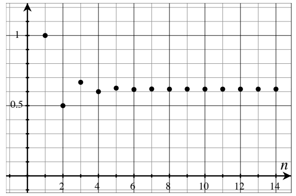
Graphiquement, elle correspond à l'intersection de $y = x$ et $y = \dfrac{3x+2}{x+2}$.

Cette limite vaut $a = 2$.

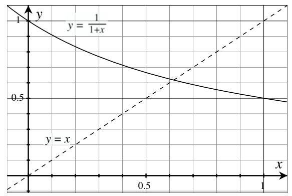
Exercice 4.35 : **a)** $u_2 = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$, $u_3 = \dfrac{2}{3} \cong 0{,}667$, $u_4 = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$, $u_5 = \dfrac{5}{8} = 0{,}625$

b) en deux temps, montrer que si $u_n \geq 0$, alors $u_{n+1} \geq 0$;
montrer que si $u_n \leq 1$, alors $u_{n+1} - 1 \leq 0$.

c) Non, le calcul d'autres termes de la suite montrera que :



d) Oui, comme le suggère le graphe suivant, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$:



e) $p = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

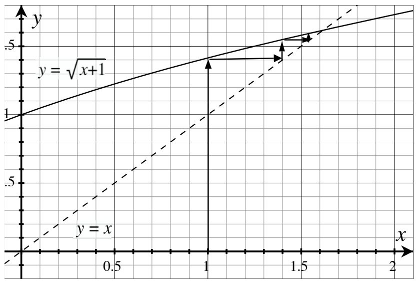
Exercice 4.36 : **a)** Min(1 ; 1)

b) $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n) \leq 0$, car $u_n \geq 1$.

d) $u_1 \cong 5$, $u_2 \cong 3{,}4$, $u_3 \cong 2{,}2$, $u_4 \cong 1{,}2$

e) La suite étant décroissante et bornée, elle converge. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 4.37 : **a)**



b) La suite (u_n) converge.

c) En deux temps: • montrer que si $u_n \geq 0$, alors $u_{n+1} \geq 0$;
• montrer que si $u_n < 2$, alors $u_{n+1} - 2 \leq 0$.

d) Montrer que $u_{n+2} - u_{n+1} = \ldots = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{\sqrt{u_{n+1} + 1} + u_{n+1}}$ et conclure à l'aide de l'hypothèse de récurrence.

e) Elle converge, car elle est croissante et bornée.

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

g) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ (nombre d'or).