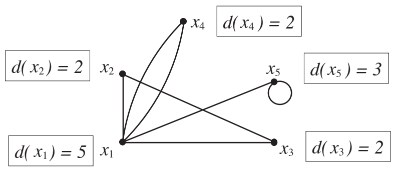
Chapitre 3: Quelques caractéristiques permettant de différencier les graphes

3.1 Le degré d'un sommet

Définition Soit $G(X, A)$ un graphe simple, et x un sommet de ce graphe. **Le degré de *x***, noté $d(x)$, est le nombre d'arêtes incidentes à x.

Exemples **1)**

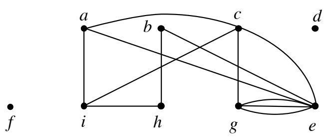


2) Si x est un sommet de C_n, $d(x) = 2$.

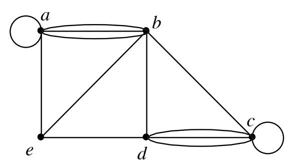
3) Si x est un sommet de K_n, $d(x) = n - 1$.

Exercice 13 Pour les 2 graphes suivants, déterminer le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et le degré de chaque sommet.

a)



b)



c) Calculer la somme des degrés des sommets de chacun des graphes.
d) Cette valeur était-elle prévisible ?

Exercice 14 Combien y a-t-il d'arêtes dans un graphe comportant 10 sommets, chacun de degré 6.

Exercice 15 Combien d'arêtes un graphe contient-il s'il a des sommets de degré 4, 3, 3, 2, 2 ? Tracer un tel graphe.

Question Soit $G = (X, A)$ un graphe admettant 4 sommets et 6 arêtes, que peut-on affirmer au sujet de la somme des degrés de chaque sommet du graphe ?

Théorème des poignées de main

Soit $G = (X, A)$ un graphe alors :

$$\sum_{x_i \in X} d(x_i) = 2 \cdot \mathrm{Card}(A)$$

Rappel: Card(A) = nbre d'éléments de l'ensemble A.

Preuve

En effet, chaque paire $\{x_i, x_j\}$ de A est comptée deux fois, une fois pour $d(x_i)$ et une seconde fois pour $d(x_j)$.

Dans le cas d'une boucle en x_i, celle-ci contribue pour 2 dans le degré du sommet x_i.

Application

Dans tout graphe $G(X, A)$, il y a un nombre pair de sommets de degré impair.

Preuve

Cette preuve est demandée en exercice. En voici une indication:
l'ensemble X doit être décomposé en deux sous-ensembles P et I où P est l'ensemble des sommets de degré pair et I l'ensemble des sommets de degré impair. On appliquera ensuite le Théorème des poignées de main.

Exercice 16 Démontrer que dans tout graphe $G(X, A)$, il y a un nombre pair de sommets de degré impair (cf. indication ci-dessus).

Exercice 17 Une ligue de football comporte 5 équipes. Le bureau de la ligue désire organiser un tournoi d'avant saison permettant à chaque équipe de jouer 3 matchs contre 3 équipes. Comment l'organiser ?

Exercice 18 Montrer que le nombre total de gens qui ont habité la Terre et qui ont donné un nombre impair de poignées de main est pair.

Exercice 19 Existe-t-il un graphe simple avec 5 sommets ayant les degrés suivants ? Si c'est le cas, tracer ce graphe :

a) 3, 3, 3, 3, 2 **b)** 1, 2, 3, 4, 5
c) 0, 1, 2, 3, 4 **d)** 3, 4, 3, 4, 3

Exercice 20 Montrer que dans un groupe de personnes, il y a toujours deux personnes ayant le même nombre d'amis présents.

Définition

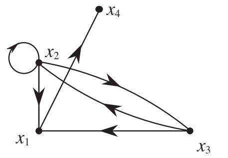
Soit x un sommet d'un graphe orienté. On note $d^+(x)$ le nombre d'arcs ayant x comme extrémité initiale, et $d^-(x)$ le nombre d'arcs ayant x comme extrémité finale. Ainsi on a :

$$d(x) = d^+(x) + d^-(x)$$

Exemple Les degrés respectifs du pseudographe orienté sont :

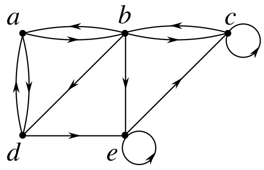
$d^-(x_1) = 2$ $d^-(x_2) = 2$ $d^-(x_3) = 1$ $d^-(x_4) = 1$

$d^+(x_1) = 1$ $d^+(x_2) = 3$ $d^+(x_3) = 2$ $d^+(x_4) = 0$



Un pseudographe orienté

Exercice 21 Soit le pseudographe représenté ci-contre, déterminer $d^+(x_i)$ et $d^-(x_i)$ pour chaque x_i sommet du pseudographe.



Justifier que $\sum\limits_{x_i \in X} d^-(x_i) = \sum\limits_{x_i \in X} d^+(x_i)$

Exercice 22 Soit $G(X, A)$ un graphe orienté. Alors, montrer que :

$$\sum_{x_i \in X} d^-(x_i) = \sum_{x_i \in X} d^+(x_i) = Card(A)$$

3.2 Les matrices associées à un graphe

Définition Soit $G(X, A)$ un graphe simple <u>non orienté</u>, : avec $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. La **matrice d'adjacence** du graphe G est la matrice $A(G)$ dont les coefficients sont définis par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{x_i, x_j\} \text{ est une arête} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

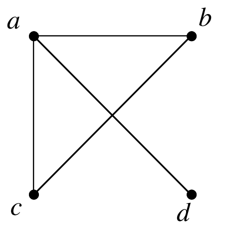
Dans le cas d'un multigraphe ou d'un pseudographe, les coefficients sont définis par :

$$a_{ij} = \begin{cases} n & \text{s'il existe } n \text{ arêtes entre } x_i \text{ et } x_j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Exemples **1)** Déterminer la matrice d'adjacence du graphe représenté ci-contre.

Solution: On ordonne les sommets dans l'ordre a, b, c et d. La matrice est donc:

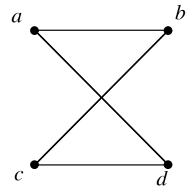
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

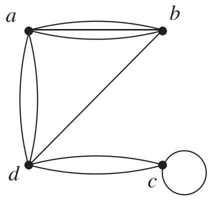


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Déterminer le graphe dont la matrice d'adjacence est représentée ci-contre.

Solution: En considérant les sommets a, b, c et d, on obtient:





3) Déterminer la matrice d'adjacence du pseudographe représenté ci-contre.

Solution: On ordonne les sommets dans l'ordre a, b, c et d. La matrice est donc:

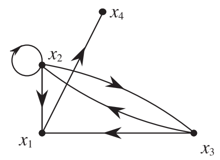
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition Soit $G(X, A)$ un graphe orienté, : avec $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
La **matrice d'adjacence** du graphe G est la matrice $A(G)$ dont les coefficients sont définis par :

$$a_{ij} = \begin{cases} n & \text{s'il existe } n \text{ arcs de } x_i \text{ à } x_j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Exemples Déterminer la matrice d'adjacence du graphe représenté ci-contre.

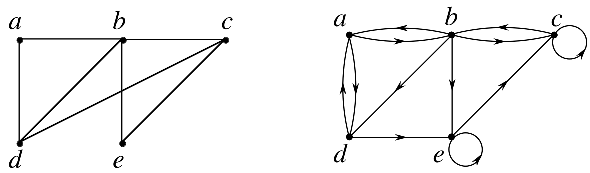
Solution: On ordonne les sommets dans l'ordre x_1, x_2, x_3 et x_4. La matrice est donc:



$a_{14} = 1$ car arc (x_1, x_4)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 23 Déterminer les matrices d'adjacence des 2 graphes suivants:



Exercice 24 Justifier l'affirmation suivante:

La matrice d'adjacence d'un graphe simple est symétrique.

Exercice 25 Représenter chacun des graphes suivants au moyen d'une matrice :
a) K_4 **b)** $K_{1,3}$ **c)** C_4

Exercice 26 **a)** Tracer le graphe de la matrice d'adjacence proposée :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Justifier pour quelle raison le graphe est obligatoirement orienté.

b) Tracer le graphe non orienté de la matrice d'adjacence proposée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Tracer le pseudographe orienté de la matrice d'adjacence proposée :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 27 Soit la matrice d'adjacence $A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Représenter le graphe G correspondant.

b) Calculer $A^2(G)$ (produit matriciel $A \cdot A$).

c) Représenter le graphe de A^2 et interpréter celui-ci par rapport à G.

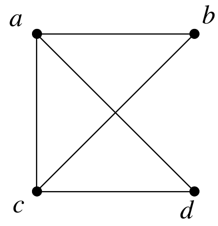
3.3 Dénombrement de chemins de longueur fixée

Nous évoquons ici une application inattendue du calcul matriciel. Il est possible de déterminer le nombre de chemins de longueur p reliant deux sommets x_i, x_j en calculant la puissance $p^{ième}$ de la matrice d'adjacence.

Définitions On appelle **chaîne** (resp. **chemin)**, une suite de sommets reliés par des arêtes (resp. arcs) dans un graphe non orienté (resp. orienté).

On appelle **longueur** d'une chaîne (resp. d'un chemin), le nombre d'arêtes (resp. arcs) qui le composent.

Exemple Les puissances successives de la matrice associée au graphe ci-contre

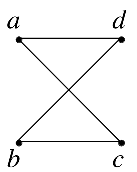


a) Déterminer la matrice d'adjacence A.

b) Déterminer A^3.

c) Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant a à d.

Exemple Déterminer le nombre de chaînes de longueur 4 allant de a à b dans le graphe ci-contre:

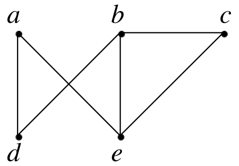


Solution: La matrice d'adjacence est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il faut calculer (avec courage) la matrice $M^4 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix}$.

Le nombre de chemins cherchés est le terme $m_{1,2}$ de la matrice, c'est-à-dire 8.

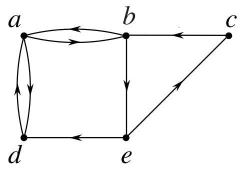
Exercice 28 Les listes de sommets suivants forment-elles des chaînes dans le graphe ci-contre ? Quelles sont les longueurs de celles qui sont des chaînes:



a) a, e, b, c, b

b) e, b, a, d, b, e

Exercice 29 Les listes de sommets suivants forment-elles des chemins dans le graphe ci-contre ? Quelles sont les longueurs de celles qui sont des chemins :

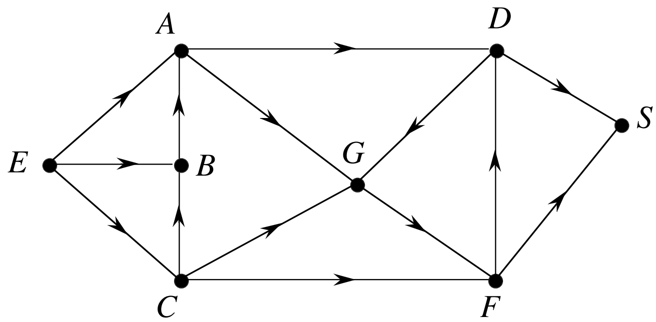


a) a, b, e, c, b **b)** a, d, a, d, a **c)** a, d, b, e, a

Exercice 30 Trouver le nombre de chemins de a à e dans le graphe orienté de l'exercice précédent qui sont de longueur :

a) 2 **b)** 3 **c)** 4

Exercice 31 Pour traverser une chaîne de montagnes, il faut passer par plusieurs sommets, reliés entre eux par des voies ne pouvant être franchies que dans un seul sens. On donne ci-dessous le graphe associé à cette situation (E est le point d'entrée et S le point de sortie).
L'office de tourisme cherche toutes les traversées qui partent de E et arrivent en S en 4 ou 5 étapes (une étape est le passage d'un sommet à un autre pouvant correspondre à des chalets du club alpin suisse).



Les sommets étant classés dans l'ordre *EABCGDFS*.

a) Contrôler que la matrice d'adjacence vaut :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) La première ligne de M^3 est : 0 1 0 0 2 2 2 2
La première ligne de M^4 est : 0 0 0 0 3 3 2 4
La première ligne de M^5 est : 0 0 0 0 3 2 3 5

En déduire combien de traversées peut-on en faire en 4 (resp. 5) étapes.
Trouver toutes les traversées possibles en 5 étapes.

Théorème Soit $G(X, A)$ un graphe orienté avec une matrice d'adjacence A. Le nombre de chemins différents de longueur r de x_i à x_j, où r est un nombre entier, est égal à l'élément a_{ij} de A^r.

Preuve Il s'agira d'effectuer une preuve par induction *(que l'on complète ensemble)*:

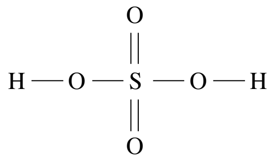
Théorème Soit $G(X, A)$ un graphe avec une matrice d'adjacence A. Le nombre de chaînes différentes de longueur r de x_i à x_j, où r est un nombre entier, est égal à l'élément a_{ij} de A^r.

Il s'agit donc d'une généralisation au graphe non orienté du résultat démontré précédemment.

Exercice 32 Trouver le nombre de chemins de longueur n entre deux sommets différents dans K_4 si n est égal à :

a) 2 **b)** 3 **c)** 4

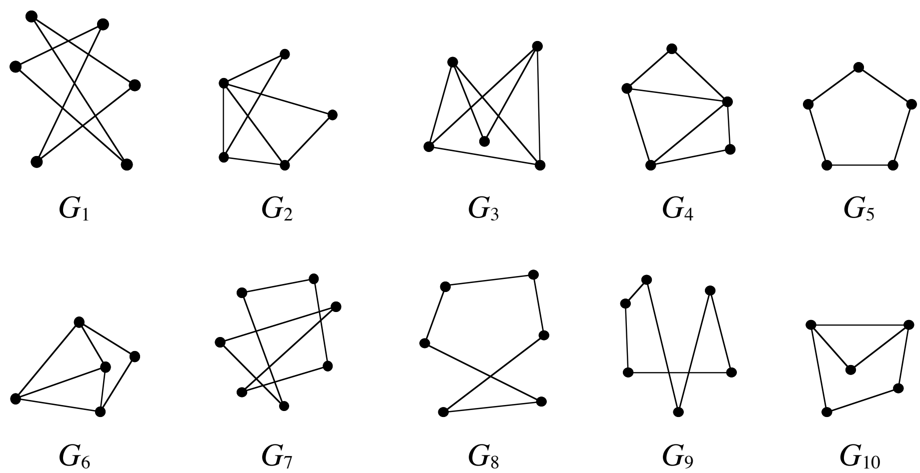
3.4 Isomorphisme de graphes



Acide sulfurique

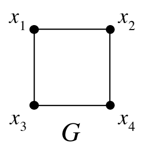
Il est souvent utile de savoir s'il est possible de tracer deux graphes de la même façon. Par exemple, en chimie, on se sert de graphes pour modéliser les composants chimiques. Différents composants peuvent avoir la même formule moléculaire, mais non la même structure. De tels composants seront représentés par des graphes qui ne peuvent être tracés de la même façon. Les graphes représentant des composants déjà connus peuvent permettre de déterminer la réelle nouveauté des composants trouvés.

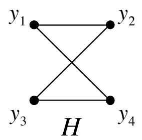
Exercice 33 Parmi les graphes ci-dessous, déterminer ceux qui sont susceptibles de décrire une même situation.



Définition Les graphes simples $G(X, A)$ et $H(Y, B)$ sont **isomorphes** s'il existe une fonction bijective f de X dans Y avec la propriété suivante: x_i et x_j sont adjacents dans G, si et seulement si $f(x_i)$ et $f(x_j)$ sont adjacents dans H pour toutes les valeurs de x_i et de x_j dans A. Une telle fonction f est un **isomorphisme**. Ce terme vient du grec isos (égal) et morphe (forme).

Exemple Démontrer que les graphes $G(X, A)$ et $H(Y, B)$ sont des graphes isomorphes.

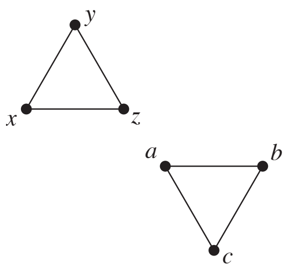




Solution: La fonction f avec $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_4$ et $f(x_4) = y_3$ est bien une correspondance entre G et H. Il reste à vérifier que les paires de sommets adjacents entre G et H correspondent à l'aide du tableau:

Paires de sommets adjacents dans G		Image dans H des sommets adjacents de G	*adjacents dans H ?*
x_1 et x_2	$\longrightarrow$	$f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$	*OUI*
x_1 et x_3	$\longrightarrow$	$f(x_1) = y_1$ et $f(x_3) = y_4$	*OUI*
x_2 et x_4	$\longrightarrow$	$f(x_2) = y_2$ et $f(x_4) = y_3$	*OUI*
x_3 et x_4	$\longrightarrow$	$f(x_3) = y_4$ et $f(x_4) = y_3$	*OUI*

Remarques 1) Il est souvent difficile de déterminer si deux graphes sont isomorphes. Dans le cas de deux graphes simples ayant n sommets, il existe $n!$ correspondances possibles entre les sommets. Vérifier qu'une telle correspondance préserve l'adjacence est pratiquement impossible lorsque n devient trop grand.



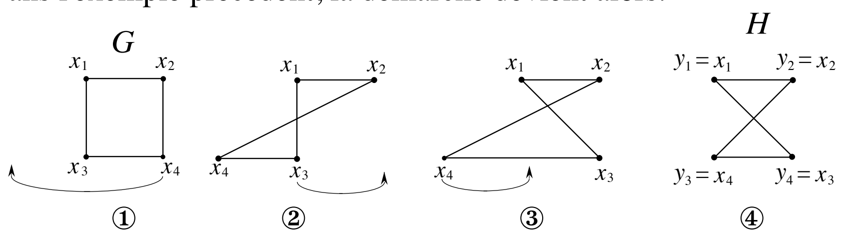
Par exemple, si $n = 3$, il y a $3\,! = 6$ correspondances différentes :

2) Néanmoins, on peut proposer quelques démarches intuitives:

➢ Pour que deux graphes soient isomorphes, ils doivent avoir le même nombre de sommets, d'arêtes, et pour chaque sommet respectif le même degré.

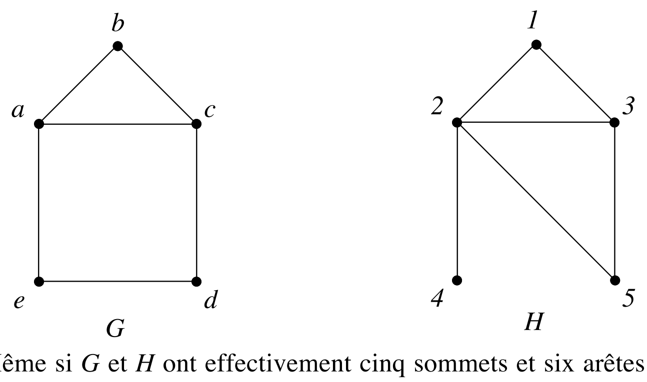
➢ Une bonne démarche pour justifier que deux graphes sont isomorphes est d'imaginer que les sommets sont des clous plantés dans une planche et que les arêtes les reliant sont des élastiques. La question serait maintenant, en partant d'un graphe, peut-on en déplaçant successivement les clous obtenir l'autre graphe ?

Dans l'exemple précédent, la démarche devient alors:



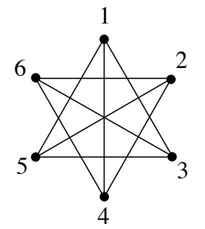
➢ Après avoir déterminé une correspondance probable entre les deux graphes, on peut comparer les matrices d'adjacence. Si elles sont égales, les deux graphes sont isomorphes.

Exemple 1) Les deux graphes ci-dessous sont-ils isomorphes ?

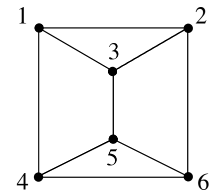


Solution: Même si G et H ont effectivement cinq sommets et six arêtes, on constate que H a un sommet de degré 1 ce qui n'est pas le cas de G. Ils ne sont donc pas isomorphes.

Exemple 2) Les deux graphes ci-dessous sont-ils isomorphes ?

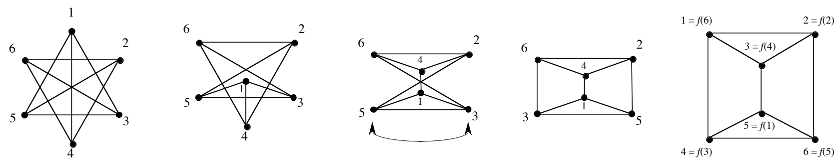


G



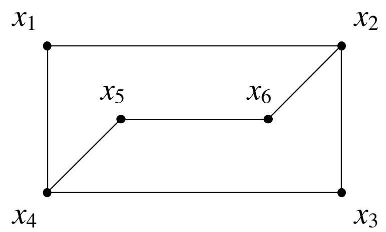
H

Solution: Les deux graphes ont le même nombre de sommets, le même nombre d'arêtes et chaque sommet admet bien un degré 3. Ils sont de bons candidats pour être isomorphes. En voici la démarche permettant d'obtenir H à partir de G.

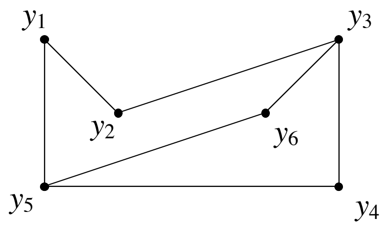


G *H*

Exemple 3) Les deux graphes ci-dessous sont-ils isomorphes ?



G



H

Solution: Les deux graphes ont le même nombre de sommets, le même nombre d'arêtes, deux sommets de degré 3 et quatre sommets de degré 2. Il est donc raisonnable d'envisager un isomorphisme f entre ces deux graphes.

L'image de x_1 (de degré 2) ne peut être que y_4 ou y_6. Arbitrairement, on définit $f(x_1) = y_6$ (si cette sélection n'aboutit pas, on essaiera alors $f(x_1) = y_4$).
Puisque x_2 est adjacent à x_1, les images possibles de x_2 sont y_3 ou y_5. A nouveau, on choisit arbitrairement $f(x_2) = y_3$. En continuant ainsi on peut établir $f(x_3) = y_4$, $f(x_4) = y_5$, $f(x_5) = y_1$ et $f(x_6) = y_2$.

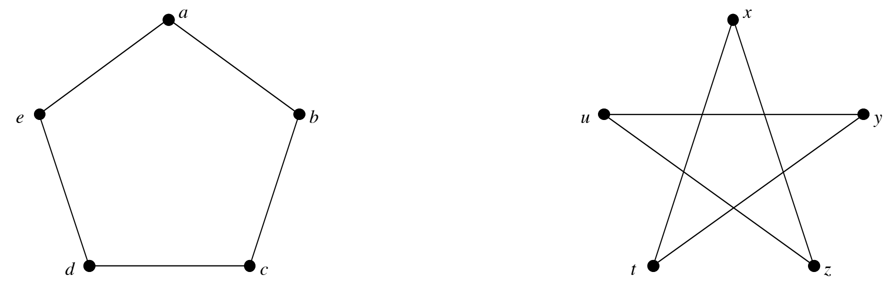
On va vérifier maintenant l'égalité des deux matrices en ordonnant lignes et colonnes en respectant la correspondance f.

$$A_G = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A_H = \begin{array}{c} \\ y_6 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_1 \\ y_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} y_6 & y_3 & y_4 & y_5 & y_1 & y_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

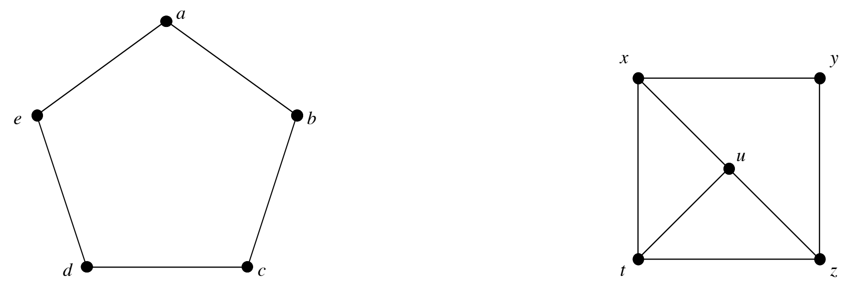
Ok, ces 2 matrices sont bien égales.

Exercice 34 Les paires de graphes présentés sont-elles isomorphes ?

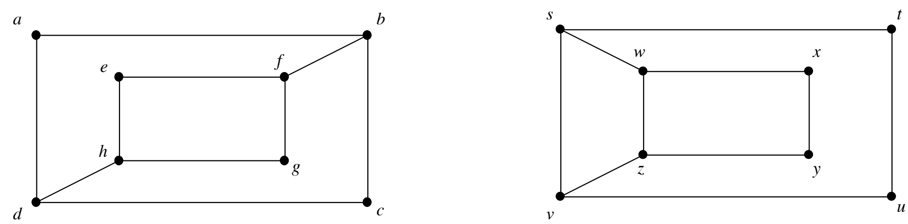
a)



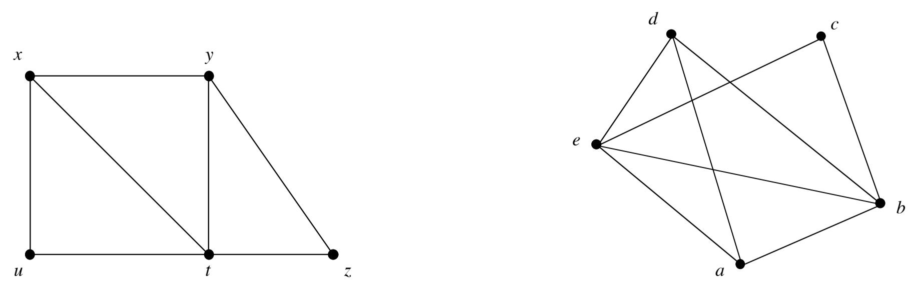
b)



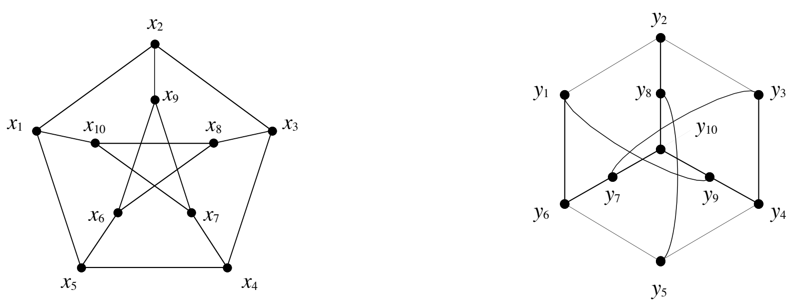
c)



d)



e)



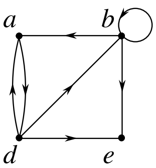
Exercice 35 Les graphes simples ayant les matrices d'adjacence suivantes sont-ils isomorphes ?

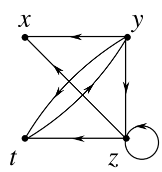
a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

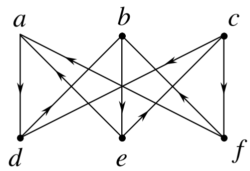
Exercice 36 Les paires de graphes présentés sont-elles isomorphes ?

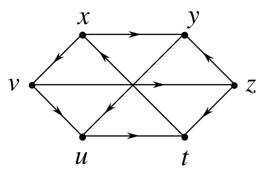
a)





b)





Exercice 37 Dans cet exercice, on ne considère que des *graphes simples*.

Si on considère un graphe formé de 1 sommet, il est évident qu'il n'existe qu'un graphe "reliant" cet unique point.
Si un graphe est formé de 2 sommets, il existe alors deux graphes non isomorphes possibles formés de ces 2 points.

a) Combien y a-t-il de graphes non isomorphes formés de 3 sommets ?

b) Qu'en est-il si le graphe est formé de 4 sommets ?

c) Et dans le cas de 9 sommets ??