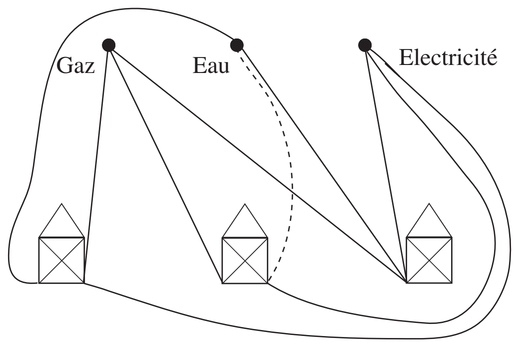
Chapitre 5: Graphes planaires

Introduction Commençons par énoncer deux énigmes classiques :

Énigme 1: *Dans un pays donné, on désire réorganiser les voies de communication de façon à relier entre elles les 11 plus grandes villes. Elles doivent être reliées deux à deux soit par un canal, soit par un chemin de fer.*
Or les ingénieurs du pays, s'ils savent parfaitement faire passer une voie ferrée au-dessus d'un canal, ne savent pas faire passer une voie ferrée au-dessus d'une autre, ni un canal au-dessus d'un autre !
Peut-on les aider, et leur proposer un tracé ? (On pourra placer les villes comme on le désire)

Je vous laisse y réfléchir, mais n'essayez pas trop longtemps !

Énigme 2: *Sur un côté d'une rue, trois maisons sont alignées. Devant elles sont placées respectivement des arrivées générales de gaz, d'électricité, et d'eau.*
Comment faire pour alimenter les trois maisons avec ces trois fluides sans que deux conduites ne se croisent ?



Si l'on essaie de placer les différentes conduites, on s'aperçoit qu'il est possible, sans trop de difficultés, de placer les 8 premières. En revanche, il semble absolument impossible de placer la dernière sans croiser l'une des précédentes.
Sur la figure ci-dessus, même en “contournant” le bloc, la dernière conduite, représentée en pointillés, croiserait nécessairement l'une des précédentes.

L'objectif de ce chapitre est de donner une première justification de cette impossibilité puis de donner un **critère général** permettant de déterminer si un graphe donné peut être représenté sans que les arêtes ne se croisent.

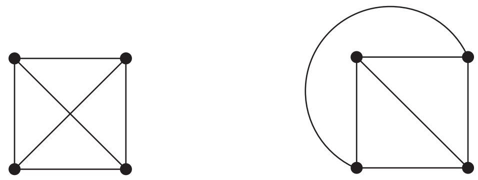
5.1 Les premières définitions

Dans tout ce chapitre, nous ne considérerons que des **graphes simples**, c'est-à-dire des graphes sans "boucle, sans arête multiple et non orientés.

Définitions Un graphe est **planaire** s'il peut être tracé dans un plan sans qu'aucune de ses arêtes en croise une autre. Un tel tracé est appelé une **représentation planaire** du graphe.

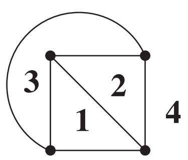
Exemple: Le graphe K_4 est-il un graphe planaire ?

Solution: Oui, car on peut le représenter sans intersection comme le montre la figure suivante:



Définition Soit G un graphe planaire. Une **face** F de G est une région maximale du plan délimité par un ensemble d'arêtes de G, et qui n'en contient aucune.
Le **degré** de F, noté $\deg(\mathrm{F})$, est le nombre d'arêtes de G qui bordent F.

Exemple:

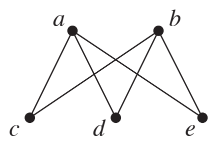


Dans la représentation planaire précédente du graphe de K_4, nous avons exactement 4 faces, numérotées de 1 à 4. Toutes sont bordées par 3 arêtes du graphe exactement, c'est-à-dire qu'elles sont toutes de degré 3.

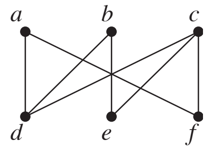
Exercice 51 Pouvez-vous raccorder cinq maisons à deux réseaux utilitaires (gaz et eau) sans que les canalisations ne se croisent ?

Exercice 52 On considère un graphe planaire connexe à 6 sommets, chacun de degré 4. Déterminer le nombre de faces de sa représentation planaire.

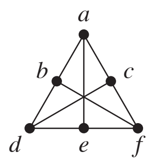
Exercice 53 Déterminer si les graphes suivants sont des graphes planaires. Si oui, donner leur représentation planaire, déterminer le nombre de faces et le degré de chaque face ainsi que la somme des degrés de toutes les faces.



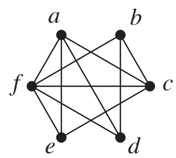
a)



b)

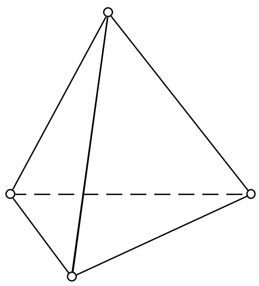


c)

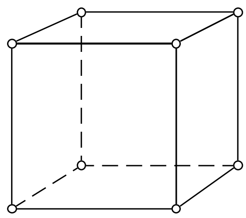


d)

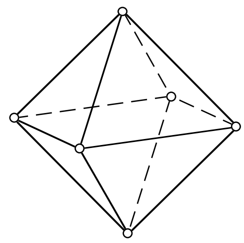
Exercice 54 Déterminer si les graphes suivants sont des graphes planaires. Si oui, donner leur représentation planaire, déterminer le nombre de faces et le degré de chacune.



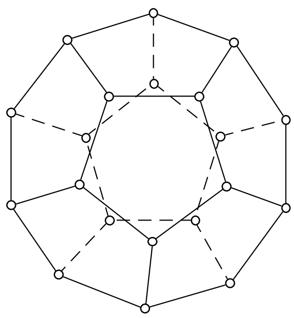
a)



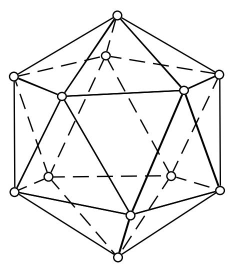
b)



c)



d)



e)

Exercice 55 Prouver le **théorème 1** qui suit.

Théorème 1: Soit G un graphe planaire et a le nombre d'arêtes de G. Alors

$$\sum_{faces\ \mathcal{F}} \deg(\mathcal{F}) = 2a$$

Preuve en exercice.

5.2 Formule d'Euler et critères pour qu'un graphe soit planaire

Lemme de Jordan: (en topologie) Une courbe fermée dans un plan divise celui-ci en 2 régions distinctes: l'intérieur et l'extérieur.

La preuve de ce lemme n'est pas aisée et dépasse largement le niveau de ce cours. Acceptons-en seulement l'idée.

Théorème 2: Le graphe $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

Preuve en exercice ci-dessous:

Ce dernier théorème justifie ainsi qu'il n'est pas possible de relier les trois habitations avec les 3 services gaz-eau-électricité (**Énigme n°2 d'introduction**).

Théorème 3: Le graphe K_5 n'est pas planaire.

Preuve en exercice ci-dessous:

Exercice 56 Prouver le **théorème 2** à l'aide de l'indication suivante:
Il s'agit d'appliquer le lemme de Jordan au graphe en montrant qu'à un instant donné, on est toujours amené à devoir relier un point situé à l'intérieur d'une courbe fermée avec un point situé à l'extérieur.

Exercice 57 Prouver le **théorème 3**.

Théorème d'Euler: Soit G un graphe planaire connexe.
Soit s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces. Alors

$$s - a + f = 2$$

Preuve: Cf. feuille annexe dans le cas d'un graphe simple.

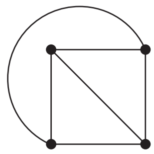
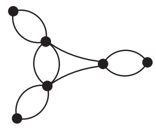
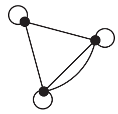
Exemple: On considère un graphe planaire connexe comprenant 20 sommets de degré 3. Déterminer le nombre de faces de ce graphe.

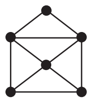
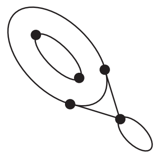
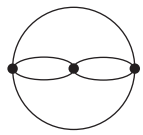
Solution: $s = 20$ sommets

$$a = \frac{20 \cdot 3}{2} = 30 \text{ arêtes}$$

Donc $f = 2 - (s - a) = 12$

Exercice 58 Contrôler si chacun des graphes suivants vérifie la formule d'Euler.

		
$s = 4$ $f = 4$ $a = 6$	$s =$ $f =$ $a =$	$s =$ $f =$ $a =$

		
$s =$ $f =$ $a =$	$s =$ $f =$ $a =$	$s =$ $f =$ $a =$

Exercice 59 On considère un graphe planaire connexe à 6 sommets, chacun de degré 4. Déterminer le nombre de faces de sa représentation planaire. (Reprise de l'exercice 52) !

1^er^ critère de graphes planaires: Soit G un graphe simple planaire connexe avec $s \geq 3$. Alors les nombres s de sommets et a d'arêtes de G vérifient la relation:

$$a \leq 3s - 6$$

Preuve en exercice:

$2^{ème}$ critère de graphes planaires: Soit G un graphe simple planaire connexe sans triangle mais avec $s \geq 4$. Alors les nombres s de sommets et a d'arêtes de G vérifient la relation:

$$a \leq 2s - 4$$

Preuve en exercice: mêmes idées que précédemment.

Application: **L'énigme 1 d'introduction** n'a pas de solution.
Soit en effet nos 11 villes numérotées de 1 à 11. Si l'on ne fait pas la distinction entre canaux et voies ferrées, le tracé de tous ces moyens de communication nous donne un graphe à 11 sommets et $\frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ arêtes.
Toutes ces arêtes peuvent être rangées dans deux catégories : celles qui correspondent à des canaux et celles qui correspondent à des voies ferrées. Nous obtenons donc deux graphes ayant chacun au maximum 11 sommets (peut-être moins, une ville donnée peut n'être desservie que par bateau, ou seulement par train). D'autre part, la somme de leurs nombres d'arêtes respectives donne 55.
L'un d'entre eux a donc au moins 28 arêtes. (Voyez-vous pourquoi ?)

Mais $28 > 3 \cdot 11 - 6$, donc ce graphe ne satisfait pas le 1^{er} critère des graphes planaires connexes. En conclusion, quel que soit le tracé, il faudra que se croisent deux canaux, ou deux voies ferrées.

Exercice 60 Prouver le **1^{er} critère de graphes planaires** à l'aide de l'indication suivante:
Il s'agit d'établir que dans un tel graphe $\sum_{faces\ \mathcal{F}} \deg(\mathcal{F}) \geq 3f$ *puis d'appliquer le théorème 1 et la formule d'Euler.*

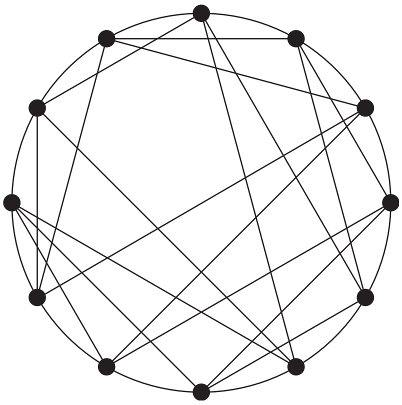
Exercice 61 Prouver le **$2^{ème}$ critère de graphes planaires** en utilisant une méthode semblable que celle utilisée lors de l'exercice précédent.

Exercice 62 Un circuit imprimé doit comprendre 370 liaisons reliant certaines paires de points (toutes différentes) choisies parmi 125 sommets. Peut-on dessiner ce circuit sur une seule plaque ? (justifier)

Exercice 63 Utiliser le 1^{er} critère pour démontrer à nouveau que K_5 n'est pas un graphe planaire.

Exercice 64 Utiliser le 2ème critère pour démontrer à nouveau que $K_{3,3}$ n'est pas un graphe planaire.

Exercice 65 Le graphe suivant admet-il une représentation planaire ?



Exercice 66 On s'intéresse aux graphes complets K_n pour $n \geq 3$.
Pour quelles valeurs de $n \geq 3$, K_n admet une représentation planaire. Démontrer votre affirmation.

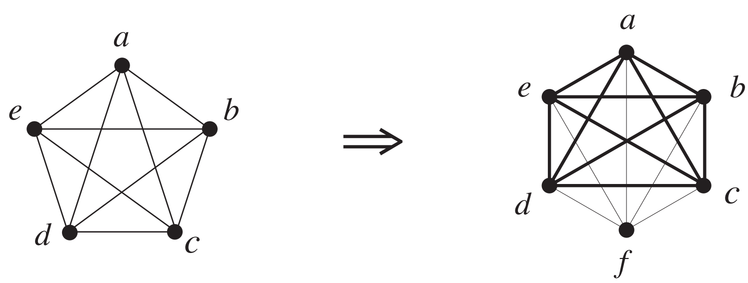
5.3 Théorème de Kuratowski

Question Nous avons démontré à plusieurs reprises que K_5 et $K_{3,3}$ ne sont pas planaires, mais existe-t-il d'autres graphes non planaires ?

Éléments de réponses

- Il est évident qu'un graphe qui admet K_5 ou $K_{3,3}$ comme sous-graphe ne peut pas être un graphe planaire, par exemple:

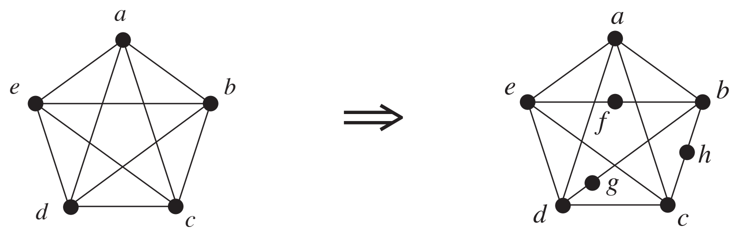
  Le graphe K_6 n'est pas planaire car il admet K_5 comme sous-graphe



K_5 non planaire ⇒ *K_6 non planaire*

- Il semble également acceptable que si l'on part d'un de ces 2 graphes, que l'on divise une de ses arêtes à l'aide d'un sommet supplémentaire, ce nouveau graphe ne sera pas planaire. On dit alors que ce nouveau graphe obtenu ainsi est **homéomorphe** au précédent. Par exemple:

Le graphe de droite est homéomorphe à K_5, il n'est pas planaire.



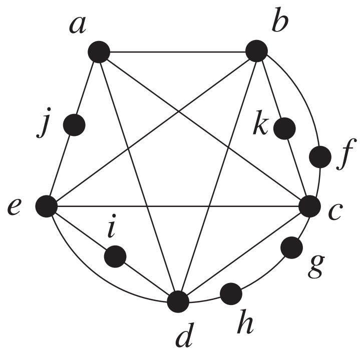
Kazimierz Kuratowski

- Mais existe-t-il encore d'autres types de graphes non planaires ?

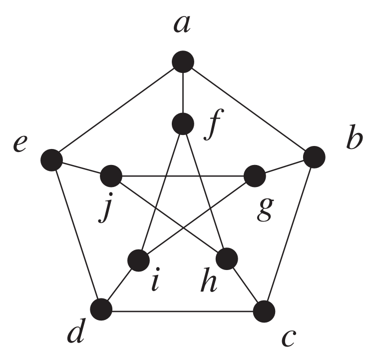
  Pendant de nombreuses années, les mathématiciens ont tenté de caractériser puis de classer les graphes planaires par familles. Ce problème a été résolu en 1930 par le mathématicien polonais K. Kuratowski. La démonstration du théorème portant maintenant son nom dépasse le niveau d'un cours de gymnase.

Théorème de Kuratowski Un graphe est non planaire **si et seulement si** il contient un sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$ et K_5.

Exercice 67 Les graphes suivants sont-ils des graphes planaires ?



a)

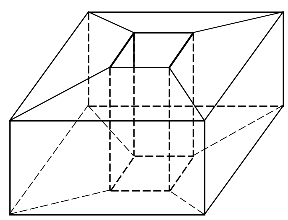


b)

Indication: • Dans le 2ème graphe, je vous suggère de vous concentrer sur les sommets f, d, j et e, i, h.

Ce 2ème graphe admet le nom de **graphe de Petersen**, ce mathématicien danois le présenta en 1891 et il est souvent utilisé pour illustrer des propriétés dans la théorie des graphes.

Exercice 68 Le polyèdre suivant peut-il être représenté par un graphe planaire ?



5.4 Les polyèdres réguliers (ou une application des graphes planaires)

Une des applications les plus élégantes des graphes planaires et de la formule d'Euler est la preuve d'un résultat connu depuis très longtemps, mais qui était délicat à justifier.

Théorème Il n'existe que **cinq polyèdres réguliers convexes** appelés aussi polyèdres platoniciens.

Preuve: Cf. feuille annexe.

Exercice 69 Déterminer ou rappeler ici quels sont ces 5 polyèdres réguliers