Chapitre 7: Coloration de graphes

7.1 Un exemple en guise d'introduction : Gérer les incompatibilités

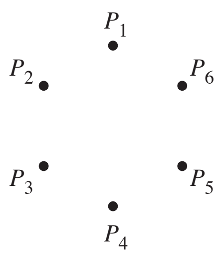
Problème : *Une entreprise qui fabrique six sortes de produits chimiques différents (notés P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6) doit en assurer le transport par train. Ces produits sont en petite quantité, mais ne peuvent être tous placés dans le même wagon pour des raisons de sécurité (le contact entre certains de ces produits peut provoquer des réactions explosives). Plus précisément :*
P_1 ne peut être transporté avec P_2, P_3, ou P_4.
P_2 ne peut être transporté avec P_1, P_3 ou P_5.
P_3 ne peut être transporté avec P_1, P_2 ou P_4.
P_5 ne peut être transporté avec P_2 ou P_6.

Combien de wagons sont-ils nécessaires au transport des six produits ?

1ère démarche : Ici, une solution empirique peut être trouvée :
Dans un premier wagon, on transporte P_1 et P_5 ; dans un second P_2 , P_4 et P_6, et dans le troisième P_3.
Mais comment s'assurer que l'on a trouvé la solution la plus économique ? En d'autres termes, comment prouver que trois wagons au moins sont absolument nécessaires ? Un raisonnement du type :"P_1, P_2, et P_3 sont deux à deux incompatibles, trois wagons au moins sont donc nécessaires" pourra ici être efficace. Mais il n'est pas généralisable à d'autres situations éventuellement plus complexes. Nous allons donc une fois encore avoir recours aux graphes.

Quel type de graphe envisager ?

2ème démarche : En fait, l'idée ici est de relier par une arête les sommets représentant des produits incompatibles : le graphe obtenu est appelé **graphe d'incompatibilité** *(que je vous laisse compléter ci-contre)*.



La question, en termes de propriétés du graphe, se pose maintenant ainsi : combien de familles de sommets doit-on créer au minimum, si l'on veut que deux sommets liés par une arête n'appartiennent jamais à la même famille ?
Nous allons considérer que chaque famille est caractérisée par une couleur, et développer quelques éléments de théorie à ce sujet.

Définitions

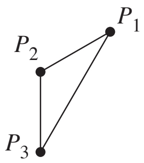
- Une **coloration d'un graphe** consiste en l'attribution de couleurs aux sommets, de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur.

- Le **nombre chromatique** $\chi(G)$ d'un graphe G est le nombre minimum de couleurs nécessaires à sa coloration, c'est-à-dire le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur.

3ème démarche : *Reformulons maintenant la question du problème posé :*
" Quel est le nombre chromatique du graphe G ?"

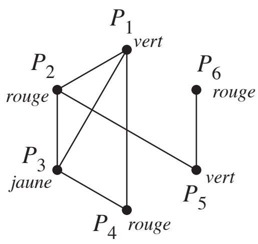
Disons tout de suite qu'**il n'existe pas** de formule donnant le nombre chromatique d'un graphe. Le plus souvent on déterminera ce nombre par **encadrement** (il est plus petit que… et plus grand que…), et en exhibant une coloration utilisant un nombre de couleurs égal au minorant (borne inférieure de l'encadrement).

Pour le graphe du problème, par exemple, on peut prouver que son nombre chromatique est au moins égal à trois, et trouver une coloration utilisant trois couleurs (elle n'est pas unique !!) :



sous-graphe

En effet, dans le sous-graphe ci-contre, trois couleurs sont nécessaires à sa coloration, puisque chaque sommet est adjacent aux deux autres. Le nombre chromatique du graphe est donc au moins égal à trois.



Donnons-nous donc trois couleurs : vert ; rouge ; jaune. Le graphe entier peut être coloré avec ces trois couleurs, comme le montre le schéma ci-contre. Ainsi :

<u>Solution du problème :</u>
Trois wagons sont nécessaires au transport des produits chimiques.

Exercice 88
a) Déterminer et justifier le nombre chromatique de K_n.
b) Déterminer et justifier le nombre chromatique de $K_{n,m}$.
c) Déterminer et justifier le nombre chromatique de C_n.

Théorème 1 : Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à celui de chacun de ses sous-graphes.

Exercice 89 Justifier le théorème ci-dessus.

Exercice 90 Une école d'ingénieurs doit organiser les examens des enseignements optionnels de ses élèves de troisième année. Les différentes options sont : français (F) ; anglais (A) ; mécanique (M) ; sport (S) ; Internet (I) et dessin industriel (D).
Certains étudiants ont choisi plusieurs options, et les regroupements existants sont : (F,A,M) ; (D,S) ; (I,S) ; (I,M).
Combien de demi-journées seront-elles nécessaires à cette organisation sachant que la durée de chaque épreuve est d'une demi-journée ?

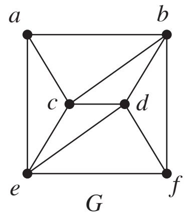
Exercice 91 On désire attribuer des canaux de fréquences radio à six stations. Deux stations distantes de moins de 150 km ne peuvent pas avoir le même canal. Combien faut-il de canaux distincts connaissant les données du tableau ci-dessous, exprimant la distance entre les stations ?

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
A	–	85	175	200	50	100
B	85	–	125	175	100	160
C	175	125	–	100	200	250
D	200	175	100	–	210	220
E	50	100	200	210	–	100
F	100	160	250	220	100	–

7.2 Ensembles et sous-ensembles stables

Définitions Soit $G(X,A)$ un graphe non orienté. Un sous-ensemble S de G est **stable** s'il ne comprend que des sommets non adjacents deux à deux.

Exemple Déterminer une partition du graphe G en sous-ensembles stables S_i



G

Solution: On peut proposer la partition suivante :
$S_1 = \{a\ ;\ d\}$, $S_2 = \{b\ ;\ e\}$ et $S_3 = \{c\ ;\ f\}$.

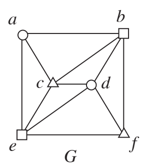
La partition n'est pas unique, on peut également proposer :
$S_1 = \{a\ ;\ f\}$, $S_2 = \{b\ ;\ e\}$, $S_3 = \{c\}$ et $S_4 = \{d\}$.

Remarques Une coloration avec k couleurs est donc une partition de l'ensemble des sommets en k parties stables.
Le nombre chromatique $\chi(G)$ est donc **le plus petit entier** k pour lequel il existe une partition de G en k sous-ensembles stables.

Théorème 2 : Soit $S_1, \ldots, S_k$ une partition stable de $G = (X, A)$ un graphe simple.
Alors :

$$\chi(G) \leq k$$

Exemple Dans le graphe précédent, montrer que $\chi(G) = 3$.



G

Solution: • On a donc $\chi(G) \leq 3$ par la première partition proposée ci-dessus.

• *Les sommets a, b et c forment un cycle donc* $\chi(G) \geq 3$.

Exercice 92 A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons ; dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les poissons ne peuvent cohabiter dans un même aquarium :

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
A		✗	✗	✗			✗	✗
B	✗				✗	✗	✗	
C	✗			✗		✗	✗	✗
D	✗		✗		✗			✗
E		✗		✗		✗	✗	
F		✗	✗		✗			
G	✗	✗	✗		✗			
H	✗		✗	✗				

a) Construire le graphe G de la situation.
b) Déterminer une partition en 4 sous-ensembles stables.
c) Proposer un double encadrement de $\chi(G)$.
d) Quel nombre minimum d'aquariums faut-il ?

Exercice 93 Une université doit organiser les horaires des examens. On suppose qu'il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et que les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 6, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 6, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et 6 et 7.

Comment organiser ces épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves en même temps et cela sur une durée minimale ?

a) Construire le graphe G de la situation.
b) Déterminer une partition en 5 sous-ensembles stables.
c) Proposer un double encadrement de $\chi(G)$.
d) Quelle sera cette durée minimale ?
e) Que devient le problème si la paire de cours "*1 et 6*" (ci-dessus n'ont plus d'étudiants en commun ?

7.3 Algorithme de coloration de Welch et Powell

Algorithme Cet algorithme couramment utilisé permet d'obtenir une *assez bonne* coloration d'un graphe, c'est-à-dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant, il n'assure pas que le nombre de couleurs utilisées soit minimum (et donc égal au nombre chromatique du graphe).

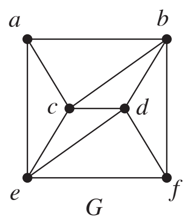
Étape 1 :
Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré, et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue.
On obtient une liste ordonnée de sommets $X_1, X_2, ..X_n$ tels que :

$$\text{degré}\,(X_1) \geq \text{degré}\,(X_2)\ldots \geq \text{degré}\,(X_n).$$

Étape 2 :
En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur.

Étape 3 :
S'il reste des sommets non colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2. Sinon, la coloration est terminée.

Exemple Appliquons cet algorithme au graphe ci-contre :



- Liste ordonnée : $\{b, c, d, e, a, f\}$
  1ère couleur : pour les sommets b et e.
- Liste ordonnée : $\{c, d, a, f\}$
  2ème couleur : pour les sommets c et f.
- Liste ordonnée : $\{d, a\}$
  3ème couleur : pour les sommets d et a.

Exercice 94 Appliquer cet algorithme au problème d'aquariophilie (ex 92) ci-dessus.

Exercice 95 Sept agences de voyages romaines proposent des visites de monuments et lieux touristiques : *Le Colisée*, *le Forum romain*, *le musée du Vatican* et *les thermes de Caracalas*.
Un même lieu ne peut être visité par plusieurs groupes de compagnies différentes le même jour. La première agence fait visiter uniquement *le Colisée* ; la seconde *le Colisée* et *le musée du Vatican* ; la troisième *les thermes de Caracalas* ; la quatrième *le musée du Vatican* et *les thermes de Caracalas* ; la cinquième *le Colisée* et *le Forum romain* ; la sixième *le Forum romain* et *les thermes de Caracalas* ; la septième *le musée du Vatican* et *le Forum romain*.

Ces agences peuvent-elles organiser les visites sur les trois premiers jours de la semaine ? Proposer alors une planification des visites.

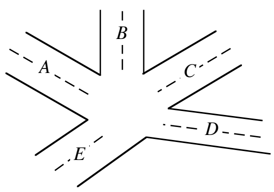
Exercice 96 Tout graphe contenant un triangle (K_3) ne peut être colorié en moins de trois couleurs.

a) Construire un graphe sans triangle qui nécessite également trois couleurs.

b) Comment, à partir du graphe précédent, construire un graphe sans K_4 nécessitant 4 couleurs ?

c) Un graphe sans K_5 nécessitant 5 couleurs ?

Exercice 97 Le schéma ci-contre représente un carrefour pour lequel on veut préparer les séquences des feux. Le tableau suivant précise les « franchissements » possibles de ce carrefour.



En arrivant par…	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
Il est possible d'aller en…	*C*, *E*	*A*, *E*, *D*	*A*, *D*	*C*, *A*	*C*, *D*

Les franchissements *A*-*C* et *B*-*E* ne peuvent naturellement pas être autorisés simultanément…

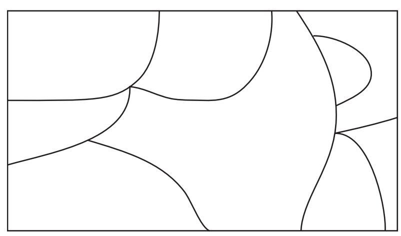
Modélisez ces incompatibilités à l'aide d'un graphe dont les sommets représentent les franchissements possibles et les arêtes les incompatibilités entre franchissements.

a) Proposez une coloration du graphe ainsi obtenu.

b) Que peut-on dire d'un ensemble de sommets ayant même couleur ?

c) À quoi peut correspondre, au niveau de l'organisation du carrefour, le nombre chromatique de ce graphe ?

Exercice 98 On désire colorier la carte ci-dessous de telle sorte que deux régions ayant une frontière commune ne soient pas de la même couleur.
(Un seul sommet commun n'est pas considéré comme une frontière)



a) Modéliser ceci sur un graphe.
b) Combien de couleurs sont-elles nécessaires pour colorier cette carte en respectant les règles ci-dessus ??

7.4 Coloration de cartes

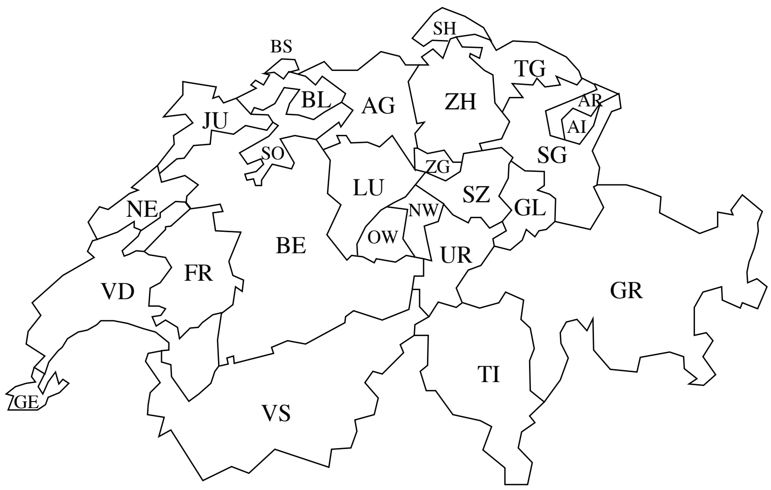
Définition :

Graphe dual

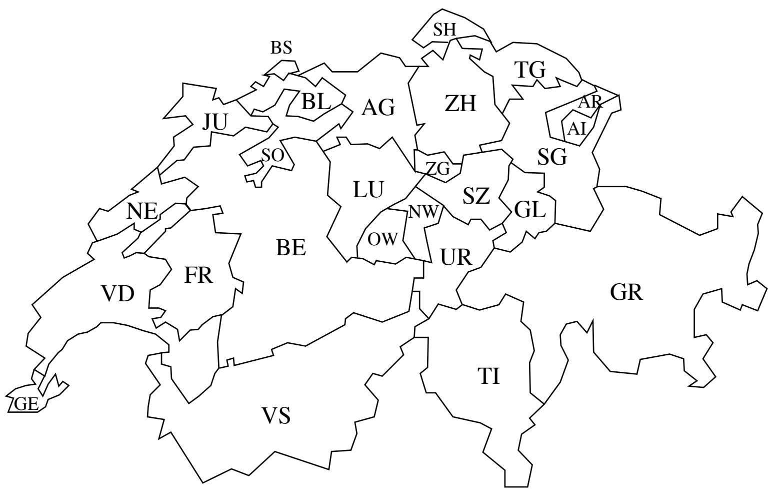
Toute carte peut être représentée par un graphe. Pour établir cette correspondance, chaque région de la carte est représentée par un sommet. Des arcs relieront deux sommets lorsque les régions qu'ils représentent ont une frontière commune. Deux régions qui ne se touchent qu'en un point ne sont pas considérées comme des régions adjacentes. Le graphe résultant est le **graphe dual** de la carte.

Le problème du coloriage des régions d'une carte revient donc au problème du coloriage des sommets d'un graphe dual sans qu'aucune paire de sommets adjacents de ce graphe n'ait la même couleur.

Exercice 99 On veut colorier chaque canton suisse de telle sorte que deux cantons voisins ne soient pas de la même couleur :



a) Proposer le graphe dual de cette carte.
b) Appliquer l'algorithme pour colorier cette 2$^{\text{ème}}$ carte.



c) Quel est le nombre chromatique obtenu ?

Le théorème des 5 couleurs

Le nombre chromatique d'un graphe planaire n'est jamais supérieur à cinq.

Preuve : Cf. feuille annexe

Le théorème des 4 couleurs

Le nombre chromatique d'un graphe planaire n'est jamais supérieur à quatre.

Le théorème des quatre couleurs fut posé comme une conjecture dans les années 1850. Il fut finalement prouvé par les mathématiciens américains Kenneth Appel et Wolfgang Haken en 1976. Avant cette date, on avait établi de nombreuses démonstrations incorrectes, mais dont les erreurs étaient difficiles à détecter. De plus, plusieurs tentatives futiles avaient été faites pour construire des exemples contradictoires en traçant des cartes qui nécessitaient plus de quatre couleurs.

Sans doute la preuve fallacieuse la plus notoire de toutes les mathématiques fut celle du théorème des quatre couleurs publiée en 1879 par un avocat londonien, mathématicien amateur, Alfred Kempe. Les mathématiciens acceptèrent cette preuve jusqu'en 1890, jusqu'à ce que Percy Heawood eut trouvé l'erreur qui rendait incomplète l'argumentation de Kempe. Cependant, l'essence du raisonnement de Kempe demeura à la base du succès de la démonstration donnée par Appel et Haken. Cette preuve repose sur une minutieuse analyse cas par cas, effectuée par ordinateur. On démontra que si le théorème des quatre couleurs était faux, il existerait un contre-exemple pour l'un des 2000 types de cas analysés. Ensuite, ils démontrèrent qu'aucun de ces types de cas ne démontrait le contraire. Ils utilisèrent plus de 1000 heures sur ordinateur pour faire cette démonstration. Celle-ci engendra une importante controverse, en raison du rôle majeur qu'y avaient joué les ordinateurs. Ne pouvait-il y avoir une erreur dans un programme d'ordinateur qui aurait conduit à des résultats incorrects ? Cet argument est-il réellement une preuve alors qu'il dépend de ce qui pourrait être une réponse incorrecte de l'ordinateur ?

Exercice 100 Donner une nouvelle justification à l'affirmation suivante :

K_5 n'est pas un graphe planaire.

Exercice 101 Justifier l'affirmation suivante :

Aucune carte plane ne possède 5 pays adjacents mutuellement.

Exercice 102 Découper l'île représentée ci-dessous en plusieurs pays, tels que chacun admette au moins une frontière commune avec 5 autres pays.