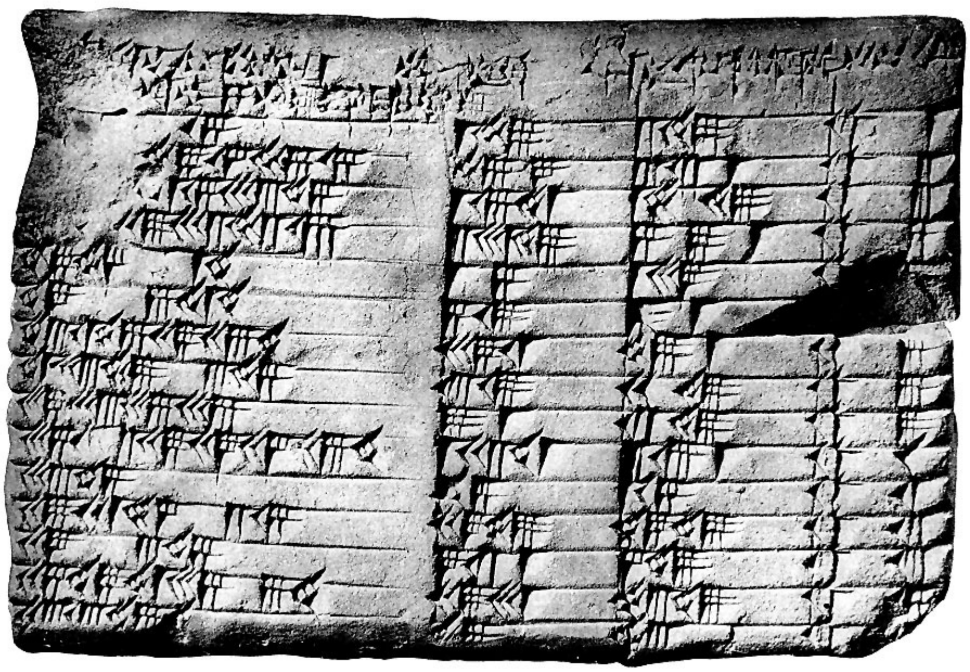
Notions élémentaires d'algèbre et de trigonométrie

$1M_{\text{Renf}}$

Jean-Philippe Javet



La tablette d'argile, nommée Plimpton 322, est une pièce archéologique babylonienne (env. 1800 ans av. J.-C.) écrite en cunéiforme et traitant de mathématiques. Cette tablette comporte un tableau de nombres rangés sur 15 lignes par quatre colonnes. Il semble être une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de nombres entiers vérifiant la relation de Pythagore $a^2 + b^2 = c^2$, comme par exemple (3,4,5).

http://www.javmath.ch

Table des matières

Le polycopié que vous avez entre les mains est très largement inspiré du manuel `Notions élémentaires` publié par la Comission Romande de Mathématique ainsi que du polycopié `La logique et les ensembles` proposé au Gymnase du Bugnon (Sylvain Amaudruz). Que tous ces différents auteurs soient remerciés ici ;-)

Malgré le soin apporté lors de sa conception, ce support de cours contient certainement quelques erreurs et quelques coquilles. Merci de participer à son amélioration en m'envoyant un mail à :

`javmath.ch@gmail.com`

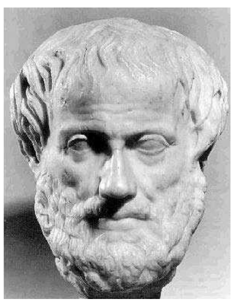
0 Quelques éléments de logique (et de th. des ensembles)

Les maths peuvent être définies comme la science dans laquelle on ne sait jamais de quoi l'on parle ni si ce que l'on dit est vrai.

Bertrand Russell

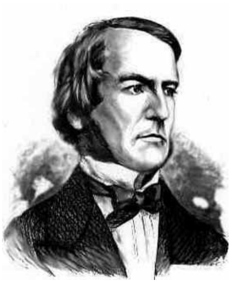
0.1 Introduction, un peu d'histoire

Introduction: Dans l'accomplissement de leur tâche, les travailleurs manuels se servent d'outils. Il en va de même dans l'activité intellectuelle. Pour élaborer leurs raisonnements, les scientifiques, notamment les mathématiciens, emploient un instrument particulier, le même dans toutes les disciplines : **la logique**.



Aristote

Gottfried Wilhelm Leibniz
Mathématicien allemand



George Boole
Mathématicien britannique

Chacun sait qu'il y a des raisonnements corrects et d'autres qui ne le sont pas ; c'est la logique qui permet d'établir cette distinction. Les logiciens et les mathématiciens se sont efforcés, au cours des âges, de développer cet instrument de façon à lui donner la souplesse exigée par les multiples circonstances où il intervient et la simplicité indispensable à une technique aussi universelle.

Nous nous contenterons ici d'une approche purement informelle de la logique, ayant pour principal but d'introduire des termes et des symboles mathématiques utiles pour le cours de mathématiques que vous allez suivre durant vos études gymnasiales. Nous introduirons également les différents types de démonstration.

Un des pères de la logique fut Aristote (384-322 Av. J-C). Son travail fut publié sous le titre ORGANON. Le philosophe allemand Kant a déclaré que la logique était sortie “close et achevée” (geschlossen und vollendet) de l'esprit d'Aristote.

Quelques autres grands noms de la logique :

- Leibniz (1646-1716) qui “mécanise” la pensée à l'aide de symboles et signes. C'est le fondateur de la logique formelle.
- Boole (1815-1864) qui libère la logique de la philosophie et l'ancre aux mathématiques.
- Russell et Gödel ont au XX^e siècle également travaillé sur les liens entre logique, mathématique et philosophie.

Exercice 0.1: On attribue à ÉPIMÉNIDE (VIIᵉ siècle av. J.-C.) le propos suivant :

« *Tous les Crétois sont des menteurs* »

Or celui-ci est Crétois… Qu'en pensez-vous ?

0.2 Notion de proposition

Définition: Une **proposition** est un énoncé dont on peut dire sans ambiguïté qu'il est vrai ou faux.

L'adjectif "vrai" ou "faux" qui accompagne une proposition est appelé **valeur de vérité** de cette proposition.

Ainsi, ce qui définit une proposition en logique n'est pas son contenu, mais le fait que l'on puisse lui attribuer une valeur de vérité selon les trois principes suivants :

- *Une proposition ne peut prendre une valeur autre que vrai ou faux. (Principe du tiers-exclu)*
- *Une proposition ne peut être à la fois vraie et fausse. (Principe de non-contradiction)*
- *Une proposition conserve sa valeur de vérité. (Principe d'identité)*

Les propositions sont souvent désignées par des lettres en majuscule : A, B, …, P, Q, …

Exemple 1: Parmi les énoncés ci-dessous, trouver ceux qui peuvent être considérés comme des propositions et déterminer leur valeur de vérité :

a) A : La baleine est un mammifère.

b) B : Le soleil tourne autour de la Terre.

c) C : Lève-toi !

d) D : 374 est divisible par 11.

e) E : $\sqrt{4} = \pm 2$

f) F : $x < 4$

g) G : Cette phrase est fausse.

Exercice 0.2: Parmi les énoncés ci-dessous, trouver ceux qui peuvent être considérés comme des propositions. Déterminer alors leur valeur de vérité. Dans le cas contraire, expliquer pourquoi.

a) Paris est la capitale de la France.

b) Pourvu que tu viennes demain.

c) Le soleil se lève à l'ouest.

d) As-tu lu ma conférence ?

e) La somme de 3 nombres consécutifs est un multiple de 3.

f) $2 + 2 = 5$.

g) $(3 - 8)^2$ donne le même résultat que $3^2 - 8^2$.

h) $0 \in \mathbb{N}$.

Exercice 0.3: Mullah Nasreddin [1] vivait à la cour du grand et terrifiant conquérant Tamerlan, et y jouait le rôle difficile du fou. Un jour, excédé par les propos trop injurieux du Mullah, Tamerlan le condamna à mort. Mais par admiration et sympathie pour la liberté de son esprit, il décida de lui laisser choisir sa mort. Il devait faire une courte déclaration. Si celle-ci est vraie, il sera pendu. Si elle est fausse, il sera décapité. Mullah Nasreddin parla et eut la vie sauve. Qu'a-t-il dit ?

0.3 Opérations logiques

Des propositions nouvelles peuvent être construites à partir d'autres propositions grâce aux opérations logiques.

Définition: Étant donné une proposition P, la **négation de $\boldsymbol{P}$**, notée $nonP$, est une proposition qui a la valeur "faux" quand P est vraie et la valeur "vrai" quand P est fausse.

On résume cela à l'aide de la **table de vérité** :

P	$nonP$
V	
F	

La négation de la négation d'une proposition est la proposition elle-même.

1. Quelques infos sur ce personnage mythique : http ://fr.wikipedia.org/wiki/Nasr_Eddin_Hodja

Exemple 2: Proposer la négation des propositions suivantes :

a) A : Le réel π est strictement compris entre 3 et 4.

b) B : l'équation $f(x) = 6$ admet au plus 2 solutions.

Exercice 0.4: Proposer la négation des propositions suivantes :

a) A : Dans le plan, les droites D et D' sont sécantes.

b) B : $x \leqslant 3$ ou $x > 7$.

Définition: Soit deux propositions P et Q, **la conjonction de *P* et *Q***, notée P *et* Q, est une proposition qui a la valeur "vrai" lorsque P et Q sont toutes deux vraies et la valeur "faux" dans les trois autres cas.

On résume cela à l'aide de la table de vérité :

P	Q	P *et* Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Exemple 3: Considérons les propositions :

A : π est un nombre entier.
B : 5 est un nombre impair.

Donner la conjonction de A et B ainsi que sa valeur de vérité.

Définition: Étant donné deux propositions P et Q, **la disjonction de $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$**, notée P *ou* Q, est une proposition qui a la valeur “vrai” si l'une au moins des propositions P et Q est vraie et la valeur “faux” si elles sont toutes deux fausses.

On résume cela à l'aide de la table de vérité :

P	Q	P *ou* Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

La table de vérité met en évidence le fait que le mot “ou” en mathématiques est à considérer dans son sens **non exclusif**.

Exemple 4: Considérons les propositions :

A : π est un nombre entier.
B : 5 est un nombre impair.

Donner la disjonction de A et B ainsi que sa valeur de vérité.

Exercice 0.5: Malik possède les caractéristiques suivantes :

il est écossais, ne joue pas du biniou,
ne porte pas de jupe et fait du rugby

Pour adhérer à un club de loisir masculin, chaque candidat devra remplir toutes les conditions ci-dessous :

- être écossais ou jouer du biniou ;
- faire du rugby et ne pas porter une jupe ;
- ne pas faire du rugby ou être écossais.

a) Malik pourra-t-il adhérer à ce club ?

b) Qu'en est-il de son camarade Léo qui, même n'étant pas écossais et ne portant pas de jupe, joue du biniou et pratique le rugby.

Exercice 0.6:

- On considère la proposition suivante :

$$A : \text{Je parle français et anglais}$$

a) Parmi les propositions suivantes, laquelle correspond à $nonA$:

A_1 : Je ne parle pas français et pas anglais.
A_2 : Je parle français et ne parle pas anglais.
A_3 : Je ne parle pas français ou pas anglais.
A_4 : Je ne parle aucune des deux langues.

b) Montrer en quoi la table de vérité suivante justifie la négation de la proposition A.

P	Q	P *et* Q	$non(P$ *et* $Q)$		$nonP$	$nonQ$	$(nonP)$ *ou* $(nonQ)$
V	V	V	**F**		F	F	**F**
V	F	F	**V**		F	V	**V**
F	V	F	**V**		V	F	**V**
F	F	F	**V**		V	V	**V**

- On considère la nouvelle proposition suivante :

$$B : \text{Je vais à Paris ou à Londres}$$

c) Proposer la table de vérité justifiant la négation de la proposition B.

- La première partie de l'exercice vous a permis de montrer la première loi de Morgan :

$$non(P \text{ et } Q) \quad \text{est équivalent à} \quad (nonP) \text{ ou } (nonQ)$$

d) À l'aide de la deuxième partie de l'exercice, énoncer la deuxième loi de Morgan.

Augustus de Morgan
mathématicien britannique
(1806-1871)

Exercice 0.7: Apparier les quatre propositions suivantes en deux paires, chaque paire étant formée d'une proposition et de sa négation

A : 8 est pair et 5 est impair ;
B : 8 est impair et 5 est pair ;
C : 8 est impair ou 5 est pair ;
D : 8 est pair ou 5 est impair.

Définition: Étant donné deux propositions P et Q, **l'implication de $\boldsymbol{P}$ vers $\boldsymbol{Q}$**, notée $P \implies Q$, est une proposition qui a la valeur "faux" si P est vraie et Q est fausse, et qui est "vrai" dans les trois autres cas.

On résume cela à l'aide de la table de vérité :

P	Q	$P \implies Q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

- La table de vérité met en évidence un fait pouvant paraître étonnant : du "faux" peut découler n'importe quoi. Observons ceci sur un exemple :

  En campagne électorale, un politicien fait la promesse :

  "*Si je suis élu, il y aura une réduction d'impôts.*"

  Supposons qu'il n'est pas élu et qu'il n'y a pas de réduction d'impôts. Peut-on alors l'accuser d'avoir menti ?

  Intuitivement, on sait bien qu'il n'a pas menti, puisqu'il n'avait rien promis du tout dans le cas où il ne serait pas élu. Donc notre intuition nous dit que la phrase qu'il a prononcée est vraie (sinon il aurait menti). Cette intuition est en accord avec la table de vérité de $\implies$ *, puisque la phrase prononcée est une implication du type (*$F \implies F$*), qui est Vraie selon la table.*

Exemple 5: Au sujet d'un quadrilatère, former des implications vraies à partir des propositions suivantes :

A : Le quadrilatère est un losange ;
B : Le quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires ;
C : Le quadrilatère est un carré ;
D : Le quadrilatère a ses diagonales isométriques.

Remarques:
- L'implication se formule en mathématiques en employant l'expression "**si *P*, alors *Q***".
- Le logicien averti aura remarqué l'ambiguïté de cette dernière définition... En effet, nous ne différencierons pas les notions de conditionnelle (codée par $P \to Q$) et d'implication [2].

Exercice 0.8: Au sujet d'un triangle, former des implications vraies à partir des propositions suivantes :

A : Le triangle est isocèle ;
B : Le triangle admet une paire de côtés isométriques ;
C : Le triangle admet deux axes de symétrie ;
D : Le triangle est équilatéral.

Exercice 0.9: Former des implications vraies à partir de 2 ou plusieurs items suivants :

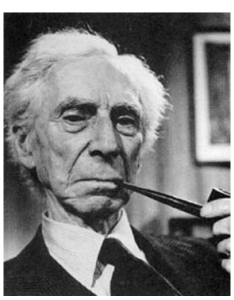
$A : x \geqslant 2$	$B : x^2 = 4$
$C : x^2 < 4$	$D : -2 < x < 2$
$E : x = 2$	$F : x = -2$

Exemple 6: La phrase :

$$\text{Si } 2^3 = 16 \text{ alors } 1 + 1 = 3$$

est-elle vraie ou fausse ?

Étonnant: Du "faux" il peut en découler n'importe quoi ...



Bertrand Arthur William Russell
mathématicien britannique
(1872-1970)

Si 2 et 2 font 5, alors je suis le pape.

En effet, si 2 + 2 = 5, on a 4 = 5. En soustrayant par 3 chacun des membres de l'égalité, on obtient 1 = 2. Cela signifie ainsi que le pape et moi sommes un, donc que je suis le pape !

Bertrand Russell

2. Plus d'info sur : http://georges-barthélemy.fr/implication_logique_mathématiques.pdf

Définition: L'implication $Q \implies P$ est appelée **la réciproque** de l'implication $P \implies Q$.

Exemple 7: Formuler la réciproque de l'implication vraie suivante :

$$x = 2 \implies x^2 = 4$$

Que constatez-vous ?

Constatations: Une implication et sa réciproque n'ont pas nécessairement la même valeur de vérité.

Exercice 0.10: Formuler la réciproque de l'implication suivante puis comparer leur valeur de vérité :

$$\left.\begin{array}{c} a \text{ est divisible par } c \\ \text{et} \\ b \text{ est divisible par } c \end{array}\right\} \implies (a+b) \text{ est divisible par } c$$

Définition: Étant donné deux propositions P et Q, **l'équivalence entre P et Q**, notée $P \iff Q$, est une proposition qui possède la valeur "vrai" si P et Q ont la même valeur et la valeur "faux" sinon.

On résume cela à l'aide de la table de vérité :

P	Q	$P \iff Q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

- La table de vérité de l'exercice qui suit met en évidence le fait que l'équivalence $P \iff Q$ revient à avoir conjointement les implications $P \implies Q$ et sa réciproque $Q \implies P$.
- L'équivalence se formule aussi en mathématiques en employant différentes expressions : "***P* si et seulement si *Q***", "**si *P*, alors *Q*, et réciproquement**".

Exemple 8: **a)** Les propositions ci-dessous sont-elles équivalentes ?

$$A : x = 5 \qquad\qquad B : x^2 = 25$$

b) Les propositions ci-dessous sont-elles équivalentes ?

A : Une des soeurs de Paul s'appelle Juliette ;
B : Un des frères de Juliette s'appelle Paul.

Exercice 0.11: À l'aide d'une table de vérité, montrer que :

$$(P \implies Q) \text{ } et \text{ } (Q \implies P) \text{ est équivalent à } P \iff Q$$

Exercice 0.12: Soit les paires de propositions suivantes :

a) A : n est un multiple de 2 ;
B : n est un multiple de 6.

b) A : le triangle KLM est rectangle en M ;
B : M appartient au cercle de diamètre KL.

c) Soit a, b et c des nombres entiers.
A : b est divisible par a ;
B : $b \cdot c$ est divisible par a.

Pour chacune des paires de propositions ci-dessus, évaluer $A \implies B$, sa réciproque puis préciser quand A est équivalent à B.

Définition: L'implication $nonQ \implies nonP$ est appelée **la contraposée** de l'implication $P \implies Q$.

Exemple 9: Formuler la contraposée de l'implication et comparer la valeur de vérité avec l'implication de départ :

$$\text{Fabienne est née à Lausanne} \implies \text{Fabienne est née en Suisse.}$$

Exemple 10: Formuler la contraposée des implications et comparer la valeur de vérité avec l'implication de départ :

a) x est divisible par 2 $\implies$ x est divisible par 4.

b) $\left.\begin{array}{l}\text{Si } a \text{ est divisible par } c\\ \text{Si } b \text{ est divisible par } c\end{array}\right\} \implies (a+b)$ est divisible par c.

Remarque: En comparant les valeurs de vérité, nous pouvons observer sur l'exemple ci-dessus la propriété suivante :

$$(P \implies Q) \text{ est équivalent à } (nonQ \implies nonP)$$

Ce principe porte le nom de ***contraposition****, nous le justifierons et l'utiliserons un peu plus loin dans ce polycopié (page 19).*

Exercice 0.13: Soit A, B et C des propositions définies comme suit :

A : J'ai soif B : Mon verre est vide C : Il est quatre heures

Décrire les propositions suivantes à l'aide de A, B et C et des opérateurs logiques.

a) J'ai soif et mon verre n'est pas vide.

b) Il est quatre heures et j'ai soif.

c) Je n'ai pas soif ou mon verre est vide.

d) S'il est quatre heures, alors j'ai soif.

e) Si j'ai soif et que mon verre est vide, alors il est quatre heures.

f) Si j'ai soif, alors mon verre est vide ou il est quatre heures.

Exercice 0.14: Évaluer les propositions de l'exercice précédent sachant que :

a) Les propositions A et C sont vraies, la proposition B est fausse.

b) La proposition A est fausse, les propositions B et C sont vraies.

Exercice 0.15: Sur une île, il y a deux sortes d'habitants : les chevaliers qui disent toujours la vérité et les coquins qui disent toujours des mensonges. Soit A et B deux habitants de l'île.

a) A dit : "Si je suis un chevalier, alors B aussi", peut-on déterminer les identités de A et de B ?

b) A dit : "Si je suis un chevalier, alors $2+2=5$", que conclure ?

c) A dit : "Si je suis un chevalier, alors $2+2=4$", que conclure ?

Exercice 0.16: On suppose les deux propositions suivantes vraies :

A : J'aime Betty ou j'aime Jane ;
B : Si j'aime Betty, alors j'aime Jane.

Est-ce que j'aime Betty ? Est-ce que j'aime Jane ?

Exercice 0.17: Sachant que chacune des propositions suivantes est vraie, que peut-on en déduire ?

A : Le malfaiteur est venu en voiture ou le témoin s'est trompé.

B : Si le malfaiteur a un complice, alors il est venu en voiture.

C : Le malfaiteur n'avait pas de complice et n'avait pas de clé ou le malfaiteur avait un complice et avait la clé.

D : Le malfaiteur avait la clé.

(Scénario de Lewis Carrol)

Définition: Soit P_1 et P_2 deux propositions composées dont on a constitué leur table de vérité. Si leur dernière colonne est identique, on dit alors que ces propositions sont **logiquement équivalentes** et on note :

$$P_1 \equiv P_2$$

Exemple 11: Nous avons déjà croisé et démontré quelques propositions **logiquement équivalentes**. Les voici en rappel :

- La **première loi de Morgan** :

$$(non(P\ et\ Q)) \equiv ((nonP)\ ou\ (nonQ))$$

- La **deuxième loi de Morgan** :

$$(non(P\ ou\ Q)) \equiv ((nonP)\ et\ (nonQ))$$

- Le **principe d'équivalence** :

$$((P \implies Q)\ et\ (Q \implies P)) \equiv (P \iff Q)$$

Exemple 12: Démontrer le **principe de la contraposition** :

$$(P \implies Q) \equiv (nonQ \implies nonP)$$

Exercice 0.18: Démontrer la **négation d'une implication** :

$$(non(P \implies Q)) \equiv (P \ et \ (nonQ))$$

Exercice 0.19: Démontrer les 2 équivalences logiques suivantes :

$$(P \implies Q) \equiv ((nonP) \ ou \ Q)$$
$$(P \ et \ Q) \equiv (non((nonP) \ ou \ (nonQ)))$$

Il est possible d'effectuer ces démonstrations sans utiliser les tables de vérité. Saurez-vous trouver comment ?

Exercice 0.20: Démontrer l'équivalence logique suivante :

$$(P \ et \ (Q \ ou \ R)) \equiv ((P \ et \ Q) \ ou \ (P \ et \ R))$$

Codage: **Codage avec des connecteurs logiques :**

Il est fort probable que la prochaine fois que vous suivrez un cours de logique formelle, on vous introduira le codage suivant :

- La négation : $\neg$
- La conjonction : $\wedge$
- La disjonction : $\vee$

Ainsi l'équivalence suivante (1re loi de Morgan) :

$$(non(P\ et\ Q)) \equiv ((nonP)\ ou\ (nonQ))$$

devient :

$$(\neg(P \wedge Q)) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$$

Ordre de priorité: La négation ($\neg$) est prioritaire, puis dans l'ordre des priorités décroissantes, nous trouvons la conjonction ($\wedge$), la disjonction ($\vee$), l'implication ($\Longrightarrow$) et finalement l'équivalence ($\Longleftrightarrow$ ou $\equiv$).

Exemple 13: L'implication :

$$(((\neg P) \wedge\ Q) \vee R) \implies (P\ \wedge\ R)$$

s'écrira plus simplement :

$$(\neg P \wedge Q) \vee R \implies P \wedge R$$

Exercice 0.21: Écrire les deux équivalences à l'aide du codage défini ci-dessus :

a) $non(P\ ou\ Q) \equiv ((nonP)\ et\ (nonQ))$

b) $(P\ et\ Q) \equiv\ (non((nonP)\ ou\ (nonQ)))$

Exercice 0.22:

a) Démontrer que : $\neg(P \implies Q) \quad \not\equiv \quad \neg(P) \implies \neg(Q)$

b) Compléter alors : $\neg(P \implies Q) \quad \equiv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exercice 0.23: Soit les propositions suivantes :

A : Si $ABCD$ est un carré, alors $ABCD$ est un rectangle ;

B : Si n premier, alors $n = 2$ ou n est impair ;

C : Si n est divisible par 6, alors n est divisible par 2 et par 3 ;

D : Si le quadrilatère $ABCD$ a des diagonales qui se coupent perpendiculairement en leur milieu, alors $ABCD$ est un losange.

Pour chacune de ces propositions, énoncer puis évaluer :

a) la négation **b)** la contraposée **c)** la réciproque

0.4 Les quantificateurs

Définition: **Le quantificateur existentiel $\exists$** :

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un paramètre x appartenant à un ensemble E. La proposition :

$$\exists x \in E, P(x)$$

se lit "Il existe un élément x de E tel que $P(x)$ est vraie" ;
signifie qu'*il existe au moins un élément x appartenant à l'ensemble E tel que la proposition évaluée pour x est vraie.*

Définition: **Le quantificateur universel $\forall$** :

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un paramètre x appartenant à un ensemble E. La proposition :

$$\forall x \in E, P(x)$$

se lit "Quel que soit x élément de E, $P(x)$ est vraie" ;
signifie que *la proposition évaluée en x est vraie pour tout élément x de l'ensemble E.*

Exemple 14: Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

a) $\exists x \in \mathbb{N},\ x^2 + 1$ est un carré parfait.

b) $\forall x \in \mathbb{N},\ x(x + 1)$ est un nombre entier pair.

Exercice 0.24: Parmi les propositions suivantes, laquelle est la négation de :

"Dans la liste $\{0, 4, 6, 7, 8, 17\}$, **tous** les nombres sont pairs" ?

a) "Dans cette liste, **tous** les nombres sont impairs".

b) "Dans cette liste, **il existe** un nombre impair".

c) "Dans cette liste, **aucun** nombre n'est impair".

2 Règles: Négations d'une proposition quantifiée :

$$\neg(\exists x \in E,\ P(x)) \equiv (\forall x \in E,\ \neg P(x))$$

$$\neg(\forall x \in E,\ P(x)) \equiv (\exists x \in E,\ \neg P(x))$$

Exemple 15: Proposer les négations des propositions de l'exemple précédent puis déterminer leur valeur de vérité :

a) $\exists x \in \mathbb{N},\ x^2 + 1$ est un carré parfait.

b) $\forall x \in \mathbb{N},\ x(x+1)$ est un nombre entier pair.

Exercice 0.25: En considérant que E est l'ensemble de tous les chats et P la condition d'avoir des moustaches, écrire les propositions suivantes à l'aide de quantificateurs :

a) Tous les chats ont des moustaches.

b) Il existe un chat sans moustaches.

c) Il n'existe pas de chat sans moustaches.

d) Aucun chat n'est sans moustaches.

Exercice 0.26: Évaluer les propositions :

a) $\exists x \in \mathbb{N}\ ,\ x^2 = 4$.

b) $\exists x \in \mathbb{N}\ ,\ 2x = 7$.

c) $\forall x \in \mathbb{N}$, x est un multiple de 3 et de 5 $\implies$ x est un multiple de 20.

d) $\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Exercice 0.27: Former la négation des propositions suivantes :

a) Certains Lausannois parlent chinois.

b) Les Lausannois savent lire.

c) Tous les Lausannois ont des cheveux blonds ou des yeux noirs.

d) Un Lausannois a 120 ans et parle tibétain.

e) Certains Lausannois parlent chinois ou le tibétain.

f) Aucun poisson ne respire avec des poumons.

Exercice 0.28: Les données de cet exercice se trouvent sur le site :

www.javmath.ch.

puis en sélectionnant le niveau : 1M_{renf}.

0.5 Les objets du raisonnement

C'est avec la logique que nous prouvons et avec l'intuition que nous trouvons.

Henri Poincaré

Le trait spécifique des mathématiques, par rapport aux autres sciences est d'être une science déductive. Plus précisément, une fois élaborée toute théorie mathématique comportera nécessairement :

Des objets fondamentaux: Ce sont des objets primitifs, intuitivement évidents, qui ne sont rattachés à aucune notion antérieure. De ce fait, on ne peut malheureusement pas en donner une définition rigoureuse.

a) *En géométrie* : les points, les droites, les plans, l'espace.

b) *En algèbre* : les nombres entiers.

Des axiomes: Ce sont des propriétés élémentaires considérées comme vraies sans aucune justification.

a) *En géométrie euclidienne* :

par deux points distincts passe une droite et une seule.

b) *En algèbre* : sur les nombres entiers :

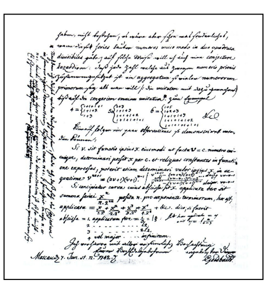
tout nombre X admet un successeur noté $\mathrm{succ}(X)$.

Des théorèmes: Ce sont des résultats nouveaux que l'on établit par un procédé appelé preuve ou démonstration. La démarche est toujours la même : on part d'une proposition appelée hypothèse, puis en appliquant les règles de la logique et les faits antérieurement admis (axiomes et théorèmes), on cherche par une suite de déductions, à aboutir à une nouvelle proposition appelée conclusion.

a) *En géométrie* : le théorème de Pythagore.

b) *En algèbre* : la somme de deux nombres entiers consécutifs est impaire.

Des conjectures: Une conjecture est une proposition qui a été proposée comme vraie, mais que personne n'a encore pu ni démontrer ni réfuter.



Lettre de Christian Goldbach à Léonard Euler (1742) lui présentant sa conjecture

La **conjecture de Goldbach :**

Tout nombre entier pair strictement supérieur à 2 peut être écrit comme la somme de deux nombres premiers.

$8 =$ $\qquad$ $28 =$

Exemple 16: Dans l'énoncé du théorème suivant, identifier clairement les hypothèses et la conclusion :

Le quotient de 2 nombres rationnels quelconques est un nombre rationnel.

Exercice 0.29: Dans l'énoncé des théorèmes suivants, identifier clairement les hypothèses et la conclusion :

a) La somme des angles d'un triangle vaut 180°.

b) Deux triangles qui ont respectivement un angle et les côtés adjacents isométriques sont isométriques.

c) Pour qu'un nombre soit divisible par 3, il faut et il suffit que la somme de ses chiffres soit un multiple de 3.

d) Tout nombre impair peut s'écrire comme le double d'un entier, augmenté d'une unité.

0.6 Les méthodes de démonstration

Méthode directe: Pour montrer qu'une implication $P \implies Q$ est vraie à l'aide de la méthode directe, on suppose que la proposition P est vraie et on démontre que la proposition Q est également vraie.

Exemple 17: Prouver que le produit de 2 nombres impairs est impair.

Exercice 0.30: Démontrer à l'aide de la méthode directe, les propositions suivantes :

a) Si on double les dimensions d'un rectangle, alors on double son périmètre.

b) La somme de deux nombres impairs est paire.

Comme souvent dans la vie, la méthode directe n'est pas toujours recommandée. Il faut utiliser une méthode indirecte. L'une d'entre elles se fonde sur le principe de la contraposition.

Méthode par contraposée: Pour montrer qu'une implication $P \implies Q$ est vraie à l'aide de la méthode par contraposée, on suppose que la proposition $\neg Q$ est vraie et on démontre que la proposition $\neg P$ est aussi vraie :

$$(\neg Q \implies \neg P) \equiv (P \implies Q)$$

Exemple 18: Soit n un nombre entier. Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 0.31: Formuler la contraposée des propositions suivantes :

a) Si le produit de deux nombres réels positifs est supérieur à 100, alors au moins l'un des deux nombres est supérieur à 10.

b) Si n est un nombre premier différent de 2, alors il est impair.

c) $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, si $m + n$ est pair, alors m et n sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs.

Exercice 0.32: Démontrer, à l'aide de la méthode par contraposée, les 3 propositions de l'exercice précédent.

Exercice 0.33: Démontrer les 2 théorèmes suivants en appliquant soit la méthode directe, soit la méthode par contraposée :

a) Si $3n + 2$ est impair alors n est impair.

b) La somme de 2 nombres rationnels est rationnelle.

Une autre forme de méthode indirecte est la méthode de réduction à l'absurde. Celle-ci se fonde sur le principe de non-contradiction.

Méthode par l'absurde: Pour montrer $\boldsymbol{H} \Longrightarrow \boldsymbol{C}$, on suppose $\boldsymbol{H}$ vraie et $\boldsymbol{C}$ fausse. On cherche, en cours de raisonnement un résultat qui soit contradictoire et donc contredisant $\boldsymbol{H}$ vraie $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{C}$ fausse.

Exemple 19: Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Cette dernière démonstration est considérée comme le premier raisonnement par l'absurde de l'histoire des mathématiques[3].

Exercice 0.34: Démontrer par l'absurde, les propositions suivantes :

a) La somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle.

b) Un triangle dont les côtés mesurent 10 cm, 11 cm et 12 cm n'est pas rectangle.

Dém. par contre-exemple: Pour démontrer qu'une proposition du type "$\forall x \in E, P(x)$" est fausse, on utilise la méthode du contre-exemple :
il suffit de trouver un seul exemple, dans lequel la proposition n'est pas vérifiée, permettant de conclure que celle-ci est fausse dans le cas général.

Exemple 20: Est-il vrai qu'un quadrilatère formé par quatre côtés isométriques est un carré ?

Exercice 0.35: Réfuter à l'aide d'un contre-exemple, les propositions suivantes :

a) Si a et b sont deux nombres quelconques et que $a < b$, alors $a^2 < b^2$.

b) Deux triangles sont isométriques s'ils possèdent deux paires de côtés isométriques et un angle égal.

c) Si un nombre entier est divisible par 4, il est aussi divisible par 12.

Disjonction des cas: Pour montrer qu'une proposition $P \implies Q$ est vraie à l'aide de la méthode par disjonction des cas, on distingue tous les cas de la proposition P : $P_1, \ldots P_k$ et on démontre chaque implication :

$$P_1 \implies Q, \ldots, P_k \implies Q$$

3. La découverte de l'existence des nombres irrationnels, mettant en péril la base de la philosophie Pythagoricienne, devait absolument rester secrète. On raconte que le premier Pythagoricien, qui a révélé ce secret, Hippase de Métaponte (vers 500 av. J.-C) fut exclu de l'école, et on lui érigea un tombeau pour signifier qu'il était comme mort pour les autres Pythagoriciens. Des auteurs rapportent qu'il se serait jeté dans la mer pour se punir, ou même qu'il fut jeté à la mer par ses condisciples.

Exemple 21: Pour tout entier n, $\frac{1}{2}n(n+1)$ est entier.

Exercice 0.36: Démontrer à l'aide de la méthode par disjonction des cas, les propositions suivantes :

a) Pour tout entier n, $n^2 + n$ est pair.

b) Pour tout entier a, 4 ne divise pas $a^2 - 2$.

Méthode par récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, nous désirons démontrer la formule :

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

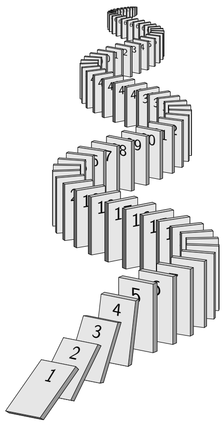
Sous cette formule se cache en réalité une infinité de propositions : une pour chaque valeur de n.

- si $n = 1$: $1 =$
- si $n = 2$: $1 + 2 =$
- si $n = 3$: $1 + 2 + 3 =$
- si $n = 4$: $1 + 2 + 3 + 4 =$

$\vdots \qquad \vdots$

Le problème qui se pose est le suivant comment, avec un nombre **fini d'étapes**, peut-on démontrer une **infinité de résultats** ?

La réponse à cette question est précisément la méthode du **raisonnement par récurrence** (ou induction), dont voici la description :



Soit $P(n)$ une proposition dépendant de la variable entière n et n_0 un entier. Pour démontrer que $P(n)$ est vraie $\forall n \geqslant n_0$, on effectue les 2 étapes suivantes :

Initialisation : on démontre que $P(n_0)$ est vraie,
Hérédité : on suppose que $P(n)$ est vraie $\forall n \geqslant n_0$ et on démontre que $P(n+1)$ est aussi vraie.

Si on arrive à faire tomber le premier domino, autrement dit $P(1)$ est vraie et si, peu importe quand le n^e domino est poussé, il fait tomber le $(n+1)^e$ domino c'est-à-dire $P(n) \implies P(n+1)$ est vraie, alors tous les dominos peuvent tomber les uns après les autres.

Exemple 22: Montrer que $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 0.37: Démontrer à l'aide de la méthode du raisonnement par récurrence, les propositions suivantes, où $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) $8^n - 1$ est divisible par 7.

Exercice 0.38: Déceler l'erreur commise dans la démonstration suivante :

$6^n + 1$ *est un multiple de 5, pour tout entier n naturel non nul.*

Preuve :
Supposons par récurrence que $6^n + 1$ est un multiple de 5, pour tout entier naturel non nul. Alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $6^n + 1 = 5k$. Mais :

$$6^{n+1} + 1 = 6 \cdot 6^n + 1 = 6(6^n + 1) - 5 = 6 \cdot 5k - 5 = 5(6k - 1)$$

On en déduit donc que $6^{n+1} + 1$ est un multiple de 5.

Pause sourire: *Plus il y a de gruyère, plus il y a de trous. Et plus il y a de trous, moins il y a de gruyère. Donc, plus il y a de gruyère, moins il y a de gruyère !*

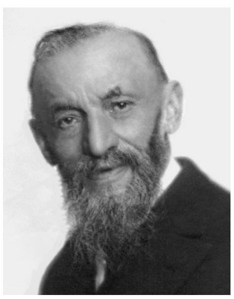
0.7 Les ensembles

Dieu fit le nombre entier, le reste est l'œuvre de l'homme.
Léopold Kronecker

Introduction: Cette dernière partie ne fait pas explicitement partie de ce que l'on appelle la logique formelle. Néanmoins, elle peut lui être associée dans les définitions des objets que l'on y manipule. On profitera de rappeler les différents ensembles de nombres déjà croisés ainsi que la signification des signes : $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, $\cap$, $\cup$.
Nous profiterons également de rappeler le codage des *ensembles de nombres.*

Définition:

- Une collection d'objets est **un ensemble** lorsqu'on peut dire avec certitude si un objet appartient ou n'appartient pas à cette collection.
- **Un élément** d'un ensemble désignera l'un de ces objets. Il figurera au maximum une fois dans celui-ci.



Giuseppe Peano (1858-1932)

Généralement, nous désignerons les ensembles par des lettres majuscules, et leurs éléments par des lettres minuscules.

Pour exprimer que l'élément e **appartient** à l'ensemble E , on note $e \in E$. Dans le cas contraire, on note $e \notin E$. Ce signe a été introduit en 1888 par le mathématicien italien Peano.

Les ensembles peuvent être décrits de **manière énumérative** ou à l'aide d'**une propriété caractéristique** :

Notation énumérative:

- Lorsqu'un ensemble se compose d'un petit nombre d'éléments, on peut en dresser la liste. Par exemple : $A = \{1\,;4\,;7\}$.
- Lorsque la liste des éléments d'un ensemble est clairement définie, on peut écrire les premiers éléments de la liste, suivis de trois points de suspension. Par exemple $B = \{2\,;4\,;6\,;8\,;\ldots\}$.

Notation par propriété caractéristique : Un ensemble A se définit souvent par rapport à un ensemble de référence E : les éléments de A sont alors ceux de E qui vérifient une condition P , appelée **propriété caractéristique**.
La notation :

$$A = \{x \in E \,|\, P(x)\}$$

se lit :

"A est l'ensemble des éléments de E qui vérifient la propriété P" .

Exemple 23: Soit $E = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\,;10\}$. Compléter :

Notation par propriété caractéristique	**Notation énumérative**
$A = \{x \in E \mid x < 4\}$	$A =$
$B =$	$B = \{1\,;3\,;5\,;7\,;9\}$
$C =$	$C = \{2\,;3\,;4\,;5\}$
$D = \{x \in E \mid x^2 - x = 0\}$	$D =$
$F = \{x \in E \mid x \neq x\}$	$F =$

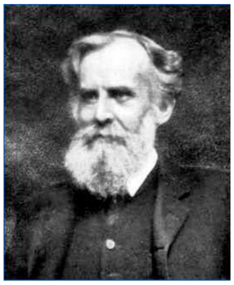
Exercice 0.39: Écrire sous forme énumérative les ensembles suivants :

- l'ensemble A des diviseurs de 48 ;
- l'ensemble B des chiffres apparaissant dans le code décimal de $\frac{1}{7}$;
- $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leqslant 68\}$;
- $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 6\}$;
- $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}, n \leqslant 5\}$;
- $F = \{x \in \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\,;8\,;9\} \mid x \text{ est premier} \implies x \text{ est impair}\}$.

Exercice 0.40: Écrire sous forme de propriété caractéristique :

- $A = \{11\,;13\,;17\,;19\,;23\,;29\}$;
- $B = \{a\,;e\,;i\,;o\,;u\,;y\}$;
- $C = \{0\,;7\,;14\,;21\,;\dots\}$;
- $D = \{-35\,;-34\,;-33\,;\dots\,;-11\,;-10\}$;
- $E = \{1\,;5\,;9\,;13\,;17\,;\dots\}$.

Définition: Il est souvent utile de représenter graphiquement les ensembles afin de mieux visualiser la situation. On utilise généralement les **diagrammes de Venn**, constitué par une ligne fermée sans recoupement (cercle, ovale, rectangle), à l'intérieur de laquelle on écrit les éléments de l'ensemble. Utilisons cette représentation pour visualiser les ensembles de nombres :



John Venn
mathématicien britannique
(1834-1923)

- L'ensemble des nombres qui servent à dénombrer est appelé ensemble des nombres entiers naturels :

$$\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;\ldots\}$$

- L'ensemble des nombres entiers qui sont positifs et négatifs est appelé ensemble des nombres entiers relatifs :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots\,;-3\,;-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\,;3\,;\ldots\}$$

- L'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction de nombres entiers relatifs est appelé ensemble des nombres rationnels :

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}\,\middle|\, a,\, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

- L'ensemble des nombres pouvant être représentés par un développement décimal fini ou illimité (périodique ou non) est appelé ensemble des nombres réels : $\mathbb{R}$.

Exercice 0.41: Établir un diagramme de Venn pour les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et y placer les nombres :

$a = 2{,}\overline{1}$ $\quad b = 3{,}0$ $\quad c = 0$ $\quad d = -7{,}\overline{841}$ $\quad e = -\sqrt{9}$
$f = \sqrt{15}$ $\quad g = \pi$ $\quad h = 0{,}1234567891011\ldots$ $\quad i = \sqrt{-1}$

0.7.1 Relations et Opérations sur les ensembles

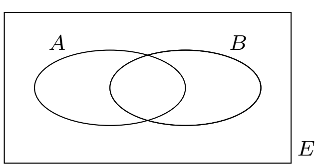
Relations:

- Deux ensembles sont **égaux** s'ils ont les mêmes éléments.
- Si tous les éléments de l'ensemble A sont également dans l'ensemble B, on dit que A est un **sous-ensemble** de B, ou que A est **inclus dans** B. On note alors :

  $$A \subset B$$

  Si A n'est pas contenu dans B, on note $A \not\subset B$
- **Propriété :** $A \subset B$ et $B \subset A \iff A = B$

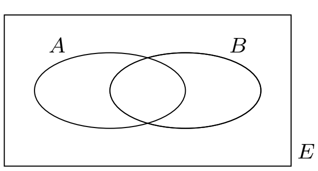
Opérations: Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.



$A \cup B$

- La **réunion** de A et de B est le sous-ensemble formé des éléments qui appartiennent au moins à l'un des deux ensembles A et B. On le note $A \cup B$.

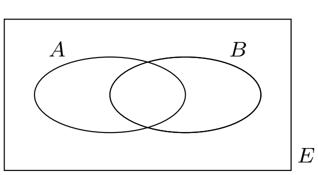
  Formellement : $A \cup B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$



$A \cap B$

- L'**intersection** de A et de B est le sous-ensemble formé des éléments qui appartiennent aux deux ensembles A et B. On le note $A \cap B$.

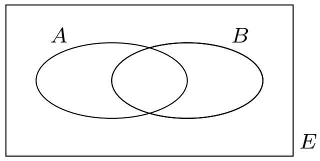
  Formellement : $A \cap B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ et } x \in B\}$



$A \setminus B$

- La **différence** de A et de B est le sous-ensemble formé des éléments qui appartiennent à l'ensemble A, mais pas à l'ensemble B. On le note $A \setminus B$

  Formellement : $A \setminus B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ et } x \notin B\}$



$\overline{A}$

- Le **complémentaire** de A dans E est le sous-ensemble formé des éléments qui n'appartiennent pas à l'ensemble A. On le note $\overline{A}$

$$\text{Formellement : } \overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

Exemple 24: Soit $A = \{1\,;2\,;3\,;7\}$ et $B = \{1\,;3\,;5\,;6\,;8\}$.
Déterminer les ensembles :

$A \cup B =$

$A \cap B =$

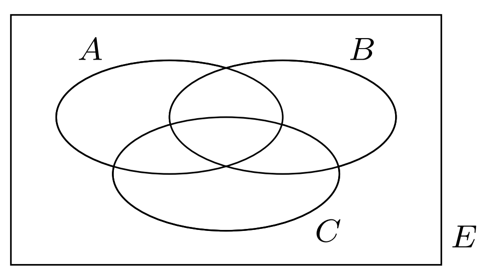
$A \setminus B =$

$B \setminus A =$

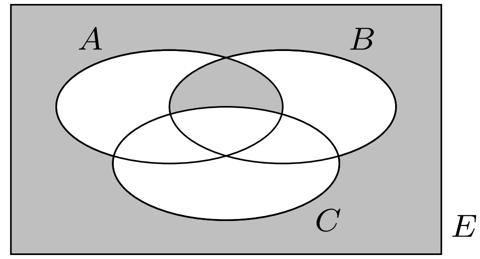
$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$

Exemple 25: Étant donné 3 ensembles non disjoints, hachurer l'ensemble :

$$A \cap (B \cup C)$$



Exemple 26: Coder au moyen du langage des ensembles la région grisée :



Exercice 0.42: Représenter les ensembles suivants dans un diagramme de Venn :

$A = \{x \mid x \text{ est un carré}\}$	$B = \{x \mid x \text{ est un parallélogramme}\}$
$C = \{x \mid x \text{ est un trapèze}\}$	$D = \{x \mid x \text{ est un losange}\}$
$E = \{x \mid x \text{ est un rectangle}\}$	$F = \{x \mid x \text{ est un quadrilatère}\}$

Exercice 0.43: On considère les ensembles $A = \{1\,;2\}$ et $B = \{1\,;2\,;3\}$.

a) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

Les ensembles $\{1\,;2\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\varnothing$ sont les quatre seuls sous-ensembles de A.

b) Déterminer tous les sous-ensembles que l'on peut former à partir de l'ensemble B et montrer qu'il y en a alors 8.

c) Montrer par récurrence que :

Le nombre de sous-ensembles de tout ensemble de n éléments est égal à 2^n.

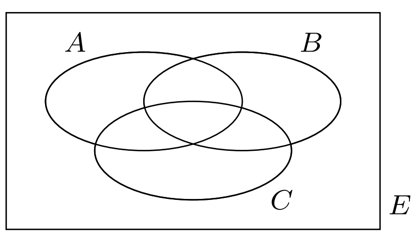
Exercice 0.44: On donne les ensembles $A = \{0\,;6\,;7\,;8\}$, $B = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\,;7\}$ et $C = \{0\,;1\,;8\,;9\,;10\}$.

Écrire en notation énumérative les ensembles :

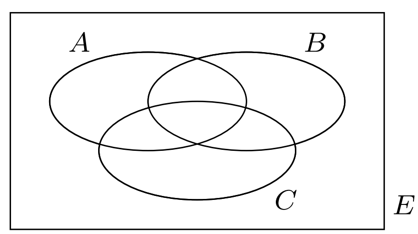
a) $(A \cap B) \cup A$ **b)** $A \cap (B \cap C)$

c) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$ **d)** $(C \setminus B) \setminus A$

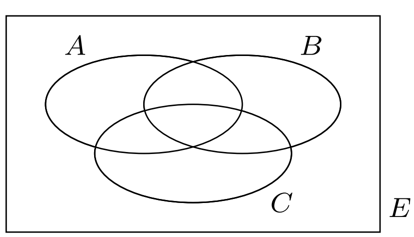
Exercice 0.45: Hachurer les ensembles donnés :



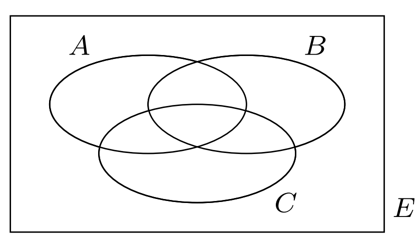
a) $(A \cap B) \cup C$



b) $(B \cup C) \setminus A$

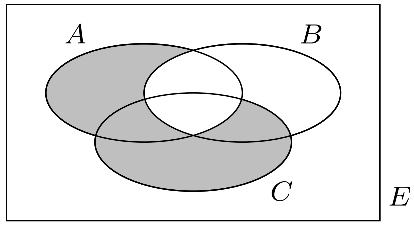


c) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$

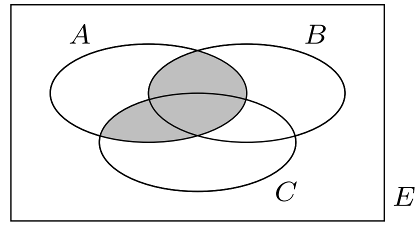


d) $\overline{A \cap B} \cap C$

Exercice 0.46: Mettre des parenthèses dans les expressions ci-dessous afin qu'elles représentent la région grisée :



a) $A \setminus B \cup C \setminus A$



b) $A \cap B \cup C$

Définition: Soit a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on défini et on note :

$\big[a\,;b\big] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ **intervalle fermé** 

$\big]a\,;b\big[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ **intervalle ouvert** 

$\big[a\,;b\big[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ 

$\big[a\,;+\infty\big[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$ 

$\big]-\infty\,;b\big[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ 

Exemple 27: Déterminer $\big[-2\,;6\big[\cup \big]1\,;9\big[$ puis $\mathbb{R} \setminus \Big(\big[-2\,;6\big[\cap \big]1\,;9\big[\Big)$

Exercice 0.47: Écrire l'ensemble $\big]-\infty\,;-5\big[\cup \big[2\,;+\infty\big[$ comme le complémentaire d'un intervalle.

Exercice 0.48: On donne trois intervalles I, J et K de $\mathbb{R}$. Déterminer $I \cap J$, $I \cap K$, $I \setminus (J \cup K)$, $(I \setminus J) \cup (I \setminus K)$ dans les cas suivants :

a) $I = [-3\,;4[$ $\qquad J = [-2\,;0[$ $\qquad K =]-5\,;3]$

b) $I =]-4\,;2]$ $\qquad J = [-2\,;3]$ $\qquad K =]-3\,;1[$

c) $I =]-5\,;3[$ $\qquad J =]-1\,;5]$ $\qquad K = [-3\,;4]$

1

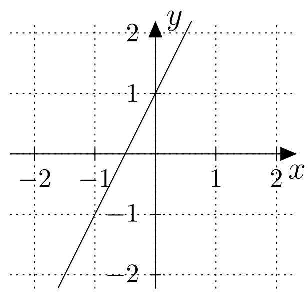
Fonctions du 1er degré

1.1 Fonctions linéaires et affines

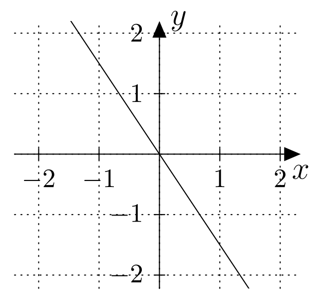
Définition: La fonction f définie par $f(x) = mx+h$ est appelée **fonction affine**. Son graphe est une droite qui passe par le point $H(0\,;h)$.

h est son **ordonnée à l'origine** et m **sa pente**.

La fonction f définie par $f(x) = mx$ est appelée **fonction linéaire**. Son graphe est une droite qui passe par l'origine et dont la pente vaut m.



$f(x) = 2x + 1$



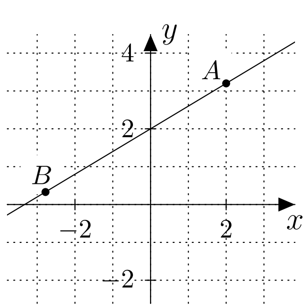
$f(x) = -\frac{3}{2}x$

Les fonctions linéaires sont des cas particuliers de fonctions affines admettant une ordonnée à l'origine de $h = 0$.

Exercice 1.1: Tracer le graphe des 2 fonctions f et g dans un même système d'axes

$$f(x) = -3x + 2 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2}{3}x - 1$$

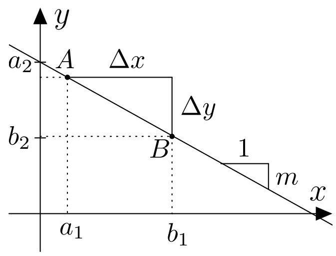
Exercice 1.2: On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3}{5}x + 2$ esquissée ci-contre.
Compléter les coordonnées des points $A(2\,;?)$ et $B\left(?\,;\frac{3}{10}\right)$.



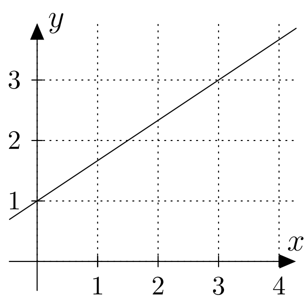
Rappel: La pente d'une droite est le rapport $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ où Δy est la différence de hauteur entre 2 points situés sur la droite et Δx leur écart horizontal.

Pour trouver la pente m d'une droite dessinée, on choisit deux points $A\,(a_1\,;a_2)$ et $B\,(b_1\,;b_2)$, on exprime alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$:

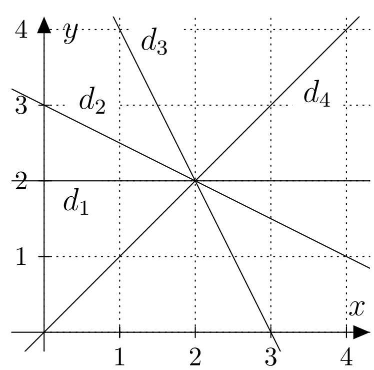
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}. \text{ Finalement, } m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$$

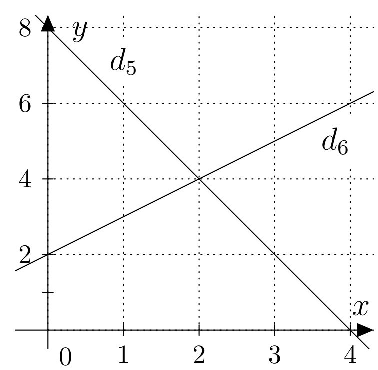


Exemple 1: Déterminer la pente de la droite représentée ci-contre puis en déduire l'expression de la fonction.



Exercice 1.3: Estimer les pentes des six droites représentées ci-dessous :





Exercice 1.4: Représenter les graphes des fonctions affines f telles que :

a) $f(-1) = 2$ et la pente du graphe de f vaut -2.

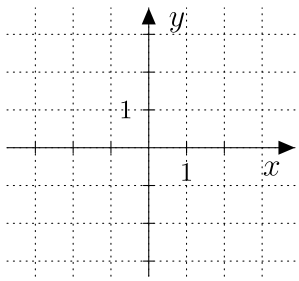
b) $g(0) = -1$ et la pente du graphe de g vaut $\frac{3}{2}$.

c) $h(2) = 0$ et la pente du graphe de h vaut $-\frac{3}{5}$.

d) $j(4) = 5$ et la pente du graphe de j vaut 0.

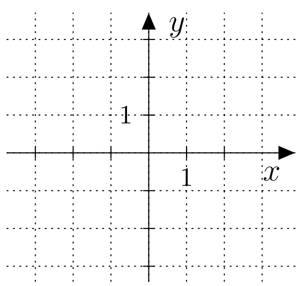
Exemple 2: On considère la fonction f définie par $f\,(x) = -\dfrac{1}{2}x + 1$.

Représenter le graphe de f à l'aide de deux points.



Exemple 3: On considère la fonction f définie par $f\,(x) = \dfrac{2}{3}x - 2$.

Représenter le graphe de f à l'aide de la pente et de l'ordonnée à l'origine.

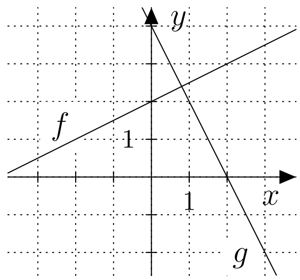


Exercice 1.5: En utilisant la pente et l'ordonnée à l'origine, tracer le graphe des 2 fonctions f et g dans un même système d'axes :

$$f\,(x) = -\frac{3}{4}x + 2 \quad \text{et} \quad g\,(x) = \frac{1}{2}x$$

Exercice 1.6: Déterminer la fonction g dont le graphe est la droite qui passe par le point $B(2\,;1)$ et qui est parallèle au graphe de la fonction f donnée par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

Exemple 4: Déterminer les 2 fonctions f et g représentées ci-contre puis en déduire les solutions de l'équation et de l'inéquation suivante :



$$f(x) = g(x) \qquad g(x) \leqslant 0 \qquad f(x) < g(x)$$

Exercice 1.7: On considère les 2 fonctions f et g définie par :

$$f\,(x) = -2x + 6 \quad \text{ et } \quad g\,(x) = \frac{1}{2}x - 3$$

- Tracer le graphe des 2 fonctions f et g dans un même système d'axes.
- Résoudre ensuite les équations et inéquations suivantes :

a) $f\,(x) = 0$	**b)** $f\,(x) = g\,(x)$	**c)** $f\,(x) = x$
d) $f\,(x) < 0$	**e)** $f\,(x) > g\,(x)$	**f)** $f\,(x) \geqslant x$

Exemple 5:

a) Déterminer la fonction affine de pente $m = \frac{2}{5}$ et dont le graphe passe par le point $P(-1\,;3)$.

b) Déterminer la fonction affine dont le graphe passe par les points $A(-1\,;3)$ et $B(2\,;-4)$.

Exercice 1.8:

a) Trouver la fonction affine dont le graphe passe par les points $A(7\,;-2)$ et $B(-3\,;1)$.

b) Trouver la fonction affine dont le graphe coupe l'axe Ox en $I(-5;0)$ et dont la pente vaut $-\frac{5}{8}$.

c) Trouver la fonction affine telle que $f(2)=5$ et dont le graphe passe par le point $A(5\,;5)$.

d) Trouver l'abscisse du point $C(x\,;10)$ sachant que les points $A(1\,;1)$, $B(3\,;-2)$ et C sont alignés.

1.2 Équations

Pour trouver le point d'intersection I des graphes de deux fonctions f et g, on est amené à résoudre l'équation $f(x)=g(x)$

Exemple 6: Les graphes des fonctions f et g données par $f(x)=2x+3$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x+1$ se coupent en un point I.
Déterminer ses coordonnées.

Exercice 1.9: Déterminer algébriquement les coordonnées du point I d'intersection du graphe des deux fonctions f et g :

a) $f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{2}{5}$ et $g(x)=\frac{1}{5}x-\frac{3}{4}$

b) $f(x)=-3x+12$ et $g(x)=\frac{1}{3}(x-3)$

c) $f(x)=-\frac{2}{3}(3x-5)$ et $g(x)=\frac{1}{4}(5-8x)$

d) $f(x)=2x-6$ et $g(x)=2(x-3)$

e) Justifier graphiquement les solutions obtenues dans les deux derniers cas.

Exercice 1.10: Résoudre les équations suivantes :

a) $\frac{1}{4}x+\frac{2}{5}=\frac{1}{5}x-\frac{3}{4}$

b) $3x+8=2(x+4)$

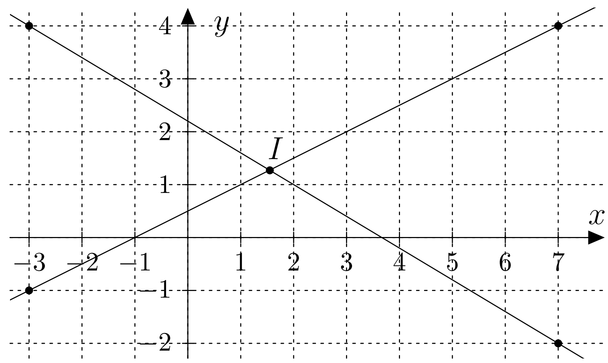
c) $2x+5=\frac{1}{2}(7-4x)$

d) $\frac{1}{2}(8+2x)=x+4$

e) $\dfrac{t-5}{3}=\dfrac{2-t}{2}$

f) $3x-\dfrac{4-x}{2}=x-\dfrac{1}{3}$

Exercice 1.11: On considère la figure suivante :

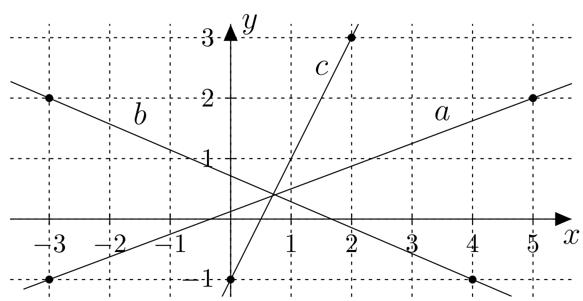


a) Calculer les coordonnées du point d'intersection I des deux droites dessinées ci-dessus.

b) Trouver la fonction k dont le graphe est une droite qui passe par l'origine et par le point I.

c) Trouver la fonction ℓ dont le graphe est une droite parallèle au graphe de k et qui passe par le point $P(2\,;-1)$.

Exercice 1.12: Les trois droites a, b et c se coupent-elles en un point ou forment-elles un triangle ?



Exercice 1.13: On considère la fonction f_a définie par :

$$f_a(x) = ax + a \quad (a \in \mathbb{R})$$

a) Représenter le graphe de f_a pour quelques valeurs de a.

b) Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$, le graphe de f_a passe-t-il par le point $A(3\,;8)$?

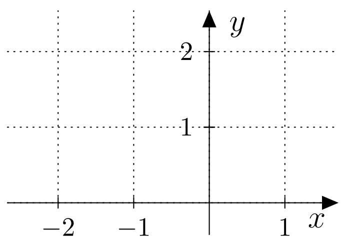
c) Vérifier, que pour toute valeur de a, le graphe de f_a passe par un même point B dont on donnera les coordonnées.

1.3 Inéquations

Pour résoudre l'inéquation $ax + b > 0$ ou $ax + b \leqslant 0$ ou ..., on peut observer le graphe de la fonction f définie par $f(x) = ax + b$. On pourra également, comme le montre l'exemple ci-dessous, la résoudre algébriquement.

Exemple 7: Résoudre graphiquement puis algébriquement l'inéquation :

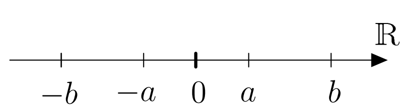
$$\frac{1}{2}x + 1 > 0$$



Exemple 8: Résoudre l'inéquation :

$$-x - 2 > 0$$

Constatations: La résolution d'une inéquation du 1er degré est analogue à celle d'une équation du 1er degré, cependant il faut **changer le sens de l'inégalité** lorsque l'on **multiplie** ou **divise** les deux membres par un **nombre négatif**. On peut observer ceci sur la droite réelle :

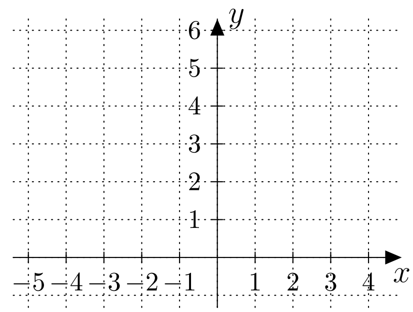


$$a < b \Longleftrightarrow -a > -b$$

Exercice 1.14: On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = -\frac{4}{3}x + 3 \text{ et } g(x) = \frac{3}{5}x + 5$$

a) Représenter ci-dessous le graphe de ces deux fonctions :



b) En déduire graphiquement la solution de l'inéquation :

$$f(x) \leqslant g(x)$$

c) Résoudre algébriquement cette même inéquation.

Exercice 1.15: Résoudre les inéquations suivantes :

a) $5 - 2x \geqslant 1$

b) $-4x - 5 < x + 5$

c) $-(7 - 2x) - 8 \geqslant 0$

d) $1 - 3x \leqslant \frac{1}{3}(8 + 2x)$

e) $2x - \dfrac{x-5}{3} > 4 - \dfrac{2-x}{2}$

f) $\dfrac{4-x}{2} - \dfrac{x-3}{5} \geqslant x - \dfrac{x+2}{3}$

Exemple 9: Résoudre le système d'inéquations : $\begin{cases} -x + 5 > \frac{x}{2} \\ 1 - \frac{x+1}{3} \leqslant 3x \end{cases}$

Exercice 1.16: Résoudre les systèmes d'inéquations suivantes :

a) $\begin{cases} 3 - x < \frac{x}{3} \\ 1 + 4x \geqslant 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3 - x \leqslant 2x + 4 \\ 2x - 1 < -x \end{cases}$

1.4 Quelques applications (1re partie)

Exercice 1.17: La vitesse v (en mètres par seconde) d'un objet en chute libre est donnée par la relation $v(t) = 9{,}8 \cdot t + v_0$ où v_0 est la vitesse initiale et t le temps (en secondes).

a) Exprimer le temps en fonction de la vitesse.

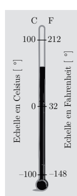
b) Quelle est la vitesse de l'objet en $t = 4$ s sachant qu'au temps $t = 2$ s sa vitesse était de 21 m/s.

Exercice 1.18: Une barre métallique mesure 45 cm à une température de 15° C et 45,2 cm à une température de 51°. En admettant que l'allongement de la barre est proportionnel à l'élévation de la température, on demande :

a) La longueur de la barre à une température de 60°C.

b) La température à laquelle la barre mesure 44,7 cm.

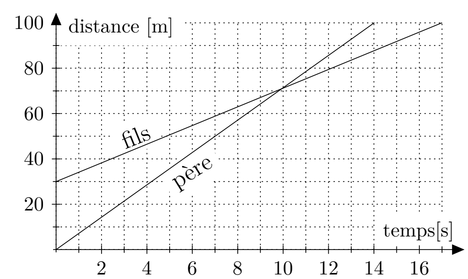
Exercice 1.19: La relation entre la température c sur l'échelle Celsius et la température f sur l'échelle Fahrenheit est donnée par $c = \frac{5}{9} \cdot (f - 32)$.



a) Donner la température qui s'exprime par le même nombre dans les deux échelles.

b) Pour quelle température le nombre lu sur l'échelle en Fahrenheit est-il le double du nombre lu sur l'échelle en Celcius ?

Exercice 1.20: Un père défie son fils au 100 m et lui laisse un certain nombre de mètres d'avance. Les graphes simplifiés de cette course sont donnés ci-dessous.



a) Combien de mètres d'avance le père laisse-t-il au fils ?

b) Qui a gagné ? Avec combien de secondes d'avance ?

c) Quelle distance les sépare lorsque le vainqueur franchit la ligne d'arrivée ?

d) Quelle est la vitesse du père, celle du fils ?

e) À quoi correspond concrètement la pente de chacune des droites ?

f) Le père et le fils ont-ils été côte à côte ? Si oui, quelle distance avait parcourue le père ?

Exemple 10: Une autoroute de 120 km relie les villes A et B. Un habitant de A se rend à la ville B à la vitesse moyenne de 60 km/h.
À quelle vitesse doit-il revenir de B à A s'il veut que sa vitesse moyenne sur le parcours aller-retour soit de 80 km/h ?

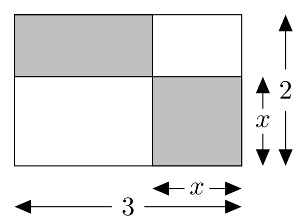
Exercice 1.21: Une autoroute de 120 km relie les villes A et B. Un habitant de A se rend à la ville B à la vitesse moyenne de 60 km/h. À quelle vitesse doit-il revenir de B à A s'il veut que sa vitesse moyenne sur le parcours aller-retour soit de :

a) 100 km/h **b)** 120 km/h

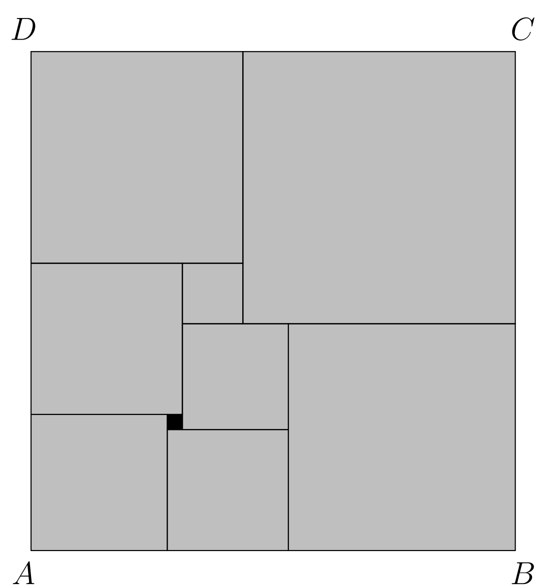
Exercice 1.22: Un garçon tond le gazon en 90 minutes, mais sa soeur peut le faire en 60 minutes. Combien leur faudra-t-il de temps s'ils travaillent ensemble avec deux tondeuses ?

Exercice 1.23: Une balle est tirée horizontalement sur une cible, et l'on entend le bruit de l'impact 1,5 seconde plus tard. Si la vitesse de la balle est de 990 m/s et la vitesse du son 330 m/s, quel est l'éloignement de la cible ?

Exercice 1.24: Pour quelles valeurs de x l'aire du carré grisé dépasse-t-elle l'aire du rectangle grisé ?

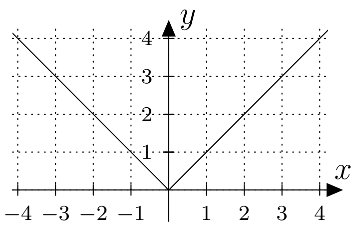


Exercice 1.25: (DÉFI) Le rectangle $ABCD$ ci-dessous a été découpé en carrés. Calculer ses dimensions sachant que le plus petit des carrés, en noir sur le dessin, mesure 2 cm de côté :



1.5 Fonctions définies par morceaux

Définition: Le graphe de la fonction **valeur absolue** donnée par $f(x) = |x|$ est représentée ci-dessous.



On constate que ce graphe est formé de deux demi-droites, la demi-droite $y = -x$ pour les x négatifs et la demi-droite d'équation $y = x$ pour les x positifs.
On peut donner une expression de cette même fonction sans utiliser le *symbole valeur absolue*, en séparant, dans la définition de f, les x positifs des x négatifs :

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Une fonction donnée de cette façon est dite **définie par morceaux**.

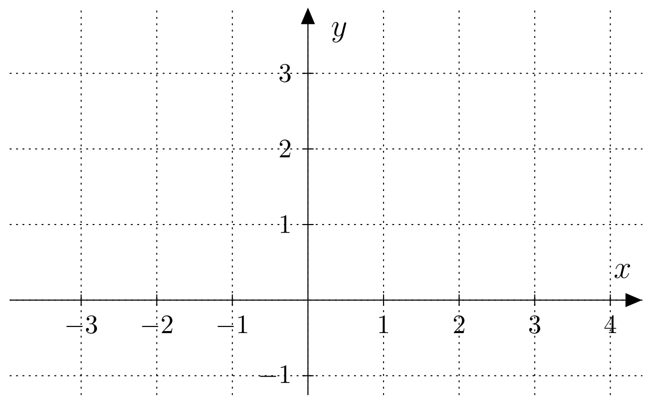
Exemple 11: Écrire les fonctions f suivantes sans utiliser de valeur absolue, puis esquisser les graphes

a) $f(x) = |-x + 4|$ **b)** $f(x) = 3|x + 1| - 6|2x - 4|$

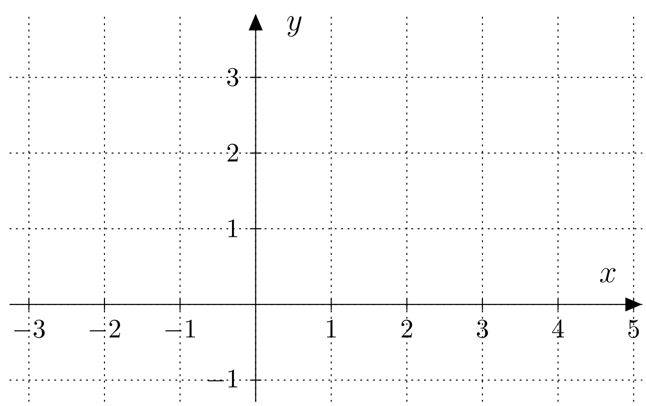
Exercice 1.26: Écrire les fonctions f suivantes sans utiliser de valeur absolue, puis esquisser les graphes

a) $f(x) = |x - 5|$ **b)** $f(x) = -3|x| + 6$
c) $f(x) = |-2x + 3| - |x + 2|$

Exemple 12: Représenter la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{si } x < 1 \\ -x + 3 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$



Exemple 13: Représenter la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ -x + 3 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$



a) Calculer $f(-2)$ et $f(3)$.
b) Résoudre $f(x) = 0$ puis $f(x) = 3$.

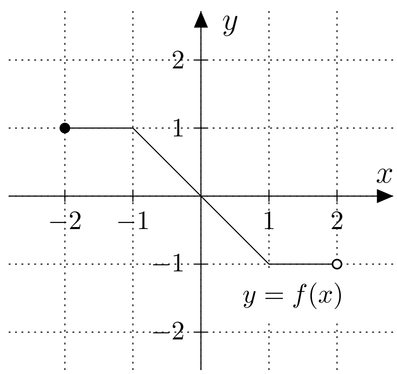
Exercice 1.27: Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} -x+5 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2x-1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

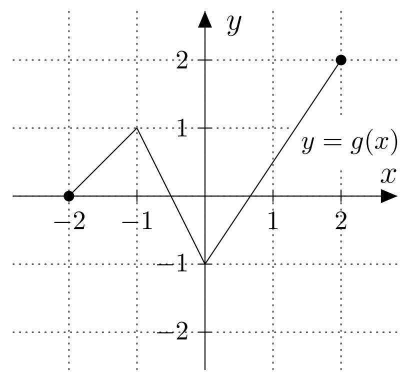
a) Déterminer l'ordonnée des points du graphe de f d'abscisse $x = 2$, $x = -1$ et $x = 4$.

b) Déterminer l'abscisse des points du graphe de f d'ordonnée $y = 3$.

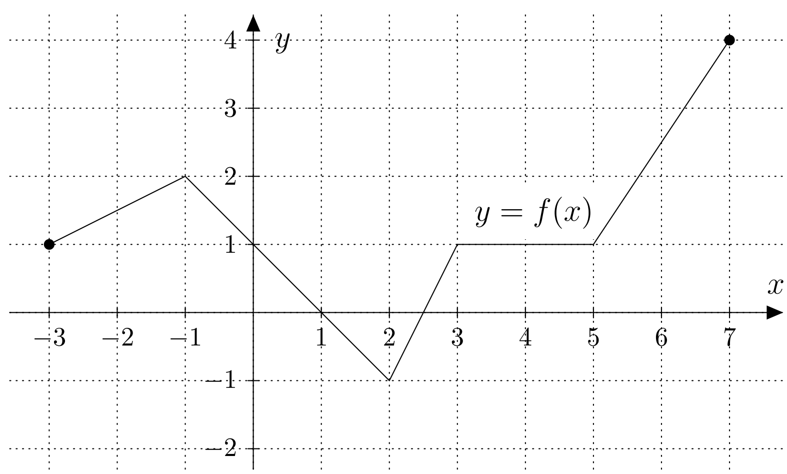
c) Résoudre l'équation $f(x) = 5$ puis $f(x) = 1$.

Exercice 1.28: Déterminer les fonctions f et g représentées ci-dessous :





Exercice 1.29: Déterminer la fonction f représentée ci-dessous :



Puis résoudre

a) $f(x) = 3$ **b)** $f(x) = 1$ **c)** $f(x) > 1$

Exercice 1.30: On donne la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & \text{si } x \in \left]-\infty\,;-1\right] \\ 2x & \text{si } x \in \left]-1\,;2\right] \\ \frac{1}{2}x+3 & \text{si } x \in \left]2\,;+\infty\right[\end{cases}$$

a) Dessiner le graphe de f.

b) Résoudre les équations $f(x) = 1$ puis $f(x) = x$.

c) Résoudre l'inéquation $f(x) < x$.

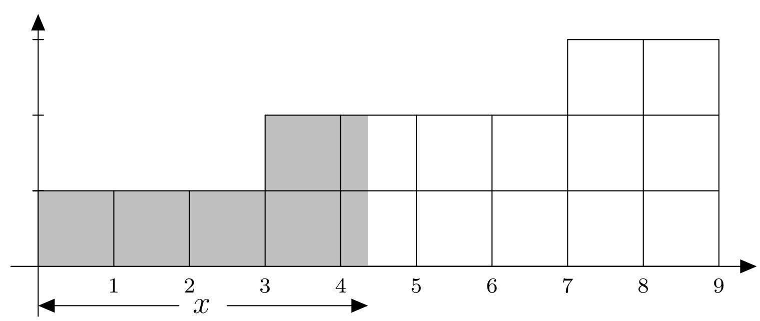
Exercice 1.31: On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & \text{si } x \leqslant a \\ x-1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

Pour quelle valeur de a le graphe de la fonction f forme-t-il une ligne brisée ?

1.6 Quelques applications (2e partie)

Exercice 1.32: L'unité de longueur étant le côté des carreaux du quadrillage, on désigne par $f(x)$ l'aire du domaine grisé, pour $0 \leqslant x \leqslant 9$



a) Calculer $f(0)$, $f(3)$, $f(7)$ et $f(9)$.

b) Déterminer $f(x)$ sur chacun des intervalles $\left[0\,;3\right[$, $\left[3\,;7\right[$ et $\left[7\,;9\right]$.

c) Représenter le graphe de $f(x)$.

d) Résoudre les équations $f(x) = 10$ et $f(x) = 15$, graphiquement puis contrôler les résultats à l'aide d'un calcul.

Exercice 1.33: Une caisse d'assurance maladie propose à ses clients différentes franchises [1] :

- Pour une franchise de 230.-, la prime annuelle s'élève à 4'710.-
- Pour une franchise de 400.-, la prime annuelle s'élève à 4'630.-
- Pour une franchise de 600.-, la prime annuelle s'élève à 4'470.-
- Pour une franchise de 1'200.-, la prime annuelle s'élève à 3'750.-

En plus de la franchise, une participation de 10% aux frais qui dépassent la franchise reste à la charge de l'assuré.

a) Montrer que si un assuré choisit la première franchise et que ses factures médicales totalisent 8000.- l'an prochain, il devra s'acquitter de la somme totale de 5717.-

b) Quelle franchise doit-il choisir pour obtenir la solution la moins chère en supposant que ses factures médicales totaliseront 8000.- l'an prochain.

c) (BONUS) Donner l'expression de la fonction qui, pour une franchise f et une prime p, donne la dépense en fonction des coûts de santé.

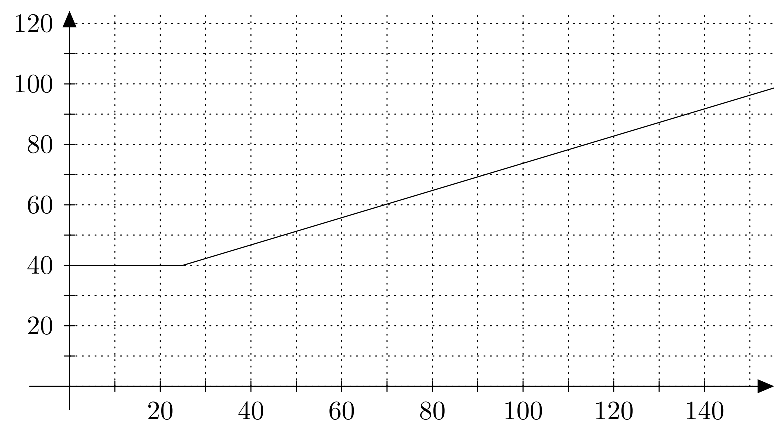
1. La franchise est le montant que doit payer l'assuré, chaque année, avant que la caisse maladie n'intervienne.

Exercice 1.34: Un opérateur téléphonique propose différents contrats pour la téléphonie mobile :

Type de contrat	Taxe mensuelle	Minutes de conversation gratuite	Prix par minute de communication supplémentaire
Carte à prépaiement	0.–	0	–.80
Abonnement A	25.–	15	–.55
Abonnement B	40.–	25	–.45

a) Un client a, en moyenne, 90 minutes de communication par mois. Calculer, pour chacun des contrats, la somme à payer.

b) Dans le système d'axes ci-dessous, on a déjà représenté un des trois types de contrats. Lequel ?



c) Compléter le graphique en indiquant à quoi correspondent les axes.

d) Représenter les 2 derniers types de contrats, après avoir donné les expressions de ces 3 fonctions.

e) Pour chacun des contrats, donner l'intervalle de temps de communication où il est le meilleur marché.

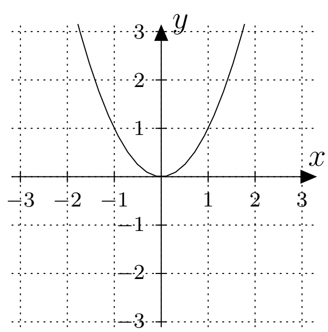
2

Fonctions du 2e degré

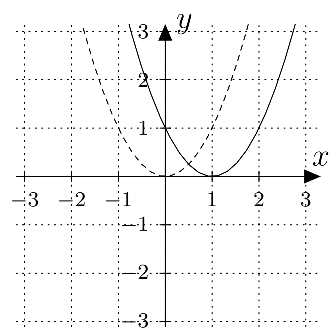
2.1 Paraboles

Définition: La fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ est une fonction du 2e degré que l'on appelle aussi **fonction quadratique**. Son graphe est une **parabole**.

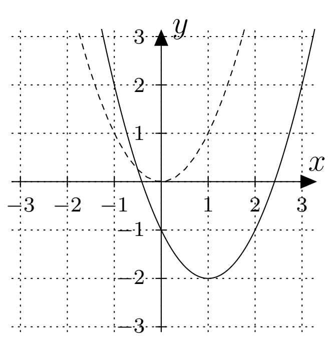
Exemple 1: Graphes de fonctions du 2e degré



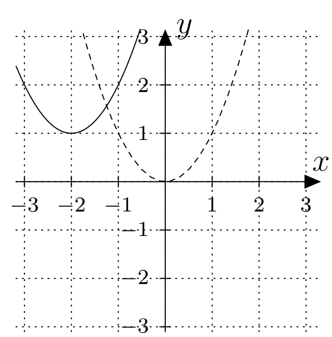
$f(x) = x^2$



$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

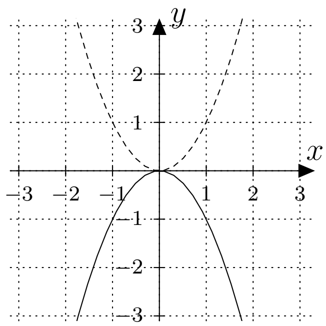


$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2 - 2 \\ &= x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

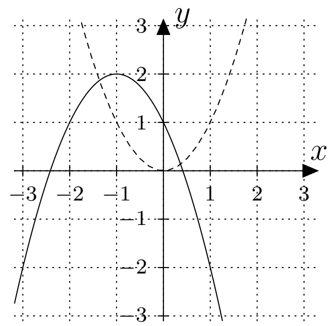


$$\begin{aligned} f(x) &= (x\ldots\ldots)^2 + \ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

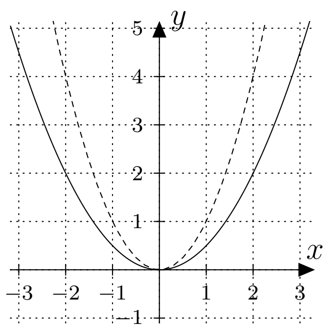
Exemple 2: Graphes de fonctions du 2e degré (suite)



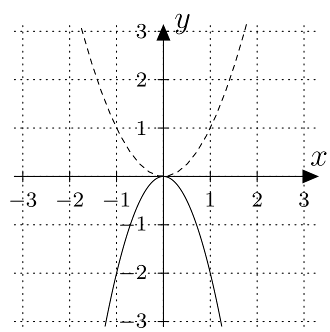
$f(x) = -x^2$



$$\begin{aligned} f(x) &= -(x+1)^2+2 \\ &= -x^2-2x+1 \end{aligned}$$



$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$



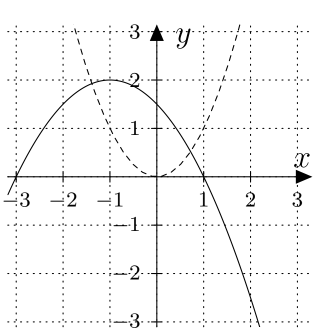
$f(x) = -2x^2$

Constatations: L'expression d'une fonction f du 2e degré peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a \cdot (x - 1^{\text{re}} \text{ coord. du sommet})^2 + 2^{\text{e}} \text{ coord. du sommet}$$

où a représente "l'ouverture" de la parabole et son signe indique "son orientation".

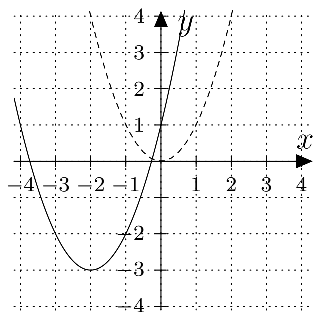
Exemple 3: Déterminer l'expression de la fonction représentée ci-contre



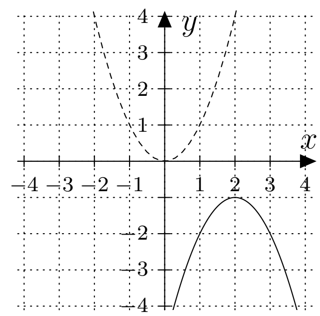
Exercice 2.1: À partir de la fonction de référence $x \mapsto x^2$,
déterminer les fonctions f représentées sur les graphes ci-dessous.

On demande les 2 formes :

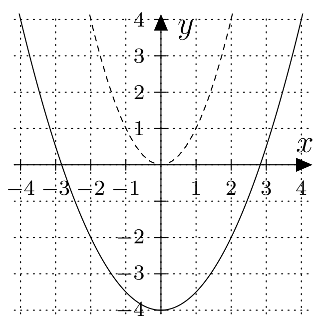
$$f(x) = a(x - \dots)^2 + \dots \qquad \text{et} \qquad f(x) = ax^2 + bx + c$$



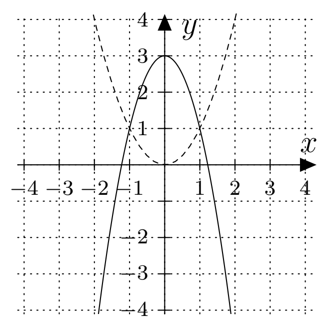
a)



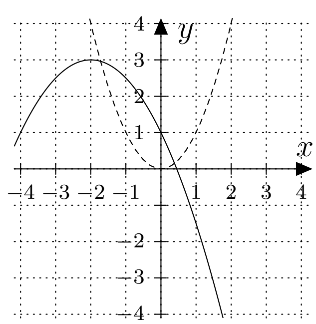
b)



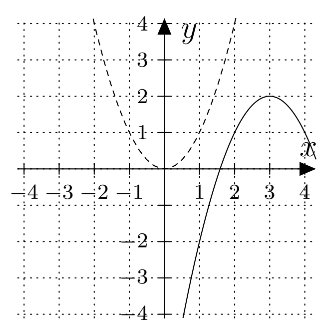
c)



d)



e)



f)

Exercice 2.2: Déterminer la fonction f du 2^e^ degré du type $f(x) = x^2 + bx + c$ dont le graphe admet un sommet S aux coordonnées suivantes :

a) $S(-2\,;3)$ **b)** $S(4\,;-2)$ **c)** $S(-1\,;0)$

Exercice 2.3: On considère la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Vérifier la relation suivante :

$$a\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = ax^2 + bx + c$$

b) En déduire que les coordonnées du sommet S de la parabole, définie par la fonction f, sont données par :

$$S\left(\frac{-b}{2a}\,; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

Exemple 4: Déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole définie par la fonction f suivante : $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$

Exercice 2.4: Déterminer les coordonnées du sommet S des paraboles définies par les fonctions f suivantes :

a) $f(x) = x^2 - 4x + 7$ **b)** $f(x) = 2x^2 - 9x + 5$

c) $f(x) = -3x^2 + 8x - 6$ **d)** $f(x) = -x^2 + 4x$

Exemple 5: Exprimer la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + 8x - 9$ sous la forme :

$$f(x) = \ldots(x + \ldots)^2 + \ldots$$

Exercice 2.5: Exprimer les fonctions f sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$f(x) = \ldots(x + \ldots)^2 + \ldots \qquad f(x) = \ldots(x - \ldots)^2 + \ldots$$

a) $f(x) = x^2 - 4x + 7$ **b)** $f(x) = x^2 + 6x + 2$

c) $f(x) = -2x^2 - 4x + 11$ **d)** $f(x) = 2x^2 - 9x + 5$

Exercice 2.6: En appliquant une démarche comparable à celle qui précède, montrer que

$$ax^2+bx+c=a\left(x-\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

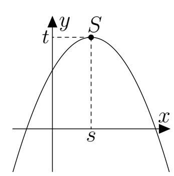
Théorème:

- Toute fonction quadratique f peut s'écrire sous la forme

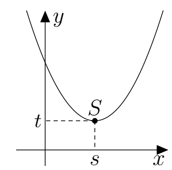
$$f(x)=a(x-s)^2+t$$

avec : $\boxed{s=\frac{-b}{2a}}$ et $\boxed{t=-\frac{b^2-4ac}{4a}}$

- Son graphe est une parabole de sommet $S\,(s\,;t)$



$a<0$



$a>0$

Exercice 2.7: Exprimer les fonctions f sous la forme $a(x-s)^2+t$, et en déduire les coordonnées du sommet des paraboles.

a) $f(x)=x^2-6x+11$ **b)** $f(x)=-x^2-4x-8$

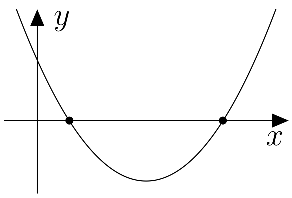
c) $f(x)=2x^2-x+\frac{9}{16}$ **d)** $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+7$

Exemple 6: Esquisser la fonction f définie par $f(x)=-x^2+4x-1$

Exercice 2.8: Esquisser rapidement les fonctions f suivantes :

a) $f(x)=x^2-4x+3$ **b)** $f(x)=-x^2-4x-5$

2.2 Équations du 2e degré



Chercher les **zéros de la fonction** f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ revient à résoudre l'équation du 2e degré $ax^2 + bx + c = 0$.

Deux outils sont à votre disposition : la factorisation et la “fameuse formule”.

Graphiquement, cela revient à déterminer l'abscisse des points d'intersection de la parabole et de l'axe Ox.

2.2.1 Factorisation par produits remarquables

Exemple 7: Résoudre les équations ci-dessous.

a) $2x^2 - 32 = 0$ **b)** $9(x-3)^2 = 4$

Rappel:

Les produits remarquables

$$\boxed{\begin{aligned} A^2 - B^2 &= (A+B)(A-B) \\ A^2 + 2AB + B^2 &= (A+B)^2 \\ A^2 - 2AB + B^2 &= (A-B)^2 \end{aligned}}$$

Exemple 8: Résoudre les équations ci-dessous.

a) $9x^2 + 24x + 16 = 0$ **b)** $x^3 - 4x^2 + 4x = 0$

Exercice 2.9: Résoudre les équations suivantes :

a) $6x^2 - 6 = 0$
b) $t^2 + 20t + 100 = 0$
c) $48z^2 - 216z + 243 = 0$
d) $4x^2 = 9$
e) $8x^2 - 112x + 392 = 0$
f) $196z^2 + 280z = -100$
g) $t^2 + t + \frac{1}{4} = 0$
h) $9x^2 - \frac{1}{9} = 0$
i) $18z^2 + 72z + 72 = 0$
j) $x^2 - 5 = 0$
k) $4(x-2)^2 = 1$
l) $(x+1)^2 = 16$

2.2.2 Factorisation du trinôme unitaire (par *Somme-Produit*)

Exemple 9: Développer

a) $(x+2)(x-5) =$

b) $(x+a)(x+b) =$

Exemple 10: Résoudre les équations ci-dessous.

a) $x^2 + 4x - 12 = 0$
b) $2x^2 + 20x + 42 = 0$

Exercice 2.10: Résoudre les équations suivantes :

a) $x^2 - 5x - 36 = 0$
b) $x^2 + 3x - 18 = 0$
c) $2z^2 + 24z + 64 = 0$
d) $x^2 + 7x + 6 = 0$
e) $-y^2 + 10y - 9 = 0$
f) $t^2 + 11t + 30 = 0$
g) $x^2 - 11x + 10 = 0$
h) $x^2 + 7x = 18$
i) $x^2 + 18x + 45 = 0$
j) $4x + 32 = x^2$

2.2.3 Factorisation du trinôme non unitaire (par *Tâtonnement*)

Exemple 11: Développer

a) $(2x+1)(3x-2) =$

b) $(ax+b)(cx+d) =$

Exemple 12: Résoudre les équations ci-dessous.

a) $4x^2 + 7x - 11 = 0$ **b)** $3x^2 + 7x - 6 = 0$

Exercice 2.11: Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2 + 13x + 15 = 0$ **b)** $9x^2 + 8x - 1 = 0$

c) $5y^2 - 54y - 72 = 0$ **d)** $2x^2 - x - 28 = 0$

e) $3x^2 + 2x - 1 = 0$ **f)** $4t^2 + 7t = 2$

g) $17x^2 + 288x - 17 = 0$ **h)** $4x^2 + 2x = 56$

i) $3x^2 - 8x - 35 = 0$ **j)** $45u + 12 = 12u^2$

Exercice 2.12: Résoudre les équations suivantes (un petit mélange) :

a) $x^2 - 8x + 12 = 0$ **b)** $6x^2 + 5x + 1 = 0$

c) $x^3 - x = 0$ **d)** $6x^2 + 16x - 6 = 0$

e) $(x-1)(2-x) = (x-1)(x+3)$ **f)** $t^2 + 8t - 48 = 0$

g) $x^2 = 16$ **h)** $16 - (3x+2)^2 = 0$

2.2.4 Factorisation du trinôme (méthode *Compléter le carré*)

Exercice 2.13: Décoder l'étrange méthode utilisée pour résoudre cette équation

$$x^2 + 6x - 7 = 0 \qquad | \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^2 + 6x = 7 \qquad | \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x^2 + 6x + 9) - 9 = 7 \qquad | \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x+3)^2 - 9 = 7 \qquad | \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x+3)^2 - 16 = 0 \qquad | \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\big[(x+3)+4\big]\big[(x+3)-4\big] = 0 \qquad | \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(x+7)(x-1) = 0$$
$$S = \{-7\,;1\}$$

Appliquer cette même démarche aux 2 équations :

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ **b)** $x^2 + 5x - 14 = 0$

Exercice 2.14: Décoder alors celle-ci

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \qquad | \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2\left(x^2 - \tfrac{5}{2}x - \tfrac{3}{2}\right) = 0 \qquad | \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2\left(x^2 - \tfrac{5}{2}x + \tfrac{25}{16} - \tfrac{25}{16} - \tfrac{3}{2}\right) = 0 \qquad | \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2\left[\left(x - \tfrac{5}{4}\right)^2 - \tfrac{49}{16}\right] = 0 \qquad | \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2\left[\left(x - \tfrac{5}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{7}{4}\right)^2\right] = 0 \qquad | \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2\left[\left(x - \tfrac{5}{4} + \tfrac{7}{4}\right)\left(x - \tfrac{5}{4} - \tfrac{7}{4}\right)\right] = 0 \qquad | \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2\left(x + \tfrac{1}{2}\right)(x-3) = 0$$
$$S = \left\{-\tfrac{1}{2}\,;3\right\}$$

Appliquer cette même démarche aux 2 équations :

a) $2x^2 + 3x - 35 = 0$ **b)** $3x^2 - 13x - 10 = 0$

Exercice 2.15: Résoudre en complétant le carré :

a) $x^2 + 6x + 7 = 0$ **b)** $4x^2 - 12x - 11 = 0$

c) Et si vous appliquiez cette même démarche à l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Théorème: **Formule de résolution de l'équation du 2e degré**
Si $a \neq 0$, les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont données par

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Preuve:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{\qquad}{\qquad}x + \frac{\qquad}{\qquad}\right) = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{\qquad}{\qquad} - \frac{\qquad}{\qquad} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$a\left(\left(x + \frac{\qquad}{\qquad}\right)^2 - \frac{\qquad}{\qquad} + \frac{\qquad}{\qquad}\right) = 0$$

$$a\left(\left(x + \frac{\qquad}{\qquad}\right)^2 - \left(\frac{\qquad}{\qquad} - \frac{\qquad}{\qquad}\right)\right) = 0$$

$$a\left(\left(x + \frac{\qquad}{\qquad}\right)^2 - \left(\frac{\qquad - \qquad}{\qquad\qquad}\right)\right) = 0$$

$$a\left(\left(x + \frac{\qquad}{\qquad}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\qquad\qquad}}{\qquad\qquad}\right)^2\right) = 0$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\qquad\qquad}}{\qquad\qquad}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\qquad\qquad}}{\qquad\qquad}\right)\right] = 0$$

$$a\left(x + \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\right)\left(x + \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}\right) = 0$$

$$\text{Ainsi } S = \left\{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,;\,\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$$

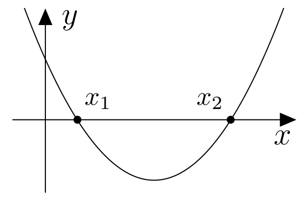
Constatations:

- Le nombre $b^2 - 4ac$ sous la racine est appelé le **discriminant** de l'équation du deuxième degré. Il est souvent codé à l'aide de la lettre grecque Δ (delta).

- Le discriminant peut être utilisé pour déterminer la nature des solutions de l'équation :

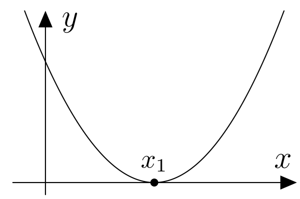
Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$



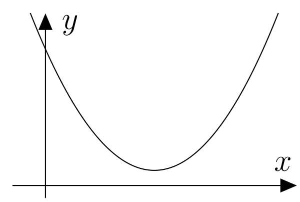
Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution :

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$



Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution réelle :

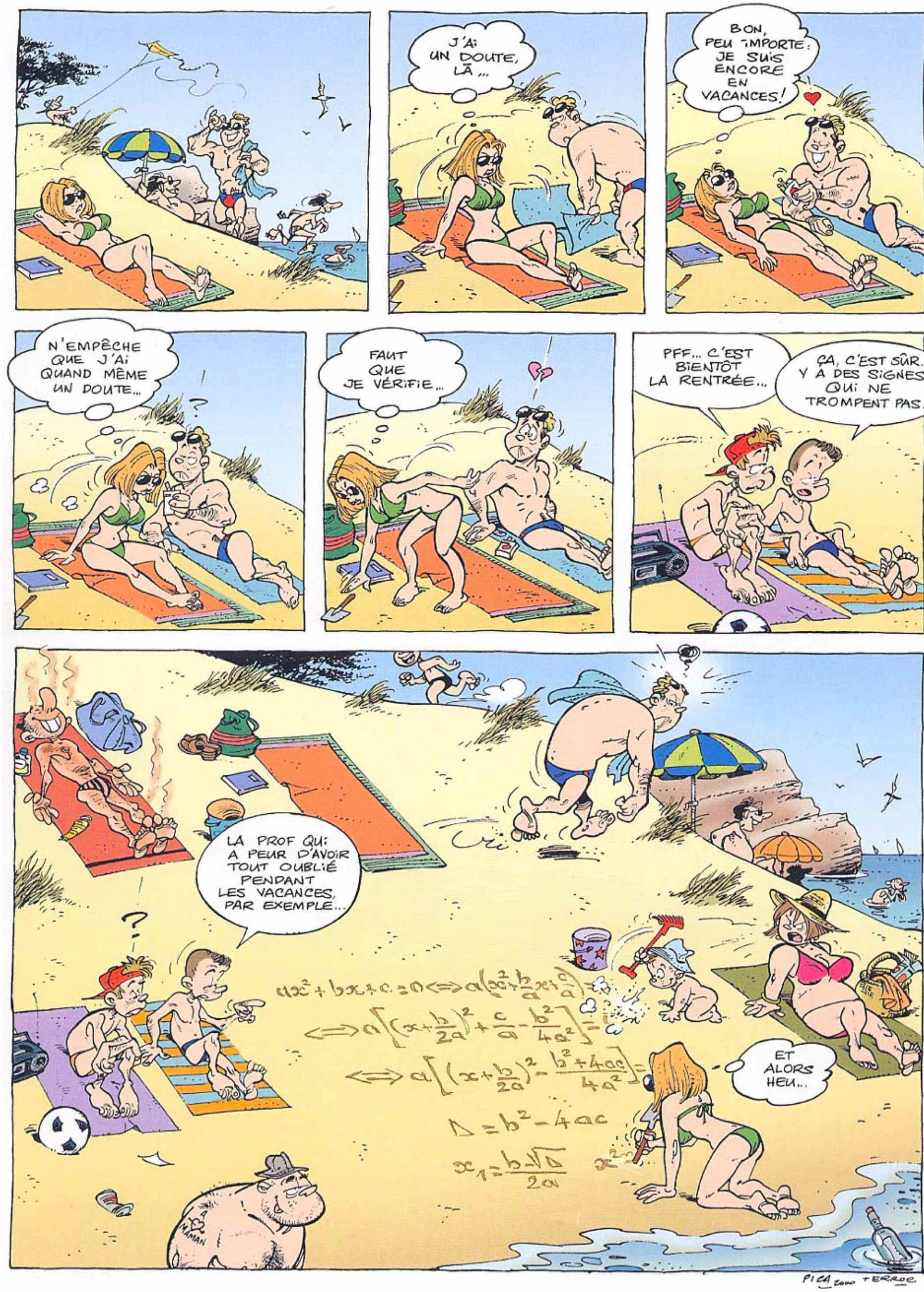
$$S = \varnothing$$



Exemple 13: Résoudre à l'aide de la formule :

a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ **b)** $x^2 - 9x + \dfrac{81}{4} = 0$ **c)** $\dfrac{1}{2}x^2 - 5x + \dfrac{5}{2} = 0$

Exercice 2.16: Chercher l'erreur ;-)



Les profs : Album n° 2 : Loto et colles

Exercice 2.17: Résoudre les équations suivantes à l'aide de la formule :

a) $x^2 + 5x + 2 = 0$

b) $x^2 + 4x + 2 = 0$

c) $2x^2 - 4x - 4 = 0$

d) $3t^2 + 5t + 12 = 0$

e) $\dfrac{3}{2}x^2 - 4x - 1 = 0$

f) $\dfrac{5}{4}s^2 + 3s + 1 = 0$

2.2.5 Factorisation à l'aide de la formule

Dans les paragraphes précédents, nous avons utilisé la factorisation pour résoudre des équations. En cas de difficultés, nous avons pu les résoudre grâce à la formule. Et si cette formule nous fournissait une ***nouvelle méthode de factorisation*** *...*

Exemple 14: On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 6$

- Factoriser f.

- Résoudre, à l'aide de la formule l'équation $f(x) = 0$, puis en déduire une factorisation de f.

Exemple 15: On considère la fonction f définie par $f(x) = 6x^2 - 7x - 3$

- Factoriser f.

- Résoudre, à l'aide de la formule l'équation $f(x) = 0$, puis en déduire une factorisation de f.

Théorème: Soit la fct quadratique f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors :

- Si $\Delta > 0$, f possède deux zéros x_1 et x_2, ainsi

$$f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$$

- Si $\Delta = 0$, f possède un seul zéro x_1, ainsi

$$f(x) = a \cdot (x - x_1)^2$$

- Si $\Delta < 0$, f ne possède aucun zéro et ne peut être factorisé.

Exemple 16: L'équation $-2x^2 + 9x - 4 = 0$ possède deux solutions $x_1 = 4$ et $x_2 = \frac{1}{2}$. La fonction f définie par $f(x) = -2x^2 + 9x - 4$ peut donc se factoriser sous la forme :

$f(x) =$

Exercice 2.18: À l'aide de la formule, factoriser les fonctions définies par :

a) $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ **b)** $g(x) = 3x^2 - 5x + 2$
c) $h(x) = 4x^2 - 20x + 25$ **d)** $k(x) = x^2 - 4x - 1$

En résumé: Nous avons ainsi 5 méthodes de factorisation pour les fonctions du 2e degré. Il s'agit **dans l'ordre** :

1) La mise en évidence
2) Les produits remarquables
3) La méthode Somme-Produit
4) Le tâtonnement
5) À l'aide de la formule

Exercice 2.19: En appliquant la démarche la plus adéquate, factoriser :

a) $f(x) = x^2 - 16x + 63$ **b)** $f(x) = x^2 - 12$
c) $f(x) = x^2 - 4x$ **d)** $f(x) = x^2 - 6x + 7$
e) $f(x) = 2x^2 + x - 15$ **f)** $f(x) = 2x^2 + 198x - 200$
g) $f(x) = 9x^2 - 9x + 2$ **h)** $f(x) = 2x^2 + 6x + 3$
i) $f(x) = 3x^2 - 27x$ **j)** $f(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{4}$

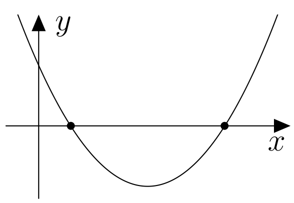
Exemple 17: À l'aide d'une factorisation, esquisser la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

Exercice 2.20: À l'aide d'une factorisation, esquisser les fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 - 2x - 15$ **b)** $f(x) = 18 - 2x^2$
c) $f(x) = -4x^2 + 8x + 5$ **d)** $f(x) = x^2 - 3x - 1$

2.3 Inéquations du 2e degré



Pour résoudre l'inéquation $ax^2 + bx + c > 0$ (par exemple), il s'agira de poser $f(x) = ax^2 + bx + c$, de déterminer ses zéros (résoudre $ax^2 + bx + c = 0$) puis d'esquisser le graphe de la fonction f.

On pourra ainsi déterminer l'ensemble des valeurs x vérifiant l'inéquation $f(x) > 0$. Cet ensemble de solutions se codera sous la forme d'intervalle ou union d'intervalles.

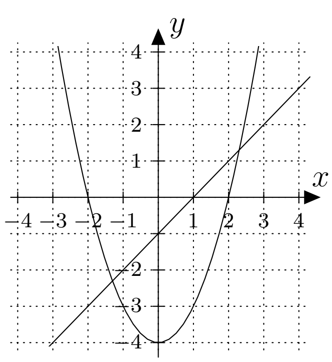
Exemple 18: Résoudre l'inéquation $-x^2 - 4x + 5 > 0$

Exemple 19: Résoudre les inéquations $x^2 + 2x + 2 \leqslant 0$ puis $x^2 + 2x + 2 > 0$

Exercice 2.21: Résoudre les inéquations suivantes

a) $x^2 - 9x \leqslant 0$ **b)** $-2x^2 + 7x + 15 < 0$
c) $x^2 + 4 \geqslant 0$ **d)** $x^2 + 4x < 1$

Exemple 20: On considère les fonctions f et g définies par :



$$f(x) = x^2 - 4 \quad \text{et} \quad g(x) = x - 1$$

À l'aide de l'esquisse, résoudre l'inéquation : $f(x) > g(x)$.

Exercice 2.22: Représenter (ou esquisser si vous jugez qu'une esquisse est suffisante) le graphe des fonctions f et g pour $x \in \left[-3\,;4\right]$

$$f(x) = x^2 - x - 6 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -x^2 + 2x - 2$$

Résoudre ensuite les équations et inéquations suivantes :

a) $f(x) = 0$ **b)** $g(x) = 0$ **c)** $f(x) = g(x)$
d) $f(x) > 0$ **e)** $g(x) \leqslant 0$ **f)** $g(x) \geqslant f(x)$

Exercice 2.23: On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = -x^2 + 13x - 48 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 11x + 24$$

Déterminer le point d'intersection des graphes de f et de g, puis représenter graphiquement f et g dans un même système d'axes.

Exercice 2.24: Pour quelles valeurs de k l'équation $x^2 + kx - x + 4 = 0$ ne possède-t-elle aucune solution ?

Exercice 2.25: Pour quelles valeurs de m l'équation $2x^2 + mx + 2 = 0$ possède-t-elle exactement une solution.

Exercice 2.26: Déterminer les points d'intersection des graphes de f et de g.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ et $g(x) = -4x + 10$
b) $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = 2x^2 - 6$

Exercice 2.27: On considère les fonctions f et g définies par :

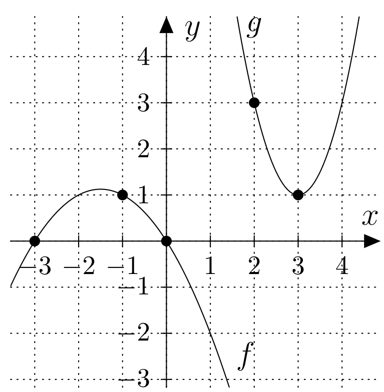
$$f(x) = (x-3)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = 2x - 7$$

Vérifier que la parabole, représentation graphique de f, est tangente au graphe de la fonction g.

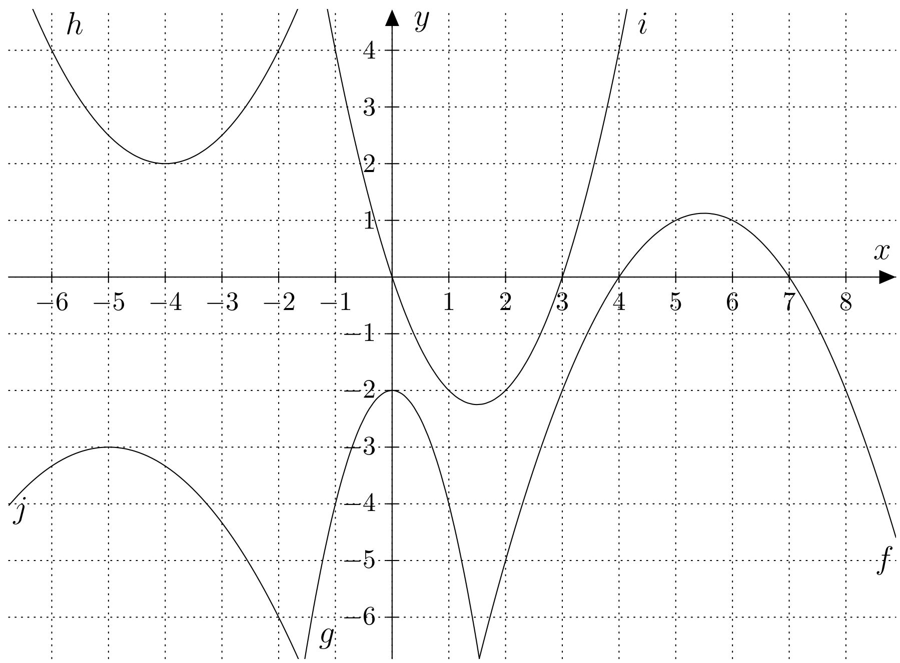
Déterminer les coordonnées du point de contact.

Exercice 2.28: Pour quelles valeurs de a le graphe de la fonction f, définie par $f(x) = x^2 + ax + 5$, est tangent à la droite $y = -4$?
Donner alors les coordonnées du (des) point(s) de contact.

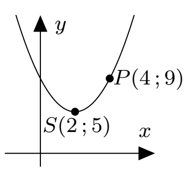
Exemple 21: On considère le graphique ci-contre. Déterminer l'expression fonctionnelle de f et de g



Exercice 2.29: Trouver l'expression fonctionnelle des 5 fonctions dont les graphes sont les paraboles ci-dessous.



Exercice 2.30: Déterminer la pente d'une fonction linéaire dont la représentation graphique est tangente à la parabole passant par le point $P(4\,;9)$ et de sommet $S\,(2\,;5)$



2.4 Équations du 2e degré "maquillées"

2.4.1 Équations bicarrées

Exemple 22: Résoudre l'équation suivante : $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

Exemple 23: Résoudre l'équation suivante : $2x^4 - 5x^2 - 12 = 0$

Exercice 2.31: Résoudre les équations suivantes.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ **b)** $x^4 = 1$

c) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ **d)** $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$

Exercice 2.32: Résoudre les équations suivantes.

a) $(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) + 1 = 0$

b) $(x^2 - 2)^2 - 5(x^2 - 2) - 14 = 0$

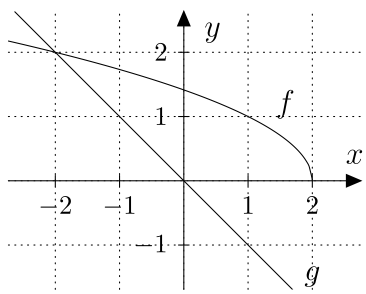
2.4.2 Équations avec des racines carrées

Pour résoudre une équation où l'inconnue se trouve sous une racine carrée, on *isole* une racine avant *d'élever au carré* les deux membres de l'équation. On fait ainsi disparaitre cette racine carrée.

Attention : le fait d'élever au carré les deux membres d'une équation peut introduire des solutions "parasites" qui ne satisfont pas l'équation initiale. Il est donc indispensable de tester les solutions trouvées dans l'équation de départ.

Exemple 24: **a)** Résoudre l'équation $\sqrt{2-x} = -x$

b) Quel lien faites-vous avec cette équation et le graphe ci-contre ?



Exemple 25: Résoudre l'équation $\sqrt{x+5} + x - 1 = 0$

Exercice 2.33: Résoudre les équations suivantes :

a) $\sqrt{7-x} = x - 5$

b) $x = 4 + \sqrt{4x-19}$

c) $\sqrt{x+1} - x = x + 2$

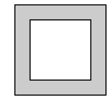
d) $4 + \sqrt{2x-3} = 2$

e) $\sqrt{11+8x} + 1 = \sqrt{9+4x}$

f) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} = 2$

2.5 Quelques applications

Exercice 2.34: Le grand carré est de côté 1 m. Trouver la largeur (constante) de la bande, sachant qu'elle a la même aire que le carré intérieur.

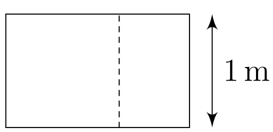


Exercice 2.35: Un terrain rectangulaire de 26 m sur 30 m est entouré d'un trottoir de largeur constante. Si l'aire du trottoir est de 240 m^2, quelle est sa largeur ?

Exercice 2.36: Un sol est recouvert de 500 dalles carrées. Si l'on avait utilisé des dalles 5 cm plus longues et 5 cm plus larges, il en aurait fallu 320 pour recouvrir le sol. Quelles sont les dimensions des premières dalles ?

Exercice 2.37: Lorsqu'on lâche une pierre du haut d'une falaise, elle parcourt approximativement $4{,}9t^2$ mètres en t secondes. On entend l'impact 4 secondes plus tard. Sachant que la vitesse du son est d'environ 330 m/s, estimer la hauteur de la falaise.

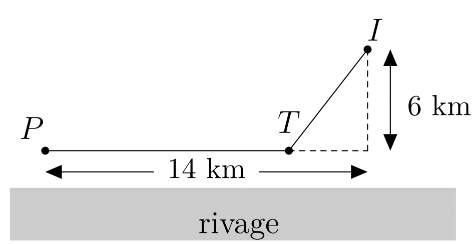
Exercice 2.38: On dit qu'un rectangle est un *rectangle d'or* si, lorsqu'il est coupé en un carré et un rectangle, le rectangle obtenu est semblable au premier (préservation du rapport des côtés).



a) Déterminer la longueur d'un rectangle d'or dont la largeur mesure 1 mètre.

b) Comment appelle-t-on ce nombre bien célèbre ?

Exercice 2.39: Un bateau relie en 45 minutes un port P et une île I située comme le montre la figure ci-dessous. Le bateau longe le rivage jusqu'à un certain point T, puis se dirige en ligne droite vers l'île. Si le bateau parcourt 24 km par heure le long du rivage et 20 km par heure lorsqu'il est en pleine mer, déterminer la longueur du trajet.



3

Fonctions polynomiales

3.1 Définitions

Définition: La fonction f définie par :

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 \qquad (c_n \neq 0)$$

est une **fonction polynomiale** de degré n.

Les nombres $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1$ et c_0 sont les **coefficients** de f.

Exercice 3.1: On considère les fonctions polynomiales p et q définies par :

$$p(x) = x^2 + x + 2 \qquad q(x) = x^3 - 2x^2 - x$$

Dans chaque cas, déterminer la fonction demandée ainsi que c_2.

a) $p+q$ **b)** $p-q$ **c)** $p \cdot q$

Exercice 3.2: On considère les fonctions polynomiales p et q définies par :

$$p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1 \qquad q(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 2$$

a) Déterminer c_3 de $p+q$
b) Déterminer c_4 de $p \cdot q$

Notation: L'écriture d'une fonction polynomiale du n^{e} degré :

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 \qquad (c_n \neq 0)$$

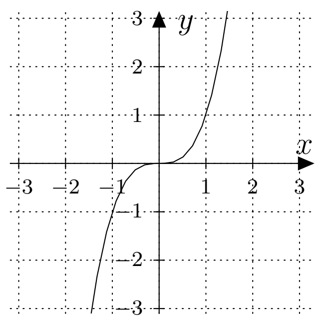
peut être condensée en utilisant le signe somme (Σ) :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i$$

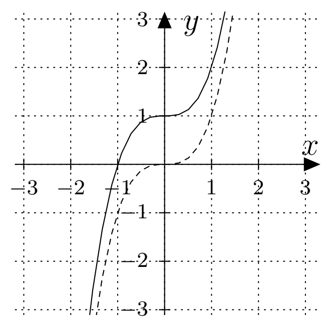
3.2 Fonctions du 3e degré

La fonction f définie par : $f(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0 \qquad (c_3 \neq 0)$
est une fonction polynomiale du 3e degré.

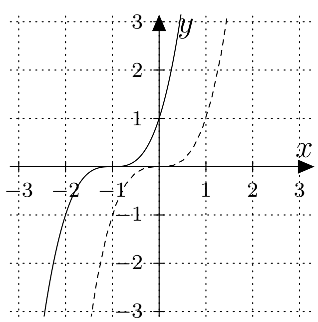
Exemple 1: Graphes de fonctions du 3e degré



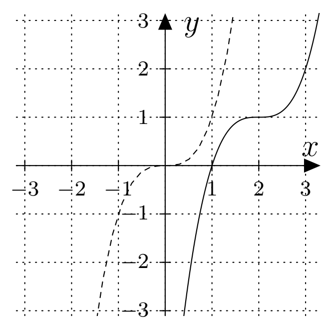
$f(x) = x^3$



$f(x) = x^3 + 1$

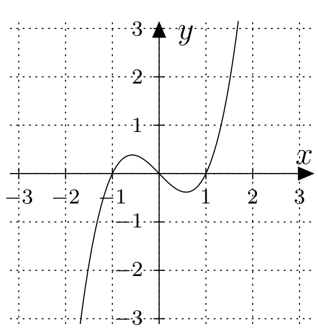


$$f(x) = (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

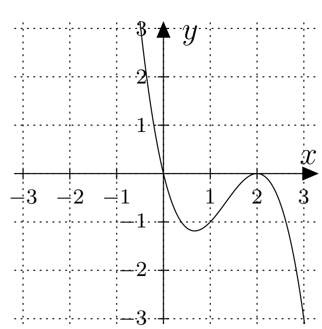


$f(x) = (x \ldots\ldots)^3 + \ldots$
$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple 2: Graphes de fonctions du 3e degré (suite)



$f(x) = x^3 - x$



$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$

Constatations: On constate (sur les exemples précédents) que le graphe d'une. fonction du 3^e degré coupe toujours l'axe Ox, c'est-à-dire qu'elle admet entre 1 et 3 zéros.
La recherche de ces zéros s'effectuera en résolvant une équation du 3^e degré

3.3 Équations du 3^e degré et plus ...

À l'image des équations du 2^e degré, il existe également une formule générale pour résoudre les équations du 3^e degré :

Jérôme Cardan
(1501 - 1576)

La formule de Cardan

L'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ admet une solution en :

$$x_1 = \sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right) + \sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$

$$+ \sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right) - \sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} - \frac{b}{3a}$$

On comprend facilement pourquoi cette formule n'est pas "très pratique"...

Et si vous utilisiez cette formule, à l'image de ce que propose Rafael Bombelli dans son ouvrage *L'Algebra*, pour résoudre l'équation :

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

Que constatez-vous ?

Rafael Bombelli
(1526 - 1572)

On peut montrer que toute équation du 4^e degré peut se ramener à la résolution d'une équation du 3^e degré.

Évariste Galois, en 1830, a même démontré qu'il n'existait pas de formule générale de résolution des équations de degré supérieur ou égal à 5.

Dans ce chapitre, nous contenterons de résoudre ce type d'équations par *factorisation* et par *division de polynômes.*

Évariste Galois
(1811 - 1832)

3.3.1 Résolution par factorisation

Exemple 3: Résoudre l'équation $x^3 + x^2 - 2x = 0$

Exemple 4: Résoudre l'équation $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$

Cette dernière méthode de factorisation s'appelle **la méthode des groupements**. Elle peut être utilisée lorsque l'expression à factoriser contient **4 termes**.

Exercice 3.3: Résoudre les équations suivantes par factorisation

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ **b)** $2x^3 - 8x^2 + 8x = 0$
c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ **d)** $4x^3 - 12x^2 + 9x = 0$

Exercice 3.4: Décomposer le polynôme $p(x) = 3x^5 - 15x^3 + 12x$ en produit de facteurs irréductibles. Autrement dit, factoriser $p(x)$.

Exercice 3.5: Résoudre les équations suivantes :

a) $3x^4 - 13x^3 - 10x^2 = 0$ **b)** $(x^5 - 9x^4)(x - 1)(x^2 - 1) = 0$
c) $2x^4 - 8x^3 + 4x^2 = 0$ **d)** $(x^2 + 4)(x^2 + 9) = 0$

3.3.2 Résolution par produits remarquables

Dans le chapitre précédent, nous avons utilisé trois produits remarquables afin de factoriser des expressions du 2$^{\text{e}}$ degré. Ajoutons à cette liste 4 nouvelles identités :

$$\boxed{\begin{aligned} A^3 + B^3 &= (A+B)(A^2 - AB + B^2) \\ A^3 - B^3 &= (A-B)(A^2 + AB + B^2) \\ A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 &= (A+B)^3 \\ A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 &= (A-B)^3 \end{aligned}}$$

Exemple 5: Calculer :

a) $(2x+3)^3$ **b)** $(5-x^2)^3$

Exercice 3.6: Calculer :

a) $(7+3x)^3$ **b)** $(2x-3y)^3$ **c)** $(x-2)(x^2+2x+4)$

Exemple 6: Après avoir *reconnu* le produit remarquable, factoriser :

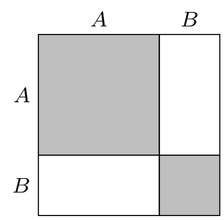
a) $27x^3+8$ **b)** $x^3-6x^2+12x-8$

Exercice 3.7: Après avoir *reconnu* le produit remarquable, factoriser

a) $x^3 - 15x^2 + 75x - 125$ **b)** $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$
c) $125x^3 - 1$ **d)** $64x^3 + 27$
e) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ **f)** $x^3 - 6x^2 + 24x - 8$

Exercice 3.8: Que suggèrent ces différentes figures ?

a)



b)

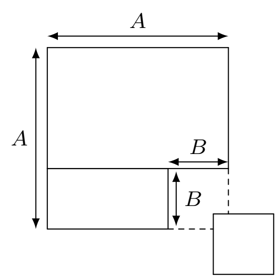


Figure 1

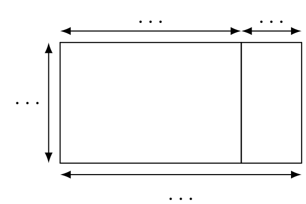
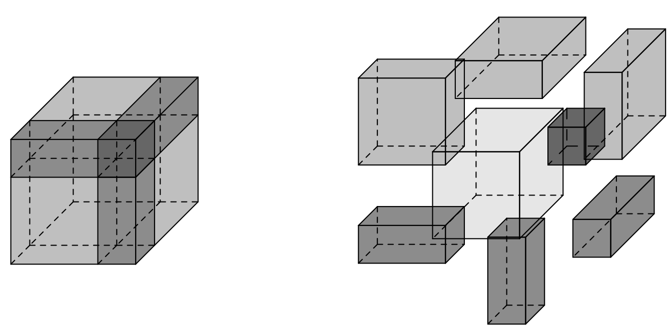


Figure 2

Aire de la Figure 1 = ...

Aire de la Figure 2 = ...

c)



3.3.3 Résolution par division de polynômes

Avant de pouvoir utiliser cette méthode de résolution, il faut définir un nouvel outil mathématique : **La division de polynôme**.

Division euclidienne de polynômes

Division de nombres : $F \div G$

$$\begin{array}{r|l} 1732 & 5 \\ \hline \end{array}$$

(1) Le résultat d'une division peut s'écrire sous 2 formes :

- Le **Quotient** est de .... et
  le **Reste** est de ....
- $F = \text{Quotient} \cdot G + \text{Reste}$

$$\begin{array}{r|l} F & G \\ \cline{2-2} \dots\dots\dots & \textit{Quotient} \\ \textit{Reste} & \end{array}$$

Égalité fondamentale :

Division de polynôme : $F(x) \div G(x)$

$$\begin{array}{r|l} 14x^3 - 29x^2 \qquad\qquad - 5 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \hline \end{array}$$

(1) Le résultat d'une division peut s'écrire sous 2 formes :

- Le **Quotient** est de .... et
  le **Reste** est de ....
- $F(x) = \text{Quotient} \cdot G(x) + \text{Reste}$

$$\begin{array}{r|l} F(x) & G(x) \\ \cline{2-2} \dots\dots\dots & \textit{Quotient} \\ \textit{Reste} & \end{array}$$

Égalité fondamentale :

(2) Les polynômes $F(x)$ et $G(x)$ doivent être ordonnés selon les puissances décroissantes de x

Exercice 3.9: Effectuer la division euclidienne de F par G et écrire l'égalité fondamentale.

a)	$F(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 5$	$G(x) = x - 5$
b)	$F(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 1$	$G(x) = x^2 + 2x - 1$
c)	$F(t) = 5t^4 + 3t^3 - 1$	$G(t) = t^2 - 1$
d)	$F(x) = 6x^5 + 5x^4 - 25x^3 + 31x^2 - 12x + 5$	$G(x) = 2x^2 - 3x + 2$
e)	$F(x) = 3x^4 - 7x^3 - 18x^2 + 28x + 24$	$G(x) = 3x^2 + 8x + 4$
f)	$F(x) = x^3 + x^2 + 5$	$G(x) = 2x - 3$
g)	$F(x) = -2x^3 - 3x + 1$	$G(x) = 3x^3 + x^2 - 1$

Exercice 3.10: Déterminer un polynôme $F(x)$ tel que le quotient de la division de $F(x)$ par $2x^2 + 1$ soit égal à $5x^2 - 3x + 1$ et le reste égal à $-x + 1$.

Définition: Un polynôme F est dit **divisible** par un polynôme G si le reste de la division de F par G vaut zéro.

Exercice 3.11: Montrer que le polynôme $F(x) = x^5 - 1$ est divisible par $G(x) = x - 1$

Exercice 3.12:

- On considère le polynôme $F(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
  - **a)** En effectuant la division, montrer que le reste de la division de $F(x)$ par $G(x) = x + 1$ vaut -3.
  - **b)** Calculer $F(-1)$. Que constatez-vous ?
- Qu'en est-il si $F(x) = x^2 - 1$ et $G(x) = x - 2$?

Théorème: **Le truc du reste**
Le reste de la division d'un polynôme $F(x)$ par $x - a$ vaut $F(a)$.
Preuve : en exercice

Théorème:

$$\text{Le nombre } x = a \text{ est une solution de l'équation } F(x) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$F(x) \text{ est divisible par } x - a$$

Exemple 7: Montrer que le polynôme $x^5 - 1$ est divisible par $x - 1$

Exercice 3.13: Montrer que $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$ est divisible par $x - 1$.

Exercice 3.14: Démontrer le théorème ci-dessus : **Le truc du reste**

Exercice 3.15: Calculer le reste de la division de $3x^{100} + 5x^{85} - 4x^{38} + 2x^{17} - 6$ par $x + 1$.

Exercice 3.16: Déterminer le paramètre m pour que $x^4 - mx^3 + 2x^2 + 3mx - m^2$ soit divisible par $x - 2$. Calculer ensuite le quotient.

Exercice 3.17: Déterminer m et n pour que $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + mx + n$ soit divisible par $x^2 - 5x + 6$.

Exercice 3.18:

a) Déterminer un polynôme non nul qui s'annule en $x = -1$, $x = 1$, $x = 4$ et en $x = 0$. *(à proposer sous sa forme développée)*

b) Existe-t-il d'autres polynômes satisfaisant aux mêmes conditions ?

Exercice 3.19: Déterminer un polynôme $F(x)$ du quatrième degré vérifiant les cinq conditions suivantes :

- il admet $x = -2$ pour zéro ;
- il est divisible par $x + 1$;
- il admet le facteur x dans sa factorisation ;
- $F(2) = 0$;
- il admet -18 pour reste de sa division par $x - 1$.

Exercice 3.20: Déterminer un polynôme $F(x)$ du troisième degré vérifiant les quatre conditions suivantes :

- $F(0) = 0$;
- $F(1) = 0$;
- il est divisible par $x + 2$;
- le reste de sa division par $x - 3$ vaut -6.

Exemple 8: Factoriser le polynôme $F(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$

Théorème: Les suspects
Soit $F(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ un polynôme à coefficients entiers.
Si a est un zéro entier de $F(x)$, alors a est un diviseur de $\pm c_0$.

Exercice 3.21: Factoriser les polynômes suivants :

a) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$ **b)** $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
c) $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ **d)** $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$

Exemple 9: Sans effectuer de division, factoriser le polynôme :

$$x^3 + 4x^2 + x - 6$$

Exercice 3.22: Factoriser les polynômes suivants :

a) $x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ **b)** $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$

Exemple 10: Résoudre l'équation $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$

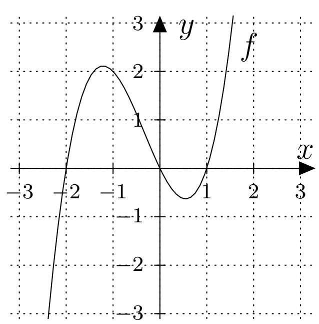
Exercice 3.23: Résoudre les équations :

a) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$ **b)** $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$
c) $x^3 + 5x^2 - 8x - 48 = 0$ **d)** $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$
e) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$ **f)** $35x^3 + 47x^2 + 13x + 1 = 0$

3.4 Tableau de signes et inéquations

Le but de ce paragraphe est de vous présenter un nouvel outil mathématique : le **tableau de signes**. Il nous permettra d'*esquisser* rapidement des fonctions polynomiales ainsi que de *résoudre des inéquations*.
Le tableau de signes d'une fonction présente les intervalles pour lesquels cette fonction admet des valeurs positives et ceux pour lesquels elle admet des valeurs négatives.

Exemple 11: Donner le tableau de signes de la fonction f représentée ci-contre.

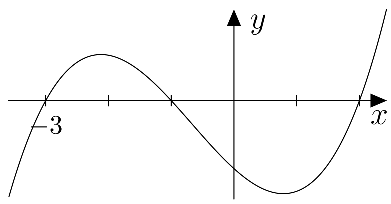


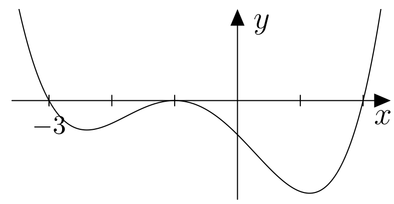
Exemple 12: On considère la fonction f définie par $f(x) = (x - 2)(x^2 + 4x + 3)$. Donner son tableau de signes puis en déduire une esquisse de f.

Exercice 3.24: Établir le tableau de signes des fonctions f suivantes puis en esquisser le graphe :

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ **b)** $f(x) = x^3 - 2x^2 - 15x$
c) $f(x) = (x^2 - 4)(9 - x^2)(x^2 - x)$ **d)** $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)$
e) $f(x) = (x^3 - x^2 + x)(2 - x)$ **f)** $f(x) = -x^3 + 4x$
g) $f(x) = 8x^3 - 4x^2 - 2x + 1$ **h)** $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Exercice 3.25: On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, ainsi que les 2 esquisses suivantes :



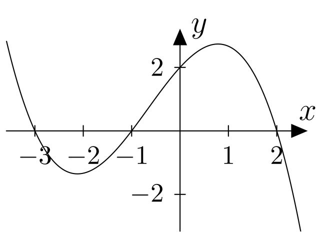


Laquelle représente bien le graphe de f ?

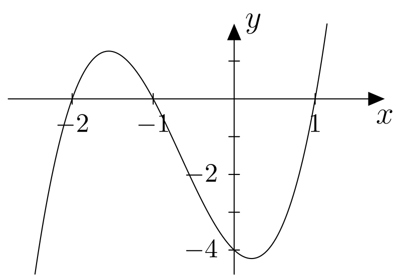
Exercice 3.26: Établir le tableau de signes puis esquisser le graphe de f définie par

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

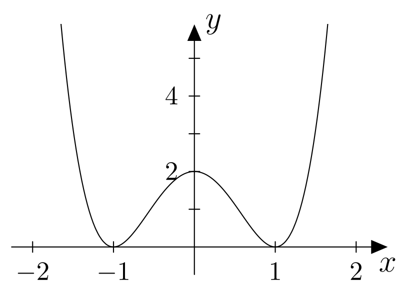
Exemple 13: Trouver une fonction dont le graphe est donné ci-contre



Exercice 3.27: Trouver les fonctions dont le graphe est proposé ci-dessous :



a)



b)

Exemple 14: Résoudre l'inéquation suivante :

$$x^3 + 3x^2 > 2x + 6$$

Exercice 3.28: Résoudre les inéquations suivantes

a) $x^5 - 5x^3 + 4x \leqslant 0$ **b)** $x^3 - x^2 \geqslant x - 1$

c) $(x-2)\left(x^2+6x-1\right) > \left(x^2-4\right)\left(x^2+1\right)$

Exemple 15: Former une équation du 4$^{\text{e}}$ degré admettant l'ensemble de solutions

$$S = \left\{\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}\,;\frac{2}{3}\right\}$$

Exercice 3.29: Former des équations polynomiales de degré n à coefficients entiers dont S est l'ensemble des solutions *(forme factorisée et développée)*.

a) $n = 2$ $\qquad S = \left\{\frac{1}{3}\,;3\right\}$

b) $n = 3$ $\qquad S = \left\{\frac{1}{3}\,;3\right\}$

c) $n = 4$ $\qquad S = \left\{\frac{1}{3}\,;3\right\}$

d) $n = 2$ $\qquad S = \left\{3-\sqrt{2}\,;3+\sqrt{2}\right\}$

e) $n = 3$ $\qquad S = \left\{0\,;2-\sqrt{3}\,;2+\sqrt{3}\right\}$

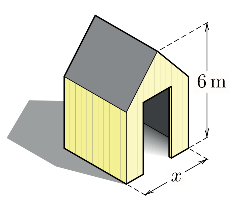
f) $n = 4$ $\qquad S = \left\{-1\,;-\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\,;1\right\}$

g) $n = 4$ $\qquad S = \varnothing$

h) $n = 6$ $\qquad S = \left\{-\sqrt{3}\,;-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\right\}$

Exercice 3.30: On veut construire une boîte sans couvercle à partir d'une feuille de carton rectangulaire de 20 cm sur 30 cm en découpant de chaque coin un carré d'aire x^2, et en relevant les côtés.
Montrer qu'il y a deux façons de construire une telle boîte d'un volume de 1000 cm^3.

Exercice 3.31: On veut construire un hangar cubique surmonté d'un toit en forme de prisme triangulaire (cf. figure ci-contre). Il faut encore déterminer la longueur x du côté du cube.



a) Si la hauteur totale de la construction est de 6 m, montrer que le volume V est donné par la fonction :

$$V(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2(6-x).$$

b) Déterminer x pour que le volume soit de 80 m^3.

Exercice 3.32: Un météorologue a déterminé que la température T (en $°F$) pour une certaine période de 24 heures en hiver est donnée par la formule :

$$T(t) = \frac{1}{20}t(t-12)(t-24) \text{ pour } 0 \leqslant t \leqslant 24,$$

où t est le temps écoulé en heures depuis 6 heures du matin.

a) Quand a-t-on $T(t) > 0$?

b) Représenter le graphe de la fonction T.

c) À quelle heure la température a-t-elle été de $32°F$ $(= 0°C)$

Exercice 3.33: Un troupeau de cent cerfs est introduit sur une petite île. Tout d'abord, le troupeau grandit rapidement, mais par la suite les ressources en nourriture baissent et la population diminue. Supposons que le nombre $N(t)$ de cerfs après t années est donné par la fonction :

$$N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$$

a) Quand a-t-on $N(t) > 0$?

b) Déterminer quand la population de cerfs va s'éteindre.

c) Déterminer quand le troupeau de cerfs aura plus de 180 têtes.

4 Fonctions rationnelles

4.1 Définitions

Définition:

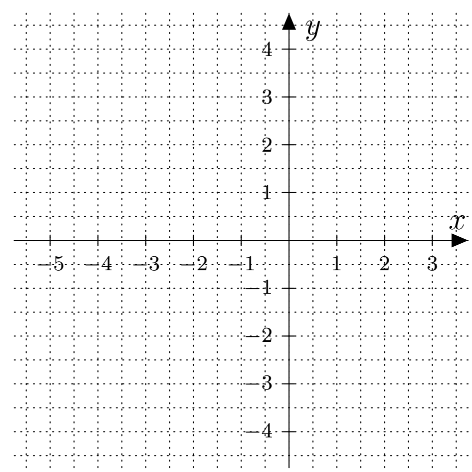
- La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes est appelée **fonction rationnelle**.

- L'**ensemble de définition** $\mathrm{E_D}(f)$ (ou simplement $\mathrm{E_D}$) d'une fonction rationnelle f comprend toutes les valeurs réelles de x sauf celles qui annulent le dénominateur $q(x)$.

Exemple 1: On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+2}$.

a) Compléter le tableau de valeurs puis tracer le graphe de f.

x	$f(x)$
-5	0,75
-4	0,83
-3	
-2	1,5
$-1{,}5$	
-1	
$-0{,}5$	$-1{,}5$
0	
1	
2	0,17
3	



b) Que se passe-t-il en $x = -1$?

c) Calculer $f(-0{,}999)$ et $f(-1{,}001)$

d) Proposer le tableau de signes de f.

Exercice 4.1: On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3-x}{x+2}$

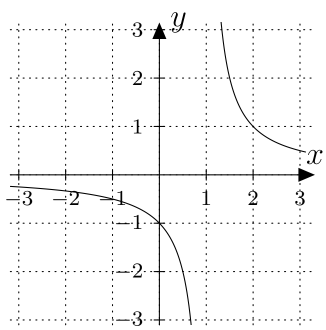
a) Déterminer son ensemble de définition.

b) Proposer un tableau de valeurs pour $x \in \left[-4\,;5\right]$.

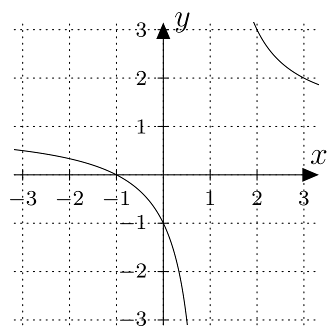
c) Esquisser le graphe de f.

d) En déduire le tableau de signes de f.

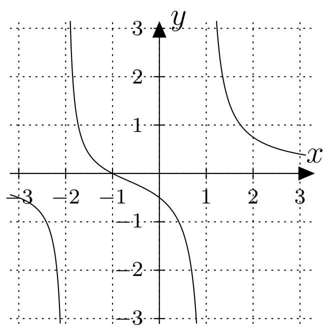
Exemple 2: Quelques exemples de graphes de fonctions rationnelles



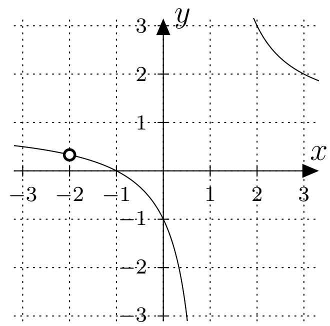
$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$



$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$



$f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x-2}$



$f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}$

Dans la suite de ce chapitre, nous nous concentrerons plutôt dans le calcul purement algébrique sur les ***fractions rationnelles*** *et nous garderons l'étude de ces fonctions pour la 2e année.*

4.2 Les fractions rationnelles

4.2.1 Simplification de fractions

Lorsque l'on désire *simplifier* une fraction rationnelle, on **divise** le numérateur et le dénominateur par une même expression **qui a été mise en évidence** à l'aide d'**une factorisation**.

Exemple 3: Préciser l'ensemble de définition des fractions suivantes, puis les simplifier :

- $\dfrac{12-6x}{x^2-4}$

- $\dfrac{x^3+3x^2-4x-12}{2x^2+5x-3}$

Exercice 4.2: Préciser l'ensemble de définition des fractions suivantes, puis les simplifier :

a) $\dfrac{10x^2+11x-6}{5x-2}$ **b)** $\dfrac{100x+200}{x^4-x^2-12}$ **c)** $\dfrac{x^2+x-2}{x+3}$

d) $\dfrac{-x^3-x-2}{2x+2}$ **e)** $\dfrac{2-x-3x^2}{6x^2-x-2}$ **f)** $\dfrac{(x^2+8x+16)(5-x)}{(x^2-5x)(x^2-16)}$

4.2.2 Multiplication et division de fractions

Pour *multiplier* deux fractions rationnelles, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. On **n'effectuera pas** à proprement parler ces distributivités, mais on tentera après une factorisation maximum de **simplifier** cette fraction.

Exemple 4: Préciser $\mathrm{E_D}$, puis effectuer l'opération indiquée et simplifier :

- $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-1} \cdot \dfrac{-4x+4}{3-x}$

Pour *diviser* une fraction rationnelle par une autre, on **multiplie** la première par l'**inverse** de la deuxième.

Exemple 5: Préciser $\mathrm{E_D}$, puis effectuer l'opération indiquée et simplifier :

- $\dfrac{x+2}{3-2x} \div \dfrac{x^2-4}{2x^2-3x}$

- $\dfrac{\dfrac{x^2+x-6}{x-1}}{x+3}$

Exercice 4.3: Préciser $\mathrm{E_D}$, puis effectuer l'opération indiquée et simplifier :

a) $\dfrac{x+3}{x^2+3x+2} \cdot \dfrac{x+2}{x^2+7x+12}$

b) $\dfrac{x+3}{x-5} \cdot \dfrac{x^2-3x-10}{x^3+3x^2+x+3}$

c) $\dfrac{5x^2+12x+4}{x^4-16} \div \dfrac{25x^2+20x+4}{x^2-2x}$

d) $\dfrac{\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x^2-1}}$

4.2.3 Addition et soustraction de fractions

On commence toujours par **factoriser** au maximum les **dénominateurs**.

- Si les fractions ont même dénominateur :

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d} \qquad \frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}$$

- Si les dénominateurs des fractions n'ont pas de facteur commun, alors le dénominateur commun s'obtient en les multipliant :

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{ad+bc}{cd} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{d}=\frac{ad-bc}{cd}$$

- Si les dénominateurs des fractions contiennent un ou des facteurs communs, alors le dénominateur commun s'obtient en déterminant le plus petit multiple commun :

$$\frac{a}{cd}+\frac{b}{d}=\frac{a}{cd}+\frac{bc}{cd}=\frac{a+bc}{cd} \qquad \frac{a}{cd}-\frac{b}{d}=\frac{a}{cd}-\frac{bc}{cd}=\frac{a-bc}{cd}$$

À la fin du calcul, on proposera toujours le **code irréductible** de la fraction.

Exemple 6: Préciser $\mathrm{E_D}$, puis effectuer l'opération indiquée et simplifier :

- $\dfrac{x-1}{2x+5}-\dfrac{2-x}{2x+3}$

Exemple 7: Préciser $\mathrm{E_D}$, puis effectuer l'opération indiquée et simplifier :

- $\dfrac{2x-8}{x^2-1}+\dfrac{x+2}{x-1}$

Exercice 4.4: Préciser $\mathrm{E_D}$, puis effectuer l'opération indiquée et simplifier :

a) $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{x-5}$

b) $1-\dfrac{1}{x+1}$

c) $\dfrac{15}{x^2-9}-\dfrac{5}{2x-6}$

d) $\dfrac{x^2+2}{x^2-x-2}+\dfrac{-x+1}{x-2}$

e) $\dfrac{x-1}{x^2-x-2}+\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

f) $\dfrac{x^2+2x-1}{x^3+2x^2-x-2}-\dfrac{x-1}{x^2+3x+2}$

g) $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}+3$

h) $\dfrac{x-2}{x^2+x-2}-\dfrac{2x+3}{x^2-1}+\dfrac{2}{x+2}$

Exercice 4.5: Un petit mélange de tout ... Effectuer et simplifier :

a) $\dfrac{x^4+x^2-2}{x^2+3x+2}\cdot\dfrac{x+1}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}$

c) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{2x+1}{x-x^3}$

d) $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$

e) $\left(\dfrac{x^2+x}{x+3}\cdot\dfrac{x^2+3x}{x-1}\right)\div\dfrac{x^3+x^2}{x-1}$

f) $\left(\dfrac{x+2}{x}-\dfrac{2}{x^2+x}\right)\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$

g) $\dfrac{1-\dfrac{1}{1-x}}{1-\dfrac{1}{1+x}}$

h) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right)\div\left(\dfrac{1}{x^2}-1\right)$

4.3 Équations rationnelles

1°) Préciser l'ensemble de définition $\mathrm{E_D}$. On est donc amené à **factoriser** tous les dénominateurs.

2°) Écrire l'équation initiale sous la forme $\dfrac{p(x)}{q(x)} = 0$.

3°) Une fraction est égale à zéro si et seulement si son numérateur est égal à zéro. Ainsi, il s'agira de résoudre $p(x) = 0$ en factorisant le numérateur.

4°) Les solutions de l'équation initiale sont les solutions de $p(x) = 0$, sauf celles qui correspondent à des valeurs interdites !

Exemple 8: Résoudre les équations suivantes :

- $\dfrac{8}{x} - \dfrac{3}{x^2} = 5$
- $\dfrac{6}{x-3} + \dfrac{5}{x+3} = \dfrac{36}{x^2-9}$

Exercice 4.6: Résoudre les équations suivantes :

a) $\dfrac{(2x+3)(4x-1)}{7x+2} = 0$

b) $\dfrac{12}{x} = 7 + \dfrac{12}{1-x}$

c) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{x+5}$

d) $\dfrac{4}{x^2-3x} = \dfrac{x-1}{x-3} - 1$

e) $\dfrac{3-t}{3t} = \dfrac{1}{2t} - \dfrac{1}{4}$

f) $\dfrac{2-3x}{2x-1} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{7}{3}$

4.4 Inéquations rationnelles

1°) Préciser l'ensemble de définition $\mathrm{E_D}$. On est donc amené à **factoriser** tous les dénominateurs.

2°) Écrire l'inéquation initiale sous la forme $\dfrac{p(x)}{q(x)} \ldots 0$.

3°) Factoriser au maximum le numérateur $p(x)$.

4°) Les solutions de l'inéquation initiale pourront être obtenues en étudiant le signe de $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ dans **un tableau de signes**.

Exemple 9: Résoudre l'inéquation suivante :

- $\dfrac{x^2-5x+6}{x^3+2x^2-x-2} > 0$

Exercice 4.7: Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-x} \geqslant 0$ **b)** $\dfrac{x(2x-3)^2}{x^2-4} < 0$

c) $\dfrac{x-3}{x^2-3x+2} > 0$ **d)** $\dfrac{3x^2-7x-20}{x^2+4x-12} \leqslant 0$

Exemple 10: Résoudre l'inéquation suivante :

- $\dfrac{x+4}{x+1} + \dfrac{2(4x+1)}{x^2-1} \leqslant \dfrac{x+8}{x-1}$

Exercice 4.8: Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{x+1}{x-1} \leqslant \dfrac{x-1}{x+1}$

b) $\dfrac{4x^2+4x+1}{x^2-1} > 3$

c) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} \leqslant \dfrac{1}{x+3}$

d) $\dfrac{2}{x^2} \geqslant 1-x$

e) $\dfrac{13}{2x+1} \geqslant 9 - \dfrac{38}{4-x}$

f) $\dfrac{13}{2-x} \leqslant 7 - \dfrac{4}{3x+1}$

Exercice 4.9: La règle de Young est une formule qui est utilisée pour modifier le dosage d'un médicament pour adultes en un dosage pour enfants. Si la dose pour un adulte est de 100 mg, alors la dose D pour un enfant est donnée par :

$$D(t) = \frac{100t}{t+12} \quad \text{pour} \quad 0 < t < 18,$$

où t est l'âge de l'enfant (en années).

a) Représenter le graphe de la fonction D.

b) On donne à un enfant une dose de 40 mg. Déterminer algébriquement son âge.

c) Pour quelle tranche d'âge, la dose doit-elle être supérieure à 50 mg ?

Exercice 4.10: Dans une grande ville, la densité de population D (en habitants par km^2) d'un quartier, liée à la distance x (en km) qui le sépare du centre de la ville, est donnée par :

$$D(x) = \frac{5000(x+1)}{x^2+2x+37} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant 30.$$

a) À quelles distances du centre aura-t-on une densité de 250 hab/km^2 ?

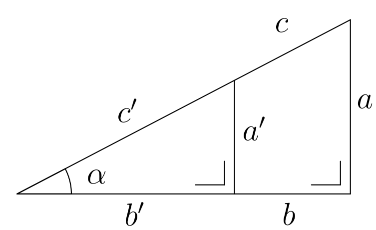
b) Dans quelles zones de ville, la population excède-t-elle 400 hab/km^2 ?

5 Trigonométrie

5.1 Triangle rectangle

Rappel: Dans un triangle rectangle, les rapports de deux côtés ne dépendent que de l'angle α. Considérons les deux triangles semblables (de côtés abc et $a'b'c'$) représentés ci-dessous, on a bien :

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$$
$$\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$



Par conséquent, on peut définir les **rapports trigonométriques** suivants en fonction de l'angle α :

sinus	défini par	$\sin(\alpha) = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$
cosinus	défini par	$\cos(\alpha) = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$
tangente	défini par	$\tan(\alpha) = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

Ces rapports sinus, cosinus, tangente définissent les **fonctions trigonométriques** pour les angles aigus ($\alpha \in \left]0°; 90°\right[$).

5.1.1 Résolutions de triangles

Résoudre un triangle consiste à calculer les éléments non donnés (côtés, angles et aire).

On pourra s'aider de la machine à calculer **après avoir développé les formules permettant de calculer les éléments manquants en fonction des données de départ**.

Observons cette démarche, nouvelle pour vous (??), sur les exemples qui suivent :

Exemple 1: Résoudre le triangle rectangle dont on donne le côté b et l'angle α.
Application numérique : $b = 8{,}2$ et $\alpha = 37°$

Exemple 2: Résoudre le triangle rectangle dont on donne le côté a et l'hypoténuse c.
Application numérique : $a = 7{,}6$ et $c = 18{,}4$

Exercice 5.1: Un triangle ABC est rectangle en C. Résoudre ce triangle connaissant :

a) $c = 4{,}25$ et $\beta = 67{,}20°$
b) $c = 22{,}77$ et $a = 13{,}29$
c) $a = 4{,}85$ et $\alpha = 52{,}37°$
d) $a = 21{,}50$ et $b = 45{,}80$
e) $b = 39{,}50$ et $\mathcal{A} = 987{,}20$
f) $\alpha = 39{,}50°$ et $\mathcal{A} = 10{,}20$

Exercice 5.2: Un triangle ABC est isocèle en A. Résoudre ce triangle connaissant :

a) $\alpha = 42{,}50°$ et $a = 23{,}60$
b) $\beta = 56{,}30°$ et $a = 10{,}30$

Exercice 5.3: L'ombre d'une tour mesure $L = 42$ m lorsque le soleil est élevé de $\alpha = 35{,}5°$ au-dessus de l'horizon. Calculer la hauteur de la tour.

Exercice 5.4: Connaissant l'angle au sommet $\alpha = 36°$ et la base $a = 10$ cm d'un triangle isocèle, calculer les rayons de ses cercles inscrit et circonscrit.

Exercice 5.5: La voûte d'un tunnel routier est un arc de cercle d'angle au centre $\alpha = 220°$. Calculer le rayon de ce cercle pour que la largeur de la route soit de $L = 12$ m. Calculer aussi la hauteur de la voûte maximale au-dessus du sol.

Exercice 5.6: Un homme aperçoit un arbre vertical sous un angle de $\alpha = 41{,}20°$. Il recule d'une distance $d = 25$ m et voit l'arbre sous un angle de $\beta = 22{,}10°$ (on admettra que les yeux de l'observateur et le pied de l'arbre sont au même niveau).

a) Quelle est la hauteur de l'arbre ?

b) À quelle distance du pied de l'arbre l'observateur se trouvait-il au début ?

Exercice 5.7: Déterminer la hauteur d'une tour sachant que son ombre s'allonge de 62 mètres quand l'élévation du soleil au-dessus de l'horizon passe de 52° à 23,5°.

Exercice 5.8: Un observateur, placé à une altitude de 252 m au-dessus de la mer, a trouvé que le rayon visuel aboutissant à l'horizon faisait un angle de 89,49° avec la verticale. On demande de calculer, d'après cette mesure, le rayon terrestre.

5.2 Mesure des angles

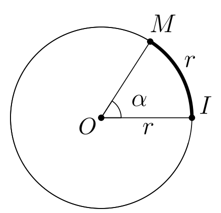
Diviser un cercle en 360 parties, permettant ainsi de définir **le degré**, est une excellente idée qu'a eue un illustre Babylonien anonyme il y a environ 4000 ans. Mais pourquoi 360 ?

Hipparque
(2e siècle avant J-C)

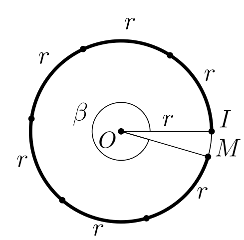
D'abord, 360 admet un grand nombre de diviseurs, et les Babyloniens comptaient en base 60. D'ailleurs ils divisèrent le degré en 60 ***minutes****, et la minute en 60* ***secondes d'arc****. Aussi probablement parce que 1° est un petit angle, mais un angle encore facilement mesurable à l'oeil : le diamètre angulaire de la Lune et du Soleil sont proches de 0,5° (donc 30'). Hipparque de Nicée trouva ces unités tellement pratiques et les publia si bien que le degré, la minute et la seconde sont aujourd'hui toujours les unités d'angle bien utilisées.*

Le **radian** a probablement été découvert le jour où l'illustre inventeur oublié de la roue a mesuré son rayon avec une ficelle et enroulé la ficelle sur le périmètre de son oeuvre. Ce n'est qu'en 1873 qu'un dénommé James Thomson imprima le mot « radian » sur des questions d'examen à ses étudiants. Dans la suite de vos études, vous constaterez que le radian est l'unité de mesure d'angle la plus utilisée. Les raisons vous seront alors explicitées.

Définition: Un **radian** est la mesure d'un angle au centre interceptant un arc de cercle de longueur égale au rayon r de ce cercle.



$\alpha = 1$ radian



$\beta = 6$ radians

Constatations: Le périmètre d'un cercle de rayon r vaut $2\pi \cdot r$. Il s'en suit que la mesure en radians d'un tour complet vaut $2\pi \cong$ (6,28 radians)

5.2.1 Conversion d'angles

Exemple 3:

a) Convertir 17,57° en degrés, minutes et secondes

b) Convertir $39°\,25'\,34''$ en degré décimal

Exemple 4: Compléter le tableau suivant, si possible *sans calculatrice* :

degrés	60°		150°	45°	11°15’	
radians		$3\pi/4$				1,34

En résumé: Tableaux de conversions

d	1°	...
m	60’	...
s	3600”	...

d	180°	...
r	π	...

Exercice 5.9: Convertir en degrés les angles donnés par leur mesure en radians :

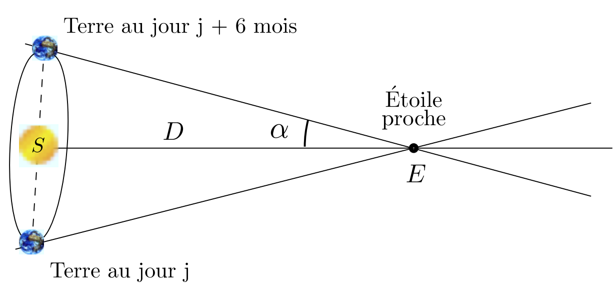
a) $\dfrac{\pi}{6}$ **b)** $\dfrac{2\pi}{3}$ **c)** $\dfrac{\pi}{10}$ **d)** $4\,\pi$ **e)** $-\dfrac{5\pi}{6}$

f) $\dfrac{15\pi}{4}$ **g)** 1 **h)** 0,7 **i)** -2 **j)** 3

Exercice 5.10: Convertir en radians les angles donnés par leur mesure en degrés :

a) $45°$	**b)** $60°$	**c)** $75°$	**d)** $-30°$	**e)** $120°$
f) $315°$	**g)** $22{,}7°$	**h)** $-107{,}9°$	**i)** $292{,}3°$	**j)** $152{,}5°$

Exercice 5.11: La parallaxe annuelle α d'une étoile est l'angle sous lequel on voit le segment Terre-Soleil depuis l'étoile. Elle s'exprime en secondes d'arc ("). La parallaxe est mesurée en visant l'étoile depuis deux positions de la Terre diamétralement opposées sur sa trajectoire autour du Soleil. L'intervalle de temps entre deux visées est donc égal à 6 mois. En 1838, l'astronome Bessel trouva 0,3 seconde d'angle pour la parallaxe de l'étoile 61 Cygni. La valeur admise à l'heure actuelle est 0,293 seconde d'angle. Sachant que la terre est située à $1{,}5 \cdot 10^8$ km du soleil, quelle est l'erreur faite par Bessel sur la distance Terre-61 Cygni, exprimée en km ?
Exprimer ensuite cette erreur en % (erreur relative).



5.2.2 Longueur d'arc et aire d'un secteur

Exemple 5: On considère un cercle de rayon 10 cm.

a) Déterminer la longueur de l'arc correspondant à un angle au centre de $\alpha = 10°$.

b) Déterminer la longueur de l'arc correspondant à un angle au centre de $\alpha = 4\pi/15$ rad.

c) Lequel des 2 calculs est le plus agréable ?

Exemple 6: On considère un cercle de rayon 10 cm.

a) Déterminer l'aire du secteur circulaire correspondant à un angle au centre de $\alpha = 40°20'$.

b) Déterminer l'aire du secteur circulaire correspondant à un angle au centre de $\alpha = 5\pi/6$ rad.

c) Lequel des 2 calculs est le plus agréable ?

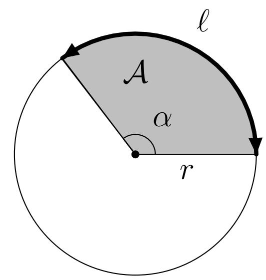
Constatations: Considérons un cercle de rayon r et un angle au centre de α radians

- La longueur ℓ de l'arc correspondant à l'angle α est donnée par

$$\boxed{\ell = r \cdot \alpha}$$

- L'aire $\mathcal{A}$ du secteur circulaire correspondant à l'angle α est donnée par

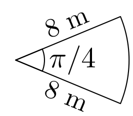
$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2} r^2 \alpha}$$



Exercice 5.12:

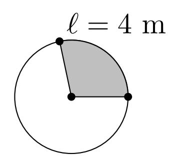
a) Trouver le rayon d'un cercle pour lequel un arc de cercle de longueur 3 cm est sous-tendu par un angle de 20°.

b) Calculer le périmètre et l'aire du parterre de fleurs de la figure ci-contre.



c) Trouver la mesure en degré et en radian de l'angle au centre d'un cercle de rayon 4, qui sous-tend un arc de cercle de longueur 7.

d) Sur la figure ci-contre, l'aire du secteur grisé est égale à 5 m^2. Calculer le rayon du cercle ainsi que l'angle au centre.



e) Un vendeur de pizza (aux USA) vend deux types de tranches :

- *the small slice* : 2 $ pour $\frac{1}{6}$ d'une pizza de 18 pouces de diamètre ;
- *the large slice* : 3 $ pour $\frac{1}{8}$ d'une pizza de 26 pouces de diamètre ;

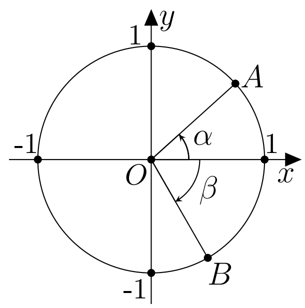
Quelle est la tranche ayant le meilleur rapport “quantité-prix” ?

Exercice 5.13: Une roue tourne à la vitesse de 48 tours/minute. Exprimer cette vitesse de rotation en :

a) tours/seconde **b)** radians/minute
c) radians/heure **d)** degré/seconde

5.3 Le cercle trigonométrique

Définition: Le **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1 muni d'un système d'axes perpendiculaires Ox et Oy dont l'origine est le centre O du cercle. Les angles y sont toujours représentés depuis la partie positive de l'axe horizontal Ox. On associe à chaque angle un point sur le cercle trigonométrique.



Le point A est associé à l'angle $\alpha = 52°$.

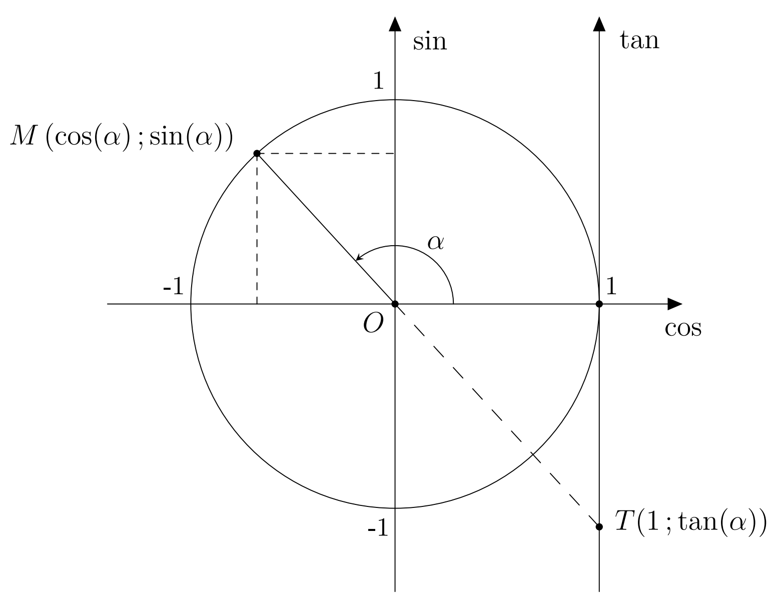
L'angle $\beta = -\pi/3$ est associé au point B.

5.3.1 Fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques sont définies à l'aide d'un cercle trigonométrique.

Définition: Considérons le point M du cercle trigonométrique correspondant à l'angle α.

- Le **cosinus** de α, noté $\mathbf{cos(\alpha)}$, est l'abscisse de M.
- Le **sinus** de α, noté $\mathbf{sin(\alpha)}$, est l'ordonnée de M.
- La **tangente** de α, notée $\mathbf{tan(\alpha)}$, est l'ordonnée de T, où T est le point d'intersection de la droite OM avec la tangente au cercle au point $(1;0)$.



Exercice 5.14: Tracer, avec précision, un cercle trigonométrique (origine au centre d'une nouvelle page quadrillée, prendre 10 carrés pour unité). À l'aide d'un rapporteur, représenter sur le cercle les points A, B, C et D dont l'angle au centre correspondant vaut respectivement :

$$72° \quad ; \quad 2\pi/3 \quad ; \quad 5\pi/4 \quad ; \quad -55°$$

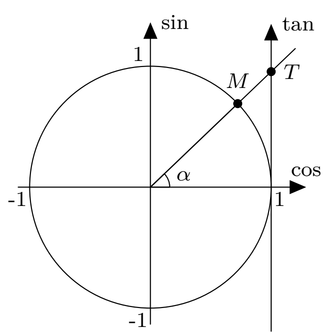
En mesurant les coordonnées des points A, B, C et D sur la figure, compléter le tableau ci-dessous (2 décimales), puis les comparer avec le résultat obtenu à l'aide d'une calculatrice.

	α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
A	$72°$			
B	$2\pi/3$			
C	$5\pi/4$			
D	$-55°$			

Exercice 5.15: Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, justifier les affirmations suivantes :

a) $-1 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$.

b) $\tan(\alpha)$ n'est pas définie si $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.



On considère les points M et T représentés sur la figure ci-contre.

c) Calculer $||\overrightarrow{OM}||$. En déduire la relation :

$$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$

d) Justifier que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OT}$ sont colinéaires et en déduire que :

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

Exercice 5.16: Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifiez-le dans chaque cas à l'aide d'un petit cercle trigonométrique :

a) $\sin(10°) = \sin(170°)$

b) $\cos(140°) = -\cos(40°)$

c) $\cos(70°) = \sin(20°)$

d) $\cos(\pi/3) = -\cos(-\pi/3)$

e) $\sin(\pi/4) = \sin(-\pi/4)$

f) $\tan(40°) = \tan(220°)$

Exercice 5.17: L'axe des cosinus et celui des sinus partagent le plan en quatre parties appelées quadrants. Ces quadrants sont numérotés de I à IV suivant le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre.) Dans quel quadrant se trouve le point du cercle trigonométrique associé à l'angle α dans les cas suivants ?

a) $\cos(\alpha) > 0$ et $\sin(\alpha) < 0$ **b)** $\tan(\alpha) > 0$ et $\cos(\alpha) < 0$

c) $\cos(\alpha) < 0$ et $\sin(\alpha) < 0$ **d)** $\tan(\alpha) < 0$ et $\sin(\alpha) > 0$

Exemple 7: Déterminer les valeurs exactes de $\sin(\pi/3)$, $\cos(\pi/3)$, $\tan(\pi/3)$.

Exercice 5.18: En utilisant une démarche comparable

a) Déterminer les valeurs exactes de $\sin(30°)$, $\cos(30°)$, $\tan(30°)$.

b) Déterminer les valeurs exactes de $\sin(\pi/4)$, $\cos(\pi/4)$, $\tan(\pi/4)$.

Compléter le tableau des **valeurs particulières** ci-dessous

degrés	radians	sin	cos	tan
0°				
	$\frac{\pi}{6}$			
	$\frac{\pi}{4}$			
60°				
	$\frac{\pi}{2}$			

Exemple 8: Déterminer, sans calculatrice, les valeurs exactes de $\sin(7\pi/6)$, $\cos(7\pi/6)$ et $\tan(7\pi/6)$

Exercice 5.19: Déterminer, sans calculatrice, les valeurs exactes de $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ dans les cas suivants :

a) $\alpha = 120°$	**b)** $\alpha = -\pi/3$	**c)** $\alpha = 945°$
d) $\alpha = -5\pi/6$	**e)** $270°$	**f)** $\alpha = 6\pi$

Exercice 5.20: Quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$ représenté sur un cercle trigo :

a) Déterminer tous les angles qui admettent le même sinus de α.
b) Même question pour le cosinus.
c) Même question pour la tangente.

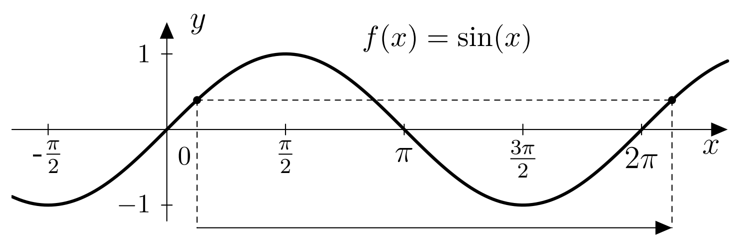
Exercice 5.21: Déterminer tous les angles α compris entre $0°$ et $360°$ pour lesquels :

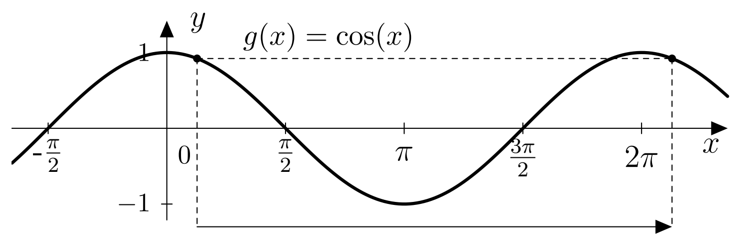
a) $\sin(\alpha) = 1/3$	**b)** $\cos(\alpha) = 1/2$	**c)** $\tan(\alpha) = -2$
d) $\cos(\alpha) = -0{,}9$	**e)** $\sin(\alpha) = 0$	**f)** $\cos(\alpha) = 1{,}4$

Indication : dans chaque cas, une première solution doit être trouvée avec une calculatrice, les autres avec un petit cercle trigonométrique.

5.3.2 Graphes des fonctions trigonométriques

Pour représenter graphiquement les fonctions trigonométriques, nous nous servons d'un système d'axes orthonormés dans lequel nous portons en abscisse les mesures en radians (evt. en degrés) des angles, et en ordonnée les sinus, cosinus ou tangente de ces angles.

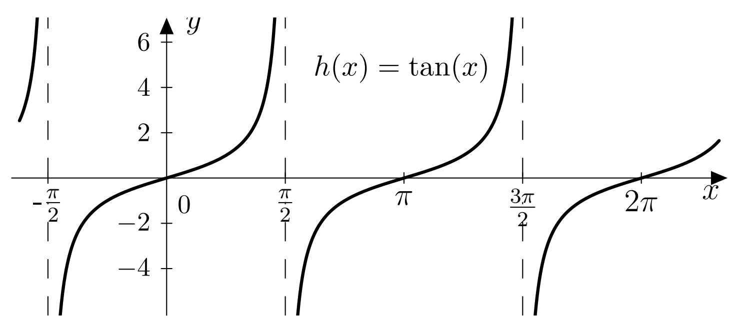




On peut constater sur un cercle trigonométrique que l'ajout à l'angle α d'un multiple entier de 2π ne change pas la position du point M. Ainsi

$$\cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos(\alpha) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin(\alpha) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π.



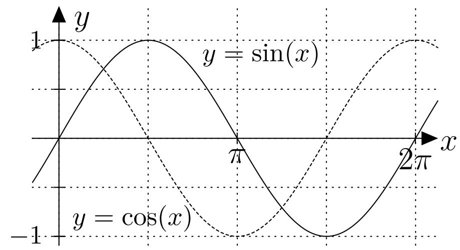
La fonction tangente est **périodique** de période π

$$\tan(\alpha + k \cdot \pi) = \tan(\alpha) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exemple 9: En partant des courbes de référence $y = \sin(x)$ ou $y = \cos(x)$, esquisser pour $x \in \left[0\,;2\pi\right]$ les fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sin(2x)$

b) $g(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x)$



Exercice 5.22: Même consigne pour $x \in \left[-2\pi\,;2\pi\right]$:

a) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ puis $g(x) = 3\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

b) $f(x) = \cos(3x)$ puis $g(x) = -\frac{1}{2}\cos(3x)$

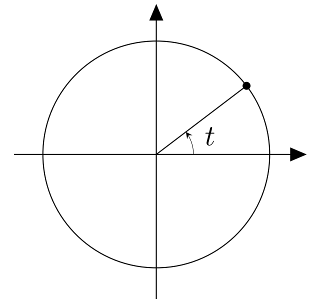
c) $f(x) = \cos(x + \pi)$

d) $f(x) = \sin(x - \pi/2)$

e) $f(x) = -2\cos(2x + \pi/4)$

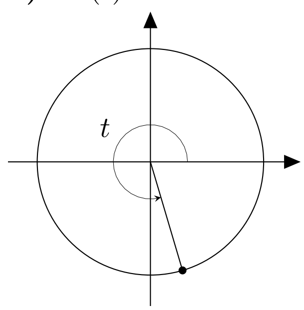
Exemple 10: Indiquer en couleur sur la figure l'endroit où l'on lit sur le cercle trigonométrique la valeur de

$$-\cos(t)$$

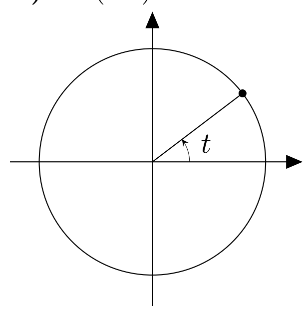


Exercice 5.23: Indiquer en couleur sur la figure l'endroit où l'on lit sur le cercle trigonométrique la valeur de :

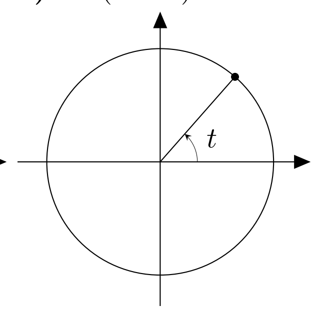
a) $\sin(t)$



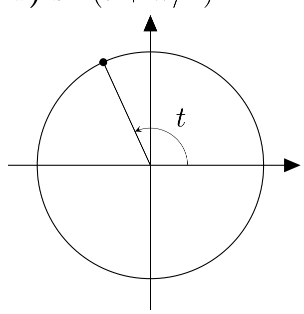
b) $\sin(-t)$



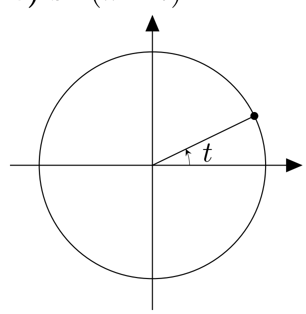
c) $\cos(t+\pi)$



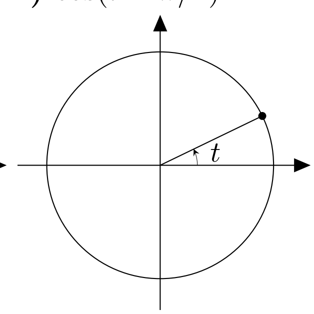
d) $\sin(t+\pi/2)$



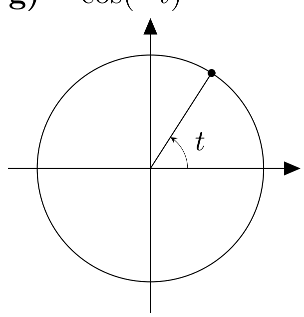
e) $\sin(\pi-t)$



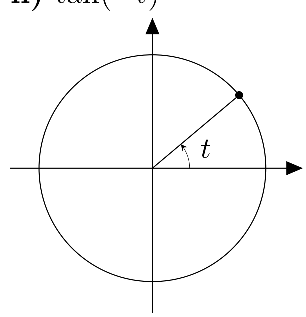
f) $\cos(t-\pi/2)$



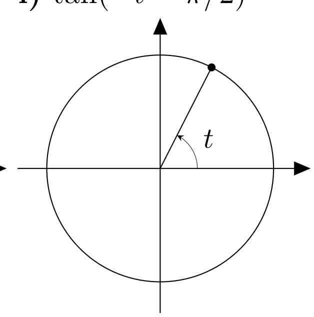
g) $-\cos(-t)$



h) $\tan(-t)$

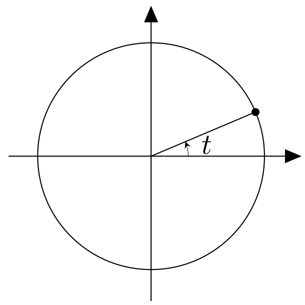


i) $\tan(-t-\pi/2)$

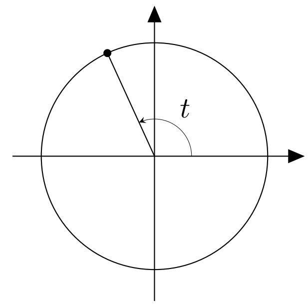


Exercice 5.24: Dans chacune des figures suivantes, représenter tous les angles α vérifiant que :

a) $\sin(\alpha) = \cos(t)$

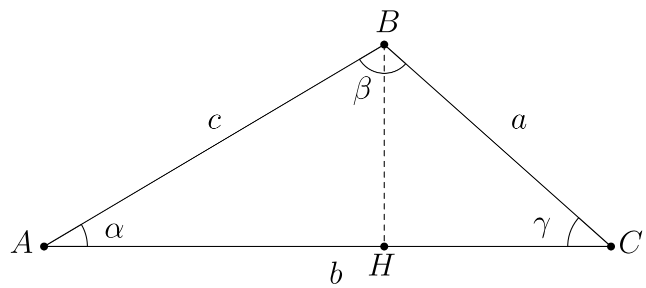


b) $\cos(\alpha) = -\cos(t)$



5.4 Le triangle quelconque

Dans ce paragraphe, nous considérerons un triangle quelconque ABC et on désigne ses angles par α, β et γ et ses côtés par a, b et c.



Les 3 théorèmes ci-dessous permettent de résoudre tout triangle quelconque.

Théorème: **Théorème de l'aire**

$$\boxed{\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}\, a\, b \sin(\gamma) = \tfrac{1}{2}\, b\, c \sin(\alpha) = \tfrac{1}{2}\, a\, c \sin(\beta)}$$

Théorème: **Théorème du sinus**

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}}$$

Théorème: **Théorème du cosinus** ***(ou théorème de Pythagore généralisé)***

$$\boxed{\begin{gathered} a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos(\alpha) \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\, a\, c \cos(\beta) \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b \cos(\gamma) \end{gathered}}$$

Exemple 11: En utilisant les théorèmes précédents, résoudre le triangle suivant :

$$a = 85{,}80 \qquad c = 57{,}29 \qquad \beta = 117{,}81°$$

Exercice 5.25: En utilisant les théorèmes précédents, résoudre les triangles suivants :

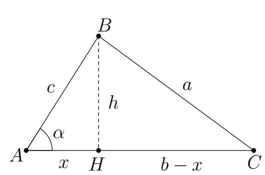
a) $a = 85{,}67$ $\quad \beta = 123{,}18°$ $\quad \gamma = 24{,}54°$

b) $a = 41{,}94$ $\quad b = 96{,}92$ $\quad c = 107{,}26$

c) $a = 70{,}24$ $\quad b = 82{,}12$ $\quad \gamma = 30{,}69°$

Exercice 5.26: Résoudre le triangle connaissant son aire $\mathcal{A} = 12{,}52$ cm^2 ainsi que les angles $\alpha = 54{,}08°$ et $\beta = 88{,}94°$.

Exercice 5.27: Démontrer les 3 théorèmes précédents dans l'ordre suivant :



a) *th. de l'aire* en explicitant l'aire du ΔABC à l'aide de la hauteur BH.

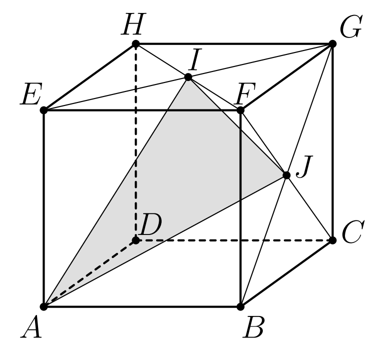
b) *th. du sinus* à l'aide du th. de l'aire.

c) *th. du cosinus* en appliquant Pythagore aux triangles rectangles ABH et CBH sur la figure.

Exercice 5.28: D'un parallélogramme $ABCD$, on donne les côtés $AB = 30$ cm, $BC = 20$ cm et l'angle $\beta = 60°$ en B. Calculer la longueur des diagonales AC et BD, ainsi que l'angle aigu θ qu'elles forment entre elles.

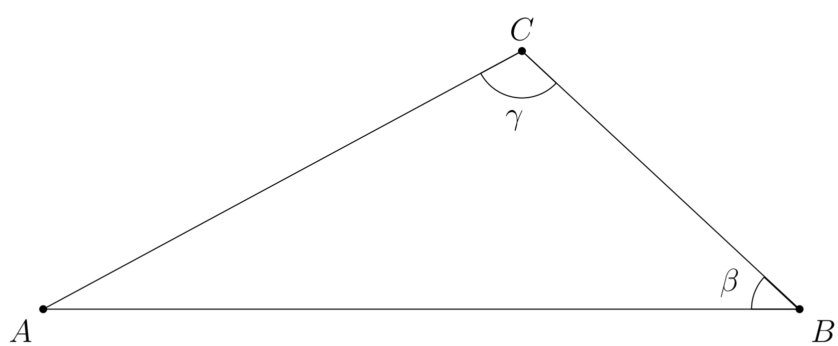
Exercice 5.29: Un point B est inaccessible et invisible d'un point A. Pour déterminer la distance AB, on a choisi deux points C et D alignés avec A et d'où l'on voit les points A et B. On a mesuré les distances $AD = 432{,}3$ m et $AC = 521{,}8$ m ainsi que les angles $\angle ADB = 55{,}3°$ et $\angle ACB = 41{,}6°$. Calculer la distance AB lorsque le point A est situé entre C et D.

Exercice 5.30: On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre.
On désigne par I le centre de la face $EFGH$ et par J le centre de la face $BCGF$.
Calculer les angles du triangle AIJ.



Exercice 5.31: Déterminer les coordonnées des sommets A' et B' du carré $A'B'C'D'$ obtenu par rotation de 30° autour de l'origine du carré $ABCD$ dont on donne les sommets $A(1\,;1)$, $B(5\,;1)$ et $C(5\,;5)$.

Exercice 5.32: On considère le triangle ABC représenté ci-dessous :



On connaît les côtés $AB = 10$ cm et $BC = 5$ cm ainsi que l'angle $\beta = 43°$. Calculer :

a) la longueur du côté AC ;

b) la mesure de l'angle γ à l'aide du *théorème du sinus* ;

c) la mesure du même angle γ à l'aide du *théorème du cosinus* ;

d) Comment expliquez-vous ces 2 valeurs différentes ? laquelle est alors correcte ?

Exercice 5.33: [**Théorème du sinus : côté - côté - angle**]
Dans chacun des cas suivants, représenter graphiquement les triangles solutions, puis les résoudre algébriquement et numériquement.

a) $a = 2$ $\quad c = 6$ $\quad \alpha = 30°$

b) $a = 3$ $\quad c = 6$ $\quad \alpha = 30°$

c) $a = 4$ $\quad c = 6$ $\quad \alpha = 30°$

d) $a = 6$ $\quad c = 6$ $\quad \alpha = 30°$

e) $a = 7$ $\quad c = 6$ $\quad \alpha = 30°$

A

Quelques éléments de solutions

A.0 Logique

Exercice 0.1:

Le destin de ce paradoxe est intéressant. On raconte que le philosophe Philatos de Cos, ne pouvant supporter la contradiction, se suicida vers 330 av. J.-C. Il a fallu attendre 2'500 ans pour qu'il soit résolu. Bertrand Russel posa dans son ouvrage *Principia mathematica* (1910) que « aucune proposition ne peut exprimer quelque chose au sujet d'elle-même ». D'où la nécessité expliqua-t-il en 1910 de formaliser la logique.

Exercice 0.2:

a) Proposition vraie.
b) Ce n'est pas une proposition.
c) Proposition fausse.
d) Ce n'est pas une proposition.
e) Proposition vraie.
f) Proposition fausse.
g) Proposition fausse.
h) Proposition vraie.

Exercice 0.3:

Par exemple : « Je vais être décapité ».

Exercice 0.4:

a) $nonA$: Dans le plan, les droites D et D' sont strictement parallèles.
b) $nonB : 3 < x \leqslant 7$ on peut également proposer : $nonB : x > 3$ et $x \leqslant 7$.

Exercice 0.5:

a) Oui
b) Non, la dernière condition n'est pas vérifiée

Ces réponses seront justifiées à l'aide de :

a) On définit les propositions suivantes :

- E : Malik est écossais (V) ;
- B : Malik joue au biniou (F) ;
- J : Malik porte une jupe (F) ;
- R : Malik fait du rugby (V) ;

On obtient le tableau suivant :

E	B	$nonJ$	R	$nonR$	E ou B	R et $nonJ$	$nonR$ ou E
V	F	V	V	F	**V**	**V**	**V**

b) On définit les *nouvelles* propositions suivantes :

- E : Léo est écossais (F) ;
- J : Léo porte une jupe (F) ;
- B : Léo joue au biniou (V) ;
- R : Léo fait du rugby (V) ;

On obtient le tableau suivant :

E	B	$nonJ$	R	$nonR$	E *ou* B	R *et* $nonJ$	$nonR$ *ou* E
F	V	V	V	F	**V**	**V**	**F**

Exercice 0.6:

a) $nonA = A_3$: « Je ne parle pas français ou pas anglais ».

b) En effet, il suffit de comparer la 4^{e} colonne avec la dernière de la table de vérité.

c) $nonB$: « Je ne vais pas à Paris et pas à Londres », justifié par :

P	Q	P *ou* Q	$non(P$ *ou* $Q)$		$nonP$	$nonQ$	$(nonP)$ *et* $(nonQ)$
V	V	V	**F**		F	F	**F**
V	F	V	**F**		F	V	**F**
F	V	V	**F**		V	F	**F**
F	F	F	**V**		V	V	**V**

d) $non(P \text{ } ou \text{ } Q)$ est équivalent à $(nonP) \text{ } et \text{ } (nonQ)$

Exercice 0.7:

A avec C puis B avec D.

Exercice 0.8:

Vous avez proposé les 8 implications vraies suivantes :

$$\begin{array}{cccc} A \implies B & B \implies A & C \implies D & D \implies C \\ C \implies A & C \implies B & D \implies A & D \implies B \end{array}$$

Mais il y en a encore 4 à ne pas oublier :

$$A \implies A \qquad B \implies B \qquad C \implies C \qquad D \implies D$$

Exercice 0.9:

Il y a ces 7 implications vraies :

$$\begin{array}{c} C \implies D \qquad D \implies C \qquad E \implies A \qquad E \implies B \qquad F \implies B \\ B \implies (E \text{ ou } F) \qquad (E \text{ ou } F) \implies B \end{array}$$

Mais aussi celles du type : $A \implies A \qquad B \implies B \qquad \dots \qquad (E \text{ ou } F) \implies (E \text{ ou } F)$

Exercice 0.10:

La réciproque peut étre proposée sous la forme :

$$(a+b) \text{ est divisible par } c \quad \implies \quad a \text{ et } b \text{ sont divisibles par } c$$

L'implication est juste, mais sa réciproque est fausse. Je vous laisse trouver un contre-exemple.

Exercice 0.11:

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$(P \implies Q)$ *et* $(Q \implies P)$		$P \iff Q$
V	V	V	V	**V**		**V**
V	F	F	V	**F**		**F**
F	V	V	F	**F**		**F**
F	F	V	V	**V**		**V**

Exercice 0.12:

a) $A \implies B$ est faux. $B \implies A$ est vrai. $A \iff B$ est faux.
b) $A \implies B$ est vrai. $B \implies A$ est vrai. $A \iff B$ est vrai.
c) $A \implies B$ est vrai. $B \implies A$ est faux. $A \iff B$ est faux.

Exercice 0.13:

a) A *et* $(nonB)$ **b)** A *et* C **c)** $(nonA)$ *ou* B
d) $C \implies A$ **e)** $(A$ *et* $B) \implies C$ **f)** $A \implies (B$ *ou* $C)$

Exercice 0.14:

a) V, V, F, V, V, V. **b)** F, F, V, F, V, V.

Exercice 0.15:

a) A et B sont des chevaliers.
b) Personne n'a pu énoncer cette proposition.
c) A est un chevalier.

Exercice 0.16:

J'aime assurément Jane.

Exercice 0.17:

Le malfaiteur est venu en voiture, avec la clé et avait un complice ; quant aux déclarations du témoin, on ne peut pas se prononcer.

Exercice 0.18:

P	Q	$P \implies Q$	$non(P \implies Q)$		P	$nonQ$	P *et* $(nonQ)$
V	V	V	**F**		V	F	**F**
V	F	F	**V**		V	V	**V**
F	V	V	**F**		F	F	**F**
F	F	V	**F**		F	V	**F**

Exercice 0.19:

a) Avec les tables de vérité (dernière colonne)

$P \implies Q$		$nonP$ *ou* Q
V		**V**
F		**F**
V		**V**
V		**V**

P *et* Q		$non((nonP)$ *ou* $(nonQ))$
V		**V**
F		**F**
F		**F**
F		**F**

b) Et si vous utilisiez les négations de l'exercice précédent et de la 1re loi de Morgan...

Exercice 0.20:

Pourra être vu ensemble à votre demande

Exercice 0.21:

a) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ **b)** $(P \wedge Q) \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$

Exercice 0.22:

a) **Cette erreur** classique de croire que :

$$(non(P \implies Q)) \quad \equiv \quad (nonP \implies nonQ)$$

se justifie rapidement à l'aide d'une table de vérité.

b) La réponse se trouve dans l'exercice **0.18)**.

Exercice 0.23:

a) A : $ABCD$ est un carré et $ABCD$ n'est pas un rectangle : Faux.

B : n est premier et n est pair différent de 2 : Faux.

C : n est divisible par 6 et n n'est pas divisible par 2 ou n'est pas divisible par 3 : Faux.

D : Le quadrilatère $ABCD$ a des diagonales qui se coupent perpendiculairement en leur milieu et $ABCD$ n'est pas un losange : Faux.

b) A : Si $ABCD$ n'est pas un rectangle, alors $ABCD$ n'est pas un carré : Vrai.

B : Si n est pair différent de 2, alors n n'est pas premier : Vrai.

C : Si n n'est pas divisible par 2 ou n'est pas divisible par 3, alors n n'est pas divisible par 6 : Vrai.

D : Si $ABCD$ n'est pas un losange, alors le quadrilatère $ABCD$ a des diagonales qui ne se coupent pas perpendiculairement ou pas en leur milieu : Vrai.

c) A : Si $ABCD$ est un rectangle, alors $ABCD$ est un carré : Faux.

B : Si n est impair ou $n = 2$, alors n est premier : Faux.

C : Si n est divisible par 2 et par 3, alors n est divisible par 6 : Vrai.

D : Si $ABCD$ est un losange, alors le quadrilatère $ABCD$ a des diagonales qui se coupent perpendiculairement en leur milieu : Vrai.

Exercice 0.24:

Il s'agit de la proposition **b)**

Exercice 0.25:

a) $\forall x \in E, P(x)$ **b)** $\exists x \in E, non P(x)$ **c)** $non(\exists x \in E, non P(x))$ **d)** $\forall x \in E, P(x)$

Exercice 0.26:

a) Vrai **b)** Faux **c)** Faux **d)** Vrai

Exercice 0.27:

Proposition de réponses, vérifiez si les vôtres sont équivalentes.

a) Les Lausannois ne parlent pas chinois.

b) Certains Lausannois ne savent pas lire.

c) Certains Lausannois n'ont ni des cheveux blonds, ni des yeux noirs.

d) Les Lausannois n'ont pas 120 ans ou ne parlent pas tibétain.

e) Les Lausannois ne parlent ni le chinois, ni le tibétain.

f) Il existe au moins un poisson qui respire avec des poumons.

Exercice 0.28:

Pas de corrigé proposé.

Exercice 0.29:

a) $\boldsymbol{H}$ **:** soit ABC un triangle d'angles α, β et γ.

$\boldsymbol{C}$ **:** $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

b) $\boldsymbol{H}$ **:** soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles qui ont respectivement un angle et les côtés adjacents isométriques.

$\boldsymbol{C}$ **:** $\Delta\, ABC$ isométrique au $\Delta\, A'B'C'$.

c) Ici, on a à faire à une équivalence ($\Longleftrightarrow$), il y a donc **2 formulations** :

$\boldsymbol{H}_1$ **:** soit un nombre divisible par 3.

$\boldsymbol{C}_1$ **:** la somme de ses chiffres est un multiple de 3.

$\boldsymbol{H}_2$ **:** soit un nombre tel que la somme de ses chiffres soit un multiple de 3.

$\boldsymbol{C}_2$ **:** le nombre est divisible par 3.

d) $\boldsymbol{H}$ **:** soit n un nombre impair.

$\boldsymbol{C}$ **:** $n = 2k + 1$ avec k un entier.

Exercice 0.30:

Quelques éléments de preuve (idées, mais **sans rigueur** !!)

a) $P' = 2x' + 2y' = 2(2x) + 2(2y) = 2(2x + 2y) = 2P$

b) $a = 2k + 1, b = 2m + 1 \implies a + b = 2k + 2m + 2 = 2(k + m + 1) = 2k'$ où k, m et $k' \in \mathbb{Z}$.

Exercice 0.31:

a) Si 2 nombres réels positifs sont inférieurs ou égaux à 10 alors le produit est inférieur ou égal à 100.

b) Si n est pair alors il n'est pas premier ou il est égal à 2.

c) $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, si m et n sont de parité différente alors $m + n$ est impair.

Indication : *non*(m et n sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs) est équivalent à n et m de parité différente.

Exercice 0.32:

Quelques éléments de preuve (*idées à compléter par quelques phrases explicatives*)

a) Supposons $a \leqslant 10$ et $b \leqslant 10$ alors $a \cdot b \leqslant 100$.

b) Supposons n pair, donc $n = 2 \cdot k$ (avec k entier). Ainsi, si $n \neq 2$ alors n n'est pas premier.

c) Supposons l'*un* pair ($2j$) et l'autre *impair* ($2k + 1$) alors :

$$n + m = 2j + 2k + 1 = 2(j + k) + 1 = 2k' + 1 \text{ est impair.}$$

Exercice 0.33:

a) Se démontre par contraposée : Si n est pair alors $3n + 2$ aussi.

b) Se démontre directement :

$$R_1 + R_2 = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \text{ qui est bien un rationnel, car...}$$

Exercice 0.34:

Quelques éléments de preuve (*idées à compléter par quelques phrases explicatives*)

a) Soit les deux nombres : $a = \dfrac{p}{q}$ et b un irrationnel.

Supposons par l'absurde que $a + b = \dfrac{n}{m}$, alors $b = \dfrac{n}{m} - \dfrac{p}{q} = \dfrac{nq - pm}{mq}$ qui est un rationnel.

Ainsi, un irrationnel est rationnel $\lightning$

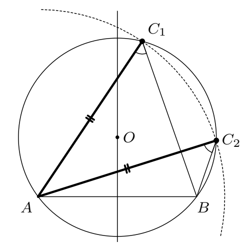
b) Supposons que le triangle soit rectangle, il doit vérifier le théorème de Pythagore :

$$12^2 = 11^2 + 10^2 \iff 144 = 221 \text{ ce qui est absurde } \lightning$$

Exercice 0.35:

a) Il suffit de considérer $a = -5$ et $b = -1$.

b) Il suffit que l'angle ne soit pas compris entre les 2 côtés isométriques (*cf. figure ci-contre*) :



$$\left.\begin{array}{c} \overline{AB} \text{ commun} \\ \overline{AC_1} = \overline{AC_2} \\ \angle AC_1B = \angle AC_2B \end{array}\right\} \not\Longrightarrow \text{ les deux } \Delta \text{ sont isométriques}$$

c) 8 est divisible par 4, mais pas par 12.

Exercice 0.36:

Quelques éléments de preuve (*idées à compléter par quelques phrases explicatives*)

a)
- Si n est pair, alors $n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) et ainsi :
$$n^2 + n = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k) \text{ qui est pair car } 2k^2 + k \in \mathbb{Z}.$$
- Si n est impair, alors $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) et ainsi :
$$n^2 + n = 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1) \text{ qui est pair car } 2k^2 + 3k + 1 \in \mathbb{Z}.$$

b)
- Si a est pair, alors $a = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) et ainsi $a^2 - 2 = 4k^2 - 2$ qui ne peut s'écrire comme 4 fois un entier.
- Si a est impair, alors $a = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) et ainsi $a^2 - 2 = 4k^2 + 4k - 1$ qui ne peut s'écrire comme 4 fois un entier.

Exercice 0.37:

Quelques éléments de preuve (*idées à compléter par quelques phrases explicatives*)

a)
- **Initialisation :** Ok pour $n = 1$.
- **Hérédité :**
$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n+1)^2 &= \left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right] + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right] \\ &= (n+1)\left[\frac{2n^2 + 7n + 6}{6}\right] \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

b)
- **Initialisation :** Ok pour $n = 1$.
- **Hérédité :**
Supposons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 8^n - 1$ est un multiple de 7, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $8^n - 1 = 7k$.
Ainsi $8^{n+1} - 1 = 8 \cdot 8^n - 1 = 8(8^n - 1) + 7 = 8 \cdot 7k + 7 = 7(8k + 1)$, on observe donc bien que $8^{n+1} - 1$ est un multiple de 7 (car $8k + 1 \in \mathbb{Z}$).

Exercice 0.38:

Ne manque-t-il pas une première étape dans cette “démonstration” ?

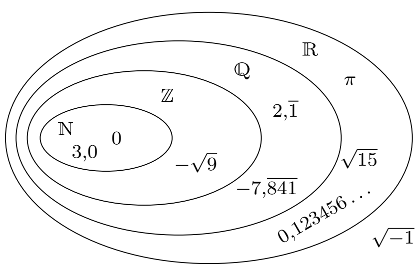
Exercice 0.39:

$A = \{1;2;3;4;6;8;12;16;24;48\}$ $B = \{1;2;4;5;7;8\}$
$C = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$ $D = \{-3;2\}$
$E = \{-1;1;3;5;7;9\}$ $F = \{1;3;4;5;6;7;8;9\}$

Exercice 0.40:

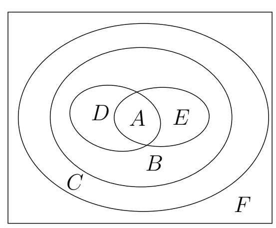
Par exemple :
$A = \{p \,|\, p \text{ est premier et } 11 \leqslant p \leqslant 29\}$ $B = \{x \,|\, x \text{ est une voyelle}\}$
$C = \{x \,|\, x \text{ est un multiple de } 7\}$ $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -35 \leqslant x \leqslant -10\}$
$E = \{4n+1 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 0.41:



Le nombre irrationnel 0,1234567891011. . . est appelé **constante de Champernowne**. Il contient dans son développement décimal toutes les séquences de nombres naturels (*nombre Univers*).

Exercice 0.42:



Exercice 0.43:

a) L'affirmation est vraie

b) Il s'agit des 8 sous-ensembles suivants :

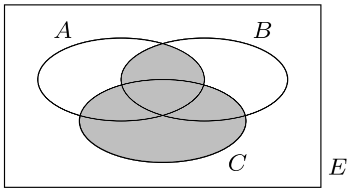
$$\{1;2;3\},\ \{1;2\},\ \{1;3\},\ \{2;3\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \varnothing$$

c) Un corrigé pourra être vu ensemble à votre demande.

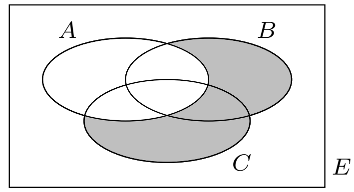
Exercice 0.44:

a) $\{0;6;7;8\} = A$ **b)** $\varnothing$ **c)** $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$ **d)** $\{9;10\}$

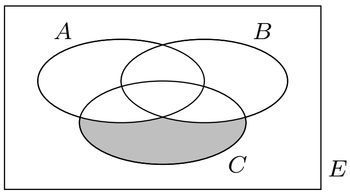
Exercice 0.45:



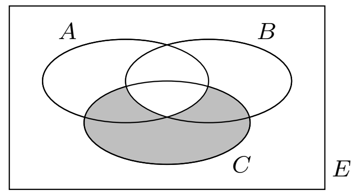
a) $(A \cap B) \bigcup C$



b) $(B \bigcup C) \setminus A$



c) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$



d) $\overline{A \cap B} \cap C$

Exercice 0.46:

a) $(A \setminus B) \cup (C \setminus A)$ **b)** $A \cap (B \cup C)$

Exercice 0.47:

$\mathbb{R} \setminus \left[-5\,;2\right[$

Exercice 0.48:

a) $\left[-2\,;0\right[$ $\left[-3\,;3\right]$ $\left]3\,;4\right[$ $\left[-3\,;-2\right[\cup \left[0\,;4\right[$

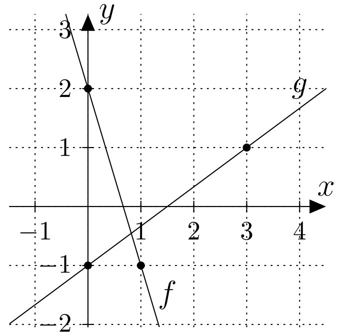
b) $\left[-2\,;2\right]$ $\left]-3\,;1\right[$ $\left]-4\,;-3\right]$ $\left]-4\,;-2\right[\cup \left[1\,;2\right]$

c) $\left]-1\,;3\right[$ $\left[-3\,;3\right[$ $\left]-5\,;-3\right[$ $\left]-5\,;-1\right]$

A.1 Fonctions du 1$^{\text{er}}$ degré

Exercice 1.1:

Remarques :



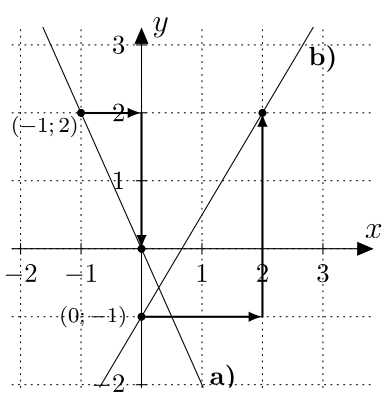
Exercice 1.2:

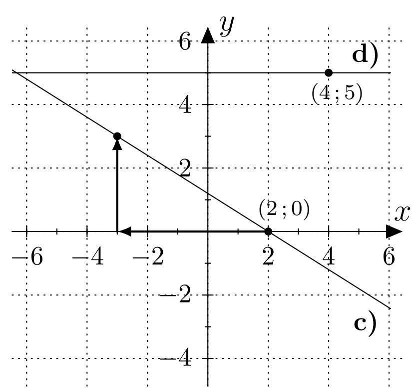
- $f(2) = \dfrac{3}{5} \cdot 2 + 2 = \dfrac{16}{5} \quad \Longrightarrow \quad A\left(2\,;\dfrac{16}{5}\right)$
- $f(x) = \dfrac{3}{10} \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{3}{5}x + 2 = \dfrac{3}{10} \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\dfrac{17}{6} \quad \Longrightarrow \quad B\left(-\dfrac{17}{6}\,;\dfrac{3}{10}\right)$

Exercice 1.3:

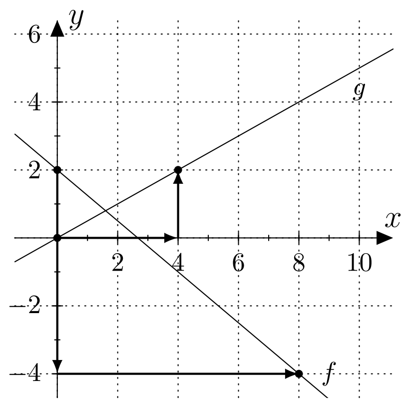
$m_{d_1} = 0 \qquad m_{d_2} = -\dfrac{1}{2} \qquad m_{d_3} = -2 \qquad m_{d_4} = 1 \qquad m_{d_5} = -2 \qquad m_{d_6} = 1$

Exercice 1.4:





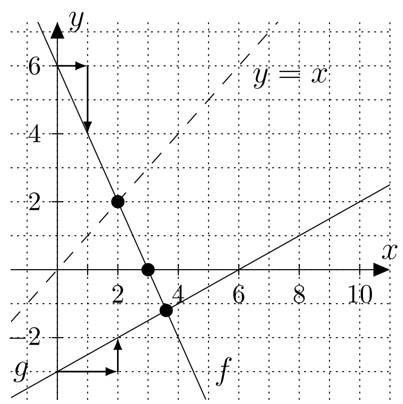
Exercice 1.5:



Exercice 1.6:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = -\dfrac{1}{2}x + h \\ \text{passe par } B(2\,;1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = -\frac{1}{2}(2) + h \;\Rightarrow\; h = 2 \;\Rightarrow\; g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$

Exercice 1.7:



a) $S = \{3\}$
b) $S = \{18/5\}$
c) $S = \{2\}$
d) $S = \left]3\,;+\infty\right[$
e) $S = \left]-\infty\,;18/5\right[$
f) $S = \left]-\infty\,;2\right]$

Exercice 1.8:

a) $f(x) = -\dfrac{3}{10}x + \dfrac{1}{10}$ **b)** $f(x) = -\dfrac{5}{8}x - \dfrac{25}{8}$ **c)** $f(x) = 5$ **d)** $x = -5$

Exercice 1.9:

a) $I\left(-23\,;-\dfrac{107}{20}\right)$ **b)** $I\left(\dfrac{39}{10}\,;\dfrac{3}{10}\right)$ **c)** Pas de point d'intersection I

d) $\{I(x;y)\,|\,y = 2x - 6\}$

Exercice 1.10:

a) $S = \{-23\}$ **b)** $S = \{0\}$ **c)** $S = \left\{-\dfrac{3}{8}\right\}$ **d)** $S = \mathbb{R}$

e) $S = \left\{\dfrac{16}{5}\right\}$ **f)** $S = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

Exercice 1.11:

a) $I\left(\dfrac{17}{11}\,;\dfrac{14}{11}\right)$, les 2 fonctions représentées : $f(x) = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{11}{5}$ et $g(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

b) $k(x) = \dfrac{14}{17}x$

c) $\ell(x) = \dfrac{14}{17}x - \dfrac{45}{17}$

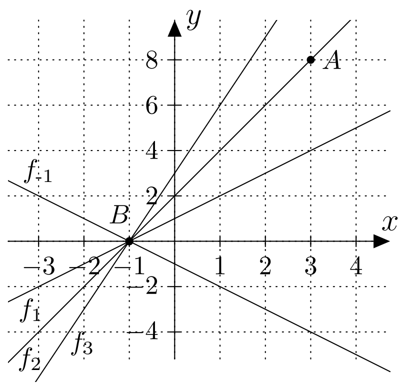
Exercice 1.12:

Elles forment un triangle

- Les 3 fonctions représentées sont : $a(x) = \dfrac{3}{8}x + \dfrac{1}{8}$, $b(x) = -\dfrac{3}{7}x + \dfrac{5}{7}$ et $c(x) = 2x - 1$
- Les 3 points d'intersection sont : $I_1\left(\dfrac{12}{17}\,;\dfrac{7}{17}\right)$, $I_2\left(\dfrac{9}{13}\,;\dfrac{5}{13}\right)$ et $I_3\left(\dfrac{11}{15}\,;\dfrac{2}{5}\right)$

En fait, le calcul des 3 fonctions et d'un point d'intersection peut suffire. Voyez-vous comment ?

Exercice 1.13:



b) $a = 2$

c) $B(-1\,;0)$

Exercice 1.14:

$S = \left[-\dfrac{30}{29}\,;+\infty\right[$

Exercice 1.15:

a) $S = \left]-\infty\,;2\right]$ **b)** $S = \left]-2\,;+\infty\right[$ **c)** $S = \left[\dfrac{15}{2}\,;+\infty\right[$

d) $S = \left[-\dfrac{5}{11}\,;+\infty\right[$ **e)** $S = \left]\dfrac{8}{7}\,;+\infty\right[$ **f)** $S = \left]-\infty\,;\dfrac{98}{41}\right]$

Exercice 1.16:

a) $S = \left]\dfrac{9}{4}\,;+\infty\right[$ **b)** $S = \left[-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{3}\right[$

Exercice 1.17:

a) $t = \dfrac{v - v_0}{9{,}8}$ ou mieux $t(v) = \dfrac{v - v_0}{9{,}8}$ **b)** $v(4) = 40{,}6$ m/s

Exercice 1.18:

a) 45,25 cm **b)** $-39°$ C

Exercice 1.19:

a) $-40°$ C **b)** $160°$ C qui correpond à $320°$ F

Exercice 1.20:

a) 30 m
b) Le père a gagné avec 3 secondes d'avance
c) env 12,35 m
d) $v_{\text{père}} \cong 7{,}14$ m/s et $v_{\text{fils}} \cong 4{,}12$ m/s
e) Elle correspond aux vitesses respectives
f) $d \cong 70{,}83$ m

Exercice 1.21:

a) $v = 300$ km/h **b)** impossible!!

Exercice 1.22:

$t = 36$ min

Exercice 1.23:

L'éloignement est de 371,25 m

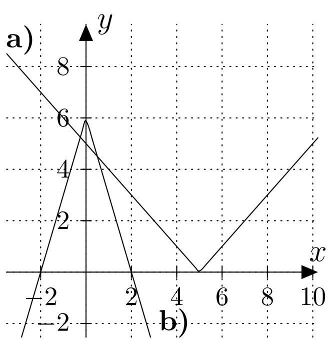
Exercice 1.24:

Il s'agira de considérer $x \in \left]\frac{6}{5}\,;2\right]$

Exercice 1.25:

Pas de réponse

Exercice 1.26:

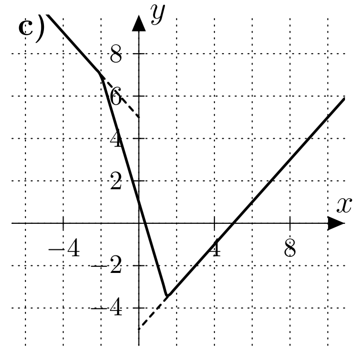


a) $\begin{cases} -x+5 & \text{si } x \in \left]-\infty\,;5\right[\\ x-5 & \text{si } x \in \left[5\,;+\infty\right[\end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+6 & \text{si } x \in \left]-\infty\,;0\right[\\ -3x+6 & \text{si } x \in \left[0\,;+\infty\right[\end{cases}$

c) $\begin{cases} -x+5 & \text{si } x \in \left]-\infty\,;-2\right[\\ -3x+1 & \text{si } x \in \left[-2\,;3/2\right[\\ x-5 & \text{si } x \in \left[3/2\,;+\infty\right[\end{cases}$

c)



Exercice 1.27:

a) $f(2) = 3$; $f(-1) = 6$; $f(4) = 7$ **b)** $x = 2$ **c)** $S = \{0\,;3\}$ puis $S = \varnothing$

Exercice 1.28:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[-2\,;-1\right[\\ -x & \text{si } x \in \left[-1\,;1\right[\\ -1 & \text{si } x \in \left[1\,;2\right[\end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \in \left[-2\,;-1\right[\\ -2x-1 & \text{si } x \in \left[-1\,;0\right[\\ \frac{3}{2}x-1 & \text{si } x \in \left[0\,;2\right] \end{cases}$$

Exercice 1.29:

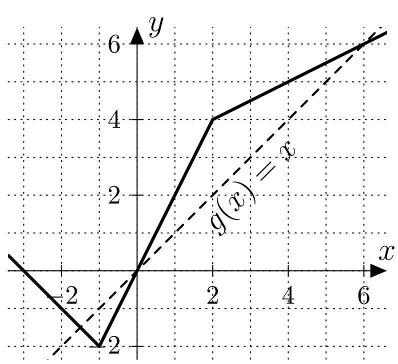
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{5}{2} & \text{si } x \in \left[-3\,;-1\right[\\ -x+1 & \text{si } x \in \left[-1\,;2\right[\\ 2x-5 & \text{si } x \in \left[2\,;3\right[\\ 1 & \text{si } x \in \left[3\,;5\right[\\ \frac{3}{2}x-\frac{13}{2} & \text{si } x \in \left[5\,;7\right] \end{cases}$$

a) $S = \left\{\frac{19}{3}\right\}$

b) $S = \left[3\,;5\right] \cup \{-3\,;0\}$

c) $S = \left]-3\,;0\right[\cup \left]5\,;7\right]$

Exercice 1.30:



b) $S = \left\{-4\,;\frac{1}{2}\right\}$ puis $S = \left\{-\frac{3}{2}\,;0\,;6\right\}$

c) $S = \left]-\frac{3}{2}\,;0\right[\cup \left]6\,;+\infty\right[$

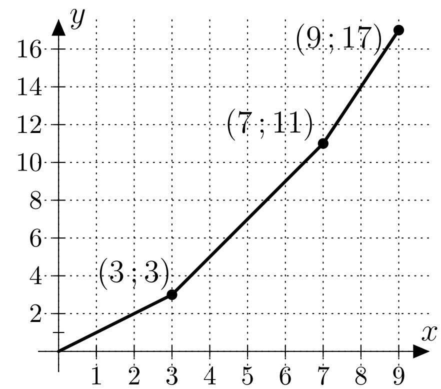
Exercice 1.31:

$a = 4$

Exercice 1.32:

a) $f(0) = 0 \quad ; \quad f(3) = 3 \quad ; \quad f(7) = 11 \quad ; \quad f(9) = 17$

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0\,;3[\\ 2x-3 & \text{si } x \in [3\,;7[\\ 3x-10 & \text{si } x \in [7\,;9] \end{cases}$



d) $S = \left\{\dfrac{13}{2}\right\}$ et $S = \left\{\dfrac{25}{3}\right\}$

Exercice 1.33:

a) $4'710 + 230 + 10\%(8'000 - 230) = 5'717$

b) La dernière offre (franchise à 1'200.-) est la plus avantageuse. Il ne paiera que 5630.-

c) Pas de réponse

Exercice 1.34:

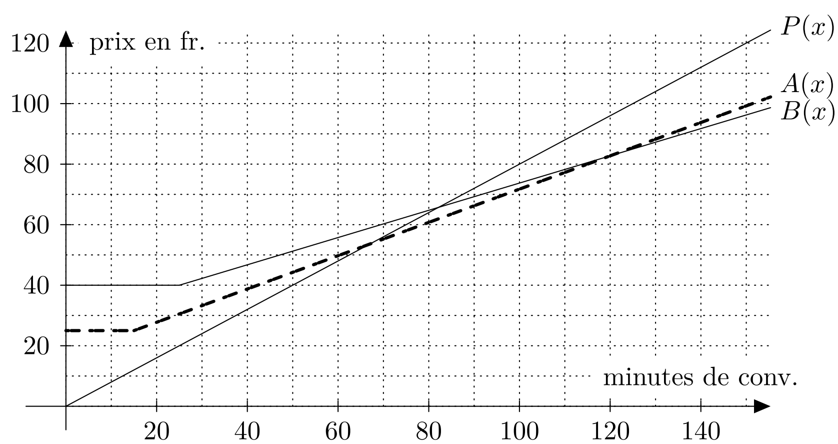
a) Carte P : 72.- ; abonnement A : 66.25 Fr. ; abonnement B : 69.25 Fr.

b) Abonnement B.

c) Cf. ci-dessous

d) $P(x) = 0{,}8x \quad ; \quad A(x) = \begin{cases} 25 & \text{si } x \in [0\,;15[\\ 0{,}55x + 16{,}75 & \text{si } x \in [15\,;+\infty[\end{cases}$

$B(x) = \begin{cases} 40 & \text{si } x \in [0\,;25[\\ 0{,}45x + 28{,}75 & \text{si } x \in [25\,;+\infty[\end{cases}$



e) P : moins de 67 min ; A : entre 67 et 120 min ; B : plus de 120 min

A.2 Fonctions du 2^e degré

Exercice 2.1:

a) $f(x) = (x - (\mathbf{-2}))^2 - \mathbf{3}$ puis $f(x) = x^2 + 4x + 1$

b) $f(x) = \mathbf{-1}(x - \mathbf{2})^2 - \mathbf{1}$ puis $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

c) $f(x) = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(x - \mathbf{0})^2 - \mathbf{4}$ puis $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 4$

d) $f(x) = \mathbf{-2}(x - \mathbf{0})^2 + \mathbf{3}$ puis $f(x) = -2x^2 + 3$

e) $f(x) = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(x - (\mathbf{-2}))^2 + \mathbf{3}$ puis $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

f) $f(x) = -(x - \mathbf{3})^2 + \mathbf{2}$ puis $f(x) = -x^2 + 6x - 7$

Exercice 2.2:

a) $f(x) = (x - (\mathbf{-2}))^2 + \mathbf{3} = x^2 + 4x + 7$

b) $f(x) = (x - \mathbf{4})^2 - \mathbf{2} = x^2 - 8x + 14$

c) $f(x) = (x + \mathbf{1})^2 - \mathbf{0} = x^2 + 2x + 1$

Exercice 2.3:

- Après *développement* de $(\dots)^2$, *distributivité*, mise au *même dénominateur* et finalement *simplification* du membre de gauche de l'égalité, on obtient bien le membre de droite. (chaîne d'égalités)
- En identifiant l'expression avec

$$f(x) = a \cdot (x - 1^{\text{re}} \text{ coord. du sommet})^2 + 2^{\text{e}} \text{ coord. du sommet}$$

Exercice 2.4:

a) $S(2\,;3)$ **b)** $S\left(\dfrac{9}{4}\,;-\dfrac{41}{8}\right)$ **c)** $S\left(\dfrac{4}{3}\,;-\dfrac{2}{3}\right)$ **d)** $S\,(2\,;4)$

Exercice 2.5:

a) $f(x) = (x-2)^2 + 3$

b) $f(x) = (x+3)^2 - 7$

c) $f(x) = -2(x+1)^2 + 13$

d) $f(x) = 2\left(x - \dfrac{9}{4}\right)^2 - \dfrac{41}{8}$

Exercice 2.6:

Quelques éléments de réponses peuvent être vus à votre demande.

Exercice 2.7:

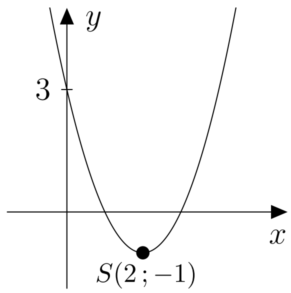
a) $f(x) = (x-3)^2 + 2 \quad \Longrightarrow \quad S(3\,;2)$

b) $f(x) = -(x+2)^2 - 4 \quad \Longrightarrow \quad S(-2\,;-4)$

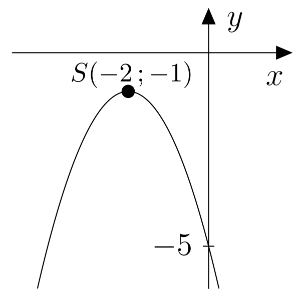
c) $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} \quad \Longrightarrow \quad S\left(\frac{1}{4}\,;\frac{7}{16}\right)$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{57}{8} \quad \Longrightarrow \quad S\left(\frac{1}{2}\,;\frac{57}{8}\right)$

Exercice 2.8:



a)



b)

Exercice 2.9:

a) $6(x+1)(x-1) = 0 \Longrightarrow S = \{\pm 1\}$

b) $(t+10)^2 = 0 \Longrightarrow S = \{-10\}$

c) $3(4z-9)^2 = 0 \Longrightarrow S = \left\{\frac{9}{4}\right\}$

d) $(2x+3)(2x-3) = 0 \Longrightarrow S = \left\{\pm\frac{3}{2}\right\}$

e) $8(x-7)^2 = 0 \Longrightarrow S = \{7\}$

f) $4(7z+5)^2 = 0 \Longrightarrow S = \left\{-\frac{5}{7}\right\}$

g) $\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Longrightarrow S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

h) $\left(3x - \frac{1}{3}\right)\left(3x + \frac{1}{3}\right) = 0 \Longrightarrow S = \left\{\pm\frac{1}{9}\right\}$

i) $18(z+2)^2 = 0 \Longrightarrow S = \{-2\}$

j) $\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right) = 0 \Longrightarrow S = \left\{\pm\sqrt{5}\right\}$

k) $(2x-3)\,(2x-5) = 0 \Longrightarrow S = \left\{\frac{3}{2}\,;\frac{5}{2}\right\}$

l) $(x+5)\,(x-3) = 0 \Longrightarrow S = \{-5\,;3\}$

Exercice 2.10:

a) $(x-9)(x+4) = 0 \Longrightarrow S = \{9\,;-4\}$

b) $(x+6)(x-3) = 0 \Longrightarrow S = \{-6\,;3\}$

c) $2(z+4)(z+8) = 0 \Longrightarrow S = \{-4\,;-8\}$

d) $(x+6)(x+1) = 0 \Longrightarrow S = \{-6\,;-1\}$

e) $-(y-9)(y-1) = 0 \Longrightarrow S = \{9\,;1\}$

f) $(t+6)(t+5) = 0 \Longrightarrow S = \{-6\,;-5\}$

g) $(x-10)(x-1) = 0 \Longrightarrow S = \{10\,;1\}$

h) $(x+9)(x-2) = 0 \Longrightarrow S = \{-9\,;2\}$

i) $(x+15)(x+3) = 0 \Longrightarrow S = \{-15\,;-3\}$

j) $(x-8)(x+4) = 0 \Longrightarrow S = \{8\,;-4\}$

Exercice 2.11:

a) $(2x+3)(x+5)=0 \implies S=\left\{-\dfrac{3}{2}\,;-5\right\}$ **b)** $(9x-1)(x+1)=0 \implies S=\left\{\dfrac{1}{9}\,;-1\right\}$

c) $(5y+6)(y-12)=0 \implies S=\left\{-\dfrac{6}{5}\,;12\right\}$ **d)** $(2x+7)(x-4)=0 \implies S=\left\{-\dfrac{7}{2}\,;4\right\}$

e) $(3x-1)(x+1)=0 \implies S=\left\{\dfrac{1}{3}\,;-1\right\}$ **f)** $(4t-1)(t+2)=0 \implies S=\left\{\dfrac{1}{4}\,;-2\right\}$

g) $(17x-1)(x+17)=0 \implies S=\left\{\dfrac{1}{17}\,;-17\right\}$ **h)** $2(2x-7)(x+4)=0 \implies S=\left\{\dfrac{7}{2}\,;-4\right\}$

i) $(3x+7)(x-5)=0 \implies S=\left\{-\dfrac{7}{3}\,;5\right\}$ **j)** $3(4u+1)(u-4)=0 \implies S=\left\{-\dfrac{1}{4}\,;4\right\}$

Exercice 2.12:

a) $(x-2)(x-6)=0 \implies S=\{2\,;6\}$

b) $(3x+1)(2x+1)=0 \implies S=\left\{-\dfrac{1}{3}\,;-\dfrac{1}{2}\right\}$

c) $x(x+1)(x-1)=0 \implies S=\{0\,;\pm 1\}$

d) $2(3x-1)(x+3)=0 \implies S=\left\{\dfrac{1}{3}\,;-3\right\}$

e) $(x-1)(2-x-x-3)=0 \implies S=\left\{1\,;-\dfrac{1}{2}\right\}$

f) $(t+12)(t-4)=0 \implies S=\{-12\,;4\}$

g) $(x+4)\,(x-4)=0 \implies S=\{\pm 4\}$

h) $(4+(3x+2))\,(4-(3x+2))=0 \implies S=\left\{-2\,;\dfrac{2}{3}\right\}$

Exercice 2.13:

Pourra être vu ensemble, à votre demande…

a) $S=\{3\,;5\}$ **b)** $S=\{-7\,;2\}$

Exercice 2.14:

Pourra être vu ensemble, à votre demande…

a) $S=\left\{-5\,;\dfrac{7}{2}\right\}$ **b)** $S=\left\{5\,;-\dfrac{2}{3}\right\}$

Exercice 2.15:

Pourra être vu ensemble, à votre demande…

a) $x^2+6x+7=0 \iff \cdots \iff (x+3)^2-2=0 \iff \left(x+3+\sqrt{2}\right)\left(x+3-\sqrt{2}\right)=0$

$S=\left\{-3\pm\sqrt{2}\right\}$

Exercice 2.15:

b) $4x^2 - 12x - 11 = 0$

$$\begin{aligned} &\iff 4\left(x^2 - 3x - \frac{11}{4}\right) = 0 \\ &\iff 4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - \frac{11}{4}\right) = 0 \\ &\iff 4\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{20}{4}\right] = 0 \\ &\iff 4\left[\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{\sqrt{20}}{2}\right]\left[\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{\sqrt{20}}{2}\right] = 0 \\ &\iff 4\left[x - \frac{3 + \sqrt{20}}{2}\right]\left[x - \frac{3 - \sqrt{20}}{2}\right] = 0 \end{aligned}$$

$$S = \left\{\frac{3 \pm 2\sqrt{5}}{2}\right\}$$

c) Sera vu ensemble dans le cadre du théorème qui suit.

Exercice 2.16:

Et il y a même trois erreurs mathématiques dans cette BD !! Les avez-vous repérées ?

Exercice 2.17:

a) $S = \left\{\frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$ **b)** $S = \left\{-2 \pm \sqrt{2}\right\}$ **c)** $S = \left\{1 \pm \sqrt{3}\right\}$

d) $S = \varnothing$ **e)** $S = \left\{\frac{4 \pm \sqrt{22}}{3}\right\}$ **f)** $S = \{-2\,;-2/5\}$

Exercice 2.18:

a) $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)$ ou plutôt $f(x) = (2x-1)(x+3)$

b) $g(x) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-1)$ ou plutôt $g(x) = (3x-2)(x-1)$

c) $h(x) = 4\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$ ou plutôt $h(x) = (2x-5)^2$

d) $k(x) = \left(x - 2 + \sqrt{5}\right)\left(x - 2 - \sqrt{5}\right)$

Exercice 2.19:

a) $f(x) = (x-9)(x-7)$ **b)** $f(x) = (x + 2\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3})$

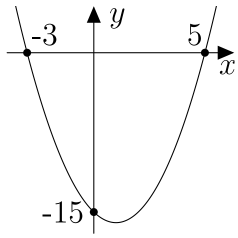
c) $f(x) = x(x-4)$ **d)** $f(x) = (x - 3 - \sqrt{2})(x - 3 + \sqrt{2})$

e) $f(x) = (x+3)(2x-5)$ **f)** $f(x) = 2(x-1)(x+100)$

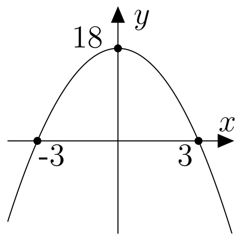
g) $f(x) = (3x-2)(3x-1)$ **h)** $f(x) = 2\left(x - \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right)$

i) $f(x) = 3x(x-9)$ **j)** $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

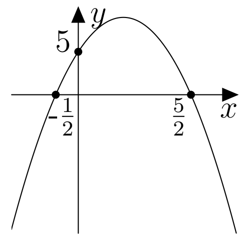
Exercice 2.20:



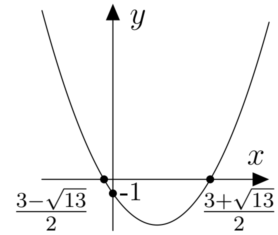
a)



b)



c)



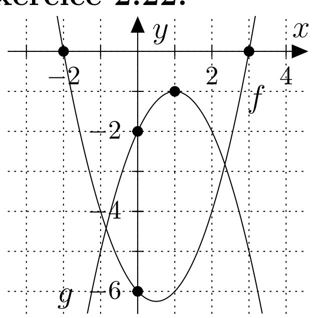
d)

Exercice 2.21:

a) $S = \left[0\,;9\right]$ **b)** $S = \left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right[\ \cup\ \left]5\,;+\infty\right[$

c) $S = \mathbb{R}$ **d)** $S = \left]-2-\sqrt{5}\,;-2+\sqrt{5}\right[$

Exercice 2.22:



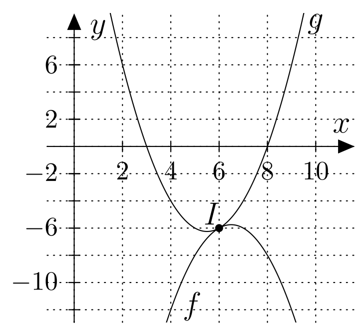
a) $S = \{-2\,;3\}$ **b)** $S = \varnothing$

c) $S = \left\{\dfrac{3 \pm \sqrt{41}}{4}\right\}$ **d)** $S = \left]-\infty\,;-2\right[\ \cup\ \left]3\,;+\infty\right[$

e) $S = \mathbb{R}$ **f)** $S = \left[\dfrac{3-\sqrt{41}}{4}\,;\dfrac{3+\sqrt{41}}{4}\right]$

Exercice 2.23:

Point d'intersection : $I(6\,;-6)$



Exercice 2.24:

$\Delta < 0 \quad\Longleftrightarrow\quad k \in \left]-3\,;5\right[$

Exercice 2.25:

$\Delta = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad m = \pm 4$

Exercice 2.26:

a) $I(-2\,;18)$ et $J(3\,;-2)$ **b)** $I(-2\,;2)$ et $J(3\,;12)$

Exercice 2.27:

L'équation $f(x) = g(x)$ admet bien une solution ($\Delta = 0$), $I(4\,;1)$

Exercice 2.28:

Pour $a_1 = 6$, Point de contact : $I(-3\,;-4)$
Pour $a_2 = -6$, Point de contact : $I(3\,;-4)$

Exercice 2.29:

- $f(x) = -\frac{1}{2}(x-4)(x-7)$ donc $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 14$
- $g(x) = -2x^2 - 2$
- $h(x) = \frac{1}{2}(x+4)^2 + 2$ donc $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 10$
- $i(x) = x(x-3)$ donc $i(x) = x^2 - 3x$
- $j(x) = -\frac{1}{3}(x+5)^2 - 3$ donc $j(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{34}{3}$

Exercice 2.30:

La fonction quadratique étant $f(x) = x^2 - 4x + 9$, on obtient 2 fonctions linéaires possibles :

$$g_1(x) = 2x \qquad \text{ou} \qquad g_2(x) = -10x$$

Exercice 2.31:

a) $S = \{\pm 2\,;\pm 3\}$ **b)** $S = \{\pm 1\}$ **c)** $S = \varnothing$ **d)** $S = \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$

Exercice 2.32:

a) $S = \left\{\pm\sqrt{2}\right\}$ **b)** $S = \{-3\,;0\,;3\}$

Exercice 2.33:

a) $S = \{6\}$ **b)** $S = \{5\,;7\}$ **c)** $S = \left\{-1\,;-\frac{3}{4}\right\}$

d) $S = \varnothing$ **e)** $S = \left\{-\frac{5}{4}\right\}$ **f)** $S = \{23\}$

Exercice 2.34:

La largeur est d'environ 14,64 cm.

Exercice 2.35:

La largeur du trottoir est de 2 m.

Exercice 2.36:

Les dimensions des premières dalles sont 20 cm × 20 cm.

Exercice 2.37:

La hauteur de la falaise est d'environ 70,27 m.

Exercice 2.38:

a) La longueur est de $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Il s'agit du *nombre d'or*. Connaissez-vous un peu son histoire ?

Et si vous alliez "faire un saut" sur Wikipedia ! ? !

`http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_d'or`

Exercice 2.39:

La longueur du trajet est soit de 16 km, soit d'environ 15,64 km.

A.3 Fonctions polynomiales

Exercice 3.1:

a) $(p+q)(x) = x^3 - x^2 + 2 \qquad c_2 = -1$

b) $(p-q)(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x + 2 \qquad c_2 = 3$

c) $(p \cdot q)(x) = x^5 - x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x \qquad c_2 = -5$

Exercice 3.2:

a) $c_3 = 5$ **b)** $c_4 = 1$

Exercice 3.3:

a) $(x-1)(x+1)(x+2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad S = \{1\,;-1\,;-2\}$

b) $2x(x-2)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad S = \{0\,;2\}$

c) $(x-3)(x-2)(x+2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad S = \{3\,;\pm 2\}$

d) $x(2x-3)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad S = \left\{0\,;\frac{3}{2}\right\}$

Exercice 3.4:

$3x(x-2)(x+2)(x+1)(x-1)$

Exercice 3.5:

a) $x^2(x-5)(3x+2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad S = \left\{0\,;5\,;-\frac{2}{3}\right\}$

b) $x^4(x-9)(x-1)^2(x+1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad S = \{0\,;9\,;1\,;-1\}$

c) $2x^2\left(x-(2-\sqrt{2})\right)\left(x-(2+\sqrt{2})\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad S = \left\{0\,;2 \pm \sqrt{2}\right\}$

d) $(x^2+4)(x^2+9) = 0 \quad \Longrightarrow \quad S = \varnothing$

Exercice 3.6:

a) $27x^3 + 189x^2 + 441x + 343$ **b)** $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

c) $x^3 - 8$

Exercice 3.7:

a) $(x-5)^3$ **b)** $(2x+3)^3$

c) $(5x-1)(25x^2+5x+1)$ **d)** $(4x+3)(16x^2-12x+9)$

e) $(x-2)^3$ **f)** Non factorisable à l'aide d'un produit remarquable!!

Exercice 3.8:

Ces trois figurent permettent de visualiser géométriquement les 3 produits remarquables suivants :

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

b) $\left.\begin{array}{l}\text{Figure 1 : } A^2 - B^2 \\ \text{Figure 2 : } (A+B)(A-B)\end{array}\right\} \Longrightarrow A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

c) $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

Exercice Défi : Quelle figure pourrait-on proposer pour visualiser :

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)\,?$$

Exercice 3.9:

a) $x^3 - 8x^2 + 16x - 5 = (x-5)\left(x^2 - 3x + 1\right)$

b) $x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 1 = \left(x^2 + 2x - 1\right)\left(x^3 - 3x^2 + 3x - 7\right) + (20x - 8)$

c) $5t^4 + 3t^3 - 1 = \left(t^2 - 1\right)\left(5t^2 + 3t + 5\right) + (3t + 4)$

d) $6x^5 + 5x^4 - 25x^3 + 31x^2 - 12x + 5 = \left(2x^2 - 3x + 2\right)\left(3x^3 + 7x^2 - 5x + 1\right) + (x + 3)$

e) $3x^4 - 7x^3 - 18x^2 + 28x + 24 = \left(3x^2 + 8x + 4\right)\left(x^2 - 5x + 6\right)$

f) $x^3 + x^2 + 5 = (2x - 3)\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{15}{8}\right) + \frac{85}{8}$

g) $-2x^3 - 3x + 1 = \left(3x^3 + x^2 - 1\right)\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}x^2 - 3x + \frac{1}{3}\right)$

Exercice 3.10:

$F(x) = 10x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 2$

Exercice 3.11:

Le reste de la division vaut bien zéro.

Exercice 3.12:

a) EF : $x^3 - 3x^2 + 1 = (x+1)\left(\ldots\ldots\right) \mathbf{- 3}$

b) $F(-1) = -3$. Le reste de la division par $(x+1)$ semble s'obtenir en évaluant le polynôme F en $x = -1$.

c) $F(2) = 3$ qui correspond à nouveau au reste de la division "effectuée à la main".

Exercice 3.13:

En posant $F(x) = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$, on obtient bien $F(1) = 0$.

Exercice 3.14:

Un corrigé pourra être vu ensemble à votre demande.

Exercice 3.15:

Le reste = -14

Exercice 3.16:

$$m = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 12x - 16}{x - 2} = x^3 - 2x^2 - 2x + 8$$

$$m = -6 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 18x - 36}{x - 2} = x^3 + 8x^2 + 18x + 18$$

Exercice 3.17:

$m = -418$ et $n = 732$

Exercice 3.18:

a) Par exemple $F(x) = x(x+1)(x-1)(x-4) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 4x$

b) Oui, une infinité, on peut proposer $F(x) = -\frac{1}{2}x^2(x+1)(1-x)(x-4)^3$

ou plus généralement : $F(x) = x(x+1)(x-1)(x-4) \cdot G(x)$

où $G(x)$ est un polynôme quelconque non nul.

Exercice 3.19:

$F(x) = 3x(x-2)(x+1)(x+2) = 3x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 12x$

Exercice 3.20:

$F(x) = -\frac{1}{5}x(x-1)(x+2) = -\frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x$

Exercice 3.21:

a) $(x-1)(x+3)(x+7)$ **b)** $(x+1)(x-2)(x+3)$

c) $(x-2)\left(x^2 - x + 1\right)$ **d)** $(x-1)^2(x-2)(x-3)$

Exercice 3.22:

a) $(x-1)(x-3)(x-5)$ **b)** $(x-1)(x-3)(x-4)$

Exercice 3.23:

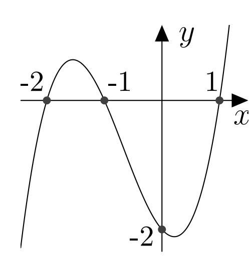
a) $S = \{-3\,;-4\,;4\}$ **b)** $S = \{1\,;3\,;5\}$ **c)** $S = \{3\,;-4\}$

d) $S = \{2\,;3\,;4\}$ **e)** $S = \{2\,;-3\}$ **f)** $S = \left\{-1\,;-\frac{1}{5}\,;-\frac{1}{7}\right\}$

Exercice 3.24:

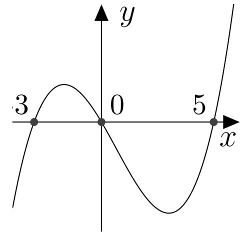
a)

		-2		-1		1	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$



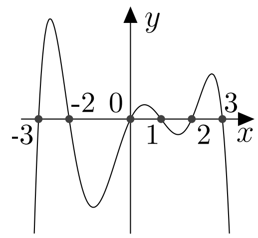
b)

		-3		0		5	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$



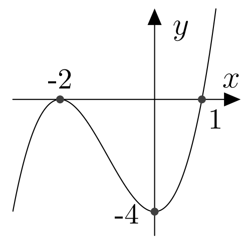
c)

		-3		-2		0		1		2		3	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$



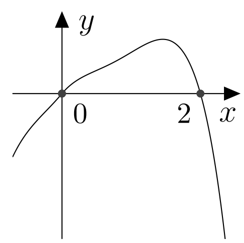
d)

		-2		1	
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$



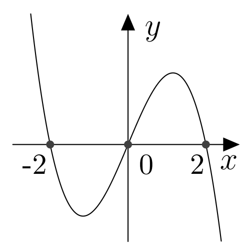
e)

		0		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$



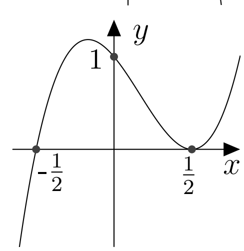
f)

		-2		0		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$



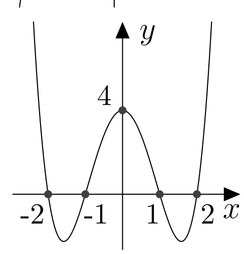
g)

		$-1/2$		$1/2$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$



h)

		-2		-1		1		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$



Exercice 3.25:

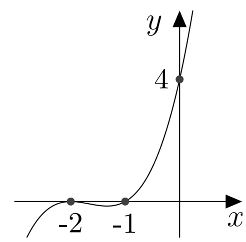
- À l'aide d'une division polynomiale de f par $x+3$ *(cf. esquisse)*, on obtient :

$$f(x) = (x+3)(x-2)(x+1)$$

- Il s'agit de la 1re esquisse. Proposer le tableau de signes pour vous en convaincre.

Exercice 3.26:

x		-2		-1	
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$



Exercice 3.27:

a) $f(x) = 2(x+2)(x+1)(x-1)$ donc $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$

b) $f(x) = 2(x-1)^2(x+1)^2$ donc $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$

Exercice 3.28:

a) $S = \left]-\infty\,;-2\right] \cup \left[-1\,;0\right] \cup \left[1\,;2\right]$

b) $S = \left[-1\,;+\infty\right[$

c) $S = \left]-3\,;1\right[\cup \left]1\,;2\right[$

Exercice 3.29:

Soit a un nombre réel quelconque. Vous avez probablement considéré $a = 1$. Non ?

a) $a(3x-1)(x-3) = 0$ donc $a\,(3x^2 - 10x + 3) = 0$

b) Deux solutions possibles :
$a(3x-1)^2(x-3) = 0$ donc $a\,(9x^3 - 33x^2 + 19x - 3) = 0$
$a(3x-1)(x-3)^2 = 0$ donc $a\,(3x^3 - 19x^2 + 33x - 9) = 0$

c) Plusieurs solutions possibles. Par exemple :
$a(3x-1)^2(x-3)^2 = 0$ donc $a\,(9x^4 - 60x^3 + 118x^2 - 60x + 9) = 0$
$a(3x-1)(x-3)(x^2+1) = 0$ donc $a\,(3x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 3) = 0$

d) $a\left(x - \left(3 - \sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(3 + \sqrt{2}\right)\right) = 0$ donc $a\,(x^2 - 6x + 7) = 0$

e) $a\,x\left(x - \left(2 - \sqrt{3}\right)\right)\left(x - \left(2 + \sqrt{3}\right)\right) = 0$ donc $a\,(x^3 - 4x^2 + x) = 0$

f) $a(x-1)(3x+2)(3x-2)(x+1) = 0$ donc $a\,(9x^4 - 13x^2 + 4) = 0$

g) Plusieurs solutions possibles. Par exemple :
$a(x^2+1)(x^2+1) = 0$ donc $a\,(x^4 + 2x^2 + 1) = 0$

h) Plusieurs solutions possibles. Par exemple :
$a(x^2-3)(x^2-2)(x^2+1)=0$ donc $a\left(x^6-4x^4+x^2+6\right)=0$

Exercice 3.30:

Il suffit de découper, dans chaque coin, un carré de côté $x=5$ cm ou $x=5\left(2-\sqrt{2}\right)$ cm.

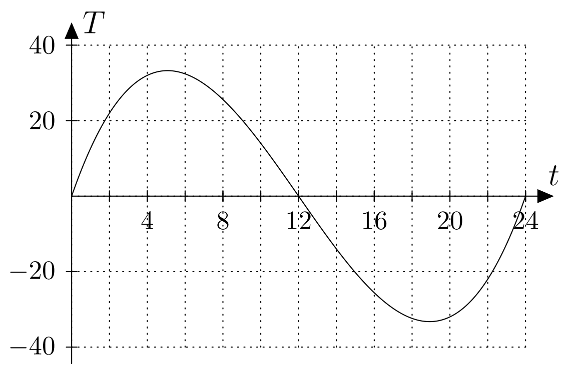
Exercice 3.31:

b) $x=4$ m

Exercice 3.32:

a) Pour $t\in\left]0\,;12\right[$

b)



c) À 10h00 et env. 12h12

Exercice 3.33:

a) Pour $t\in\left[0\,;5\right[$

b) Après 5 ans.

c) Pour $t\in\left]\sqrt{5}\,;4\right[$

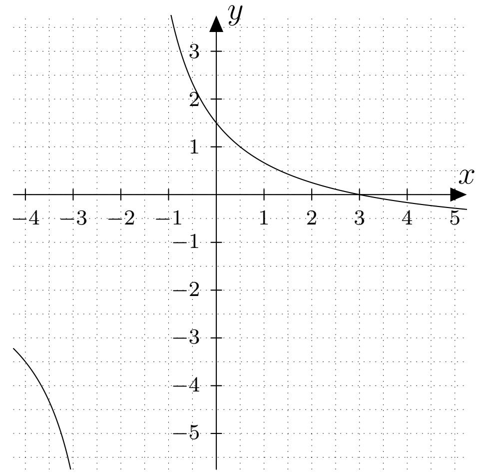
A.4 Fonctions rationnelles

Exercice 4.1:

a) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

b) + c)

x	$f(x)$
-4	$-3{,}5$
-3	-6
-2	$-$
-1	4
0	$1{,}5$
1	$0{,}67$
2	$0{,}25$
3	0
4	$-0{,}17$
5	$-0{,}29$



d)

x		-2		3	
$f(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

Exercice 4.2:

a) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{5}\right\}$ $\quad 2x+3$

b) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ $\quad \dfrac{100}{(x-2)(x^2+3)}$

c) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ $\quad \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+3)}$

d) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\quad \dfrac{-x^2+x-2}{2}$

e) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\,;\,\frac{2}{3}\right\}$ $\quad \dfrac{-(x+1)}{(2x+1)}$

f) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{0\,;5\,;\pm 4\}$ $\quad \dfrac{-(x+4)}{x(x-4)}$

Exercice 4.3:

a) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;-2\,;-3\,;-4\}$ $\quad \dfrac{1}{(x+1)(x+4)}$

b) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;5\}$ $\quad \dfrac{x+2}{x^2+1}$

c) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm 2\,;0\,;-\frac{2}{5}\right\}$ $\quad \dfrac{x}{(x^2+4)(5x+2)}$

d) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ $\quad x-1$

Exercice 4.4:

a) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;5\}$ $\quad \dfrac{3x-8}{(x-5)(x+2)}$

b) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\quad \dfrac{x}{(x+1)}$

c) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;3\}$ $\quad \dfrac{-5}{2(x+3)}$

d) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;2\}$ $\quad \dfrac{3}{(x-2)(x+1)}$

e) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\,;2\}$ $\quad \dfrac{2(x^2+1)}{(x-2)(x-1)(x+1)}$

f) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\,;-2\}$ $\quad \dfrac{2(2x-1)}{(x+2)(x-1)(x+1)}$

g) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ $\quad \dfrac{3x^2}{(x+1)(x-1)}$

h) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;1\,;-2\}$ $\quad \dfrac{x^2-8x-10}{(x+2)(x-1)(x+1)} = \dfrac{\left(x-4-\sqrt{26}\right)\left(x-4+\sqrt{26}\right)}{(x+2)(x-1)(x+1)}$

Exercice 4.5:

a) $\dfrac{x^2+2}{x+2}$ **b)** $\dfrac{x-3}{x+3}$ **c)** $\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$ **d)** $\dfrac{x+1}{x+2}$

e) 1 **f)** $\dfrac{x+3}{x}$ **g)** $\dfrac{x+1}{x-1}$ **h)** $\dfrac{x-3}{x(1-x)}$

Exercice 4.6:

a) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{2}{7}\right\}$ $\quad S = \left\{-\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{1}{4}\right\}$

b) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{0\,;1\}$ $\quad S = \left\{\dfrac{3}{7}\,;4\right\}$

c) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{0\,;-5\}$ $\quad S = \{-3\,;10\}$

d) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{0\,;3\}$ $\quad S = \{2\}$

e) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad S = \{6\}$

f) $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\,;1\right\}$ $\quad S = \left\{\dfrac{21 \pm \sqrt{73}}{23}\right\}$

Exercice 4.7:

a) $\dfrac{(x+2)(x-2)}{x(x-1)} \geqslant 0$ $\quad S = \left]-\infty\,;-2\right] \cup \left]0\,;1\right[\cup \left[2\,;+\infty\right[$

b) $\dfrac{x(2x-3)^2}{(x+2)(x-2)} < 0$ $\quad S = \left]-\infty\,;-2\right[\cup \left]0\,;\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}\,;2\right[$

c) $\dfrac{(x-3)}{(x-1)(x-2)} > 0$ $\quad S = \left]1\,;2\right[\cup \left]3\,;+\infty\right[$

d) $\dfrac{(3x+5)(x-4)}{(x+6)(x-2)} \leqslant 0$ $\quad S = \left]-6\,;-\frac{5}{3}\right] \cup \left]2\,;4\right]$

Exercice 4.8:

a) $\dfrac{4x}{(x-1)(x+1)} \leqslant 0$ $\quad S = \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left[0\,;1\right[$

b) $\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)(x-1)} > 0$ $\quad S = \left]-\infty\,;-2\right[\cup \left]-2\,;-1\right[\cup \left]1\,;+\infty\right[$

c) $\dfrac{\left(x+3+\sqrt{2}\right)\left(x+3-\sqrt{2}\right)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \leqslant 0$ $\quad S = \left]-\infty\,;-3-\sqrt{2}\right] \cup \left]-3\,;-2\right[\cup \left[-3+\sqrt{2}\,;-1\right[$

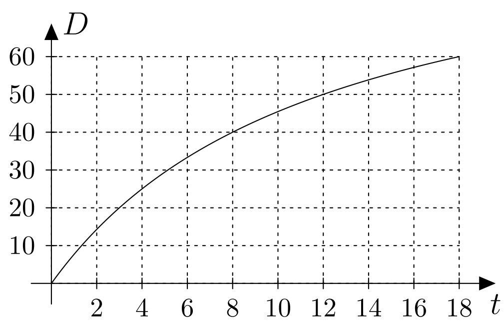
d) $\dfrac{(x+1)(x^2-2x+2)}{x^2} \geqslant 0$ $\quad S = \left[-1\,;0\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[$

e) $\dfrac{-18(x^2+3)}{(x-4)(2x+1)} \geqslant 0$ $\quad S = \left]-\frac{1}{2}\,;4\right[$

f) $\dfrac{-7(3x^2+1)}{(x-2)(3x+1)} \leqslant 0$ $\quad S = \left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right[\cup \left]2\,;+\infty\right[$

Exercice 4.9:

a)



b) $t = 8$ ans

c) Pour $t \in \left]12\,;18\right[$

Exercice 4.10:

a) $x_1 = 1$ km ou $x_2 = 17$ km

b) pour $x \in \left]\frac{7}{2}\,;7\right[$

A.5 Trigonométrie

Exercice 5.1:

	a	b	c	α	β	$\mathcal{A}$
a)	$c \cdot \cos(\beta)$	$c \cdot \sin(\beta)$		$90° - \beta$		$\frac{1}{2}c^2 \sin(\beta)\cos(\beta)$
b)		$\sqrt{c^2 - a^2}$		$\sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)$	$\cos^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)$	$\dfrac{1}{2}a\sqrt{c^2 - a^2}$
c)		$\dfrac{a}{\tan(\alpha)}$	$\dfrac{a}{\sin(\alpha)}$		$90° - \alpha$	$\dfrac{a^2}{2\tan(\alpha)}$
d)			$\sqrt{a^2 + b^2}$	$\tan^{-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)$	$\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$	$\dfrac{a \cdot b}{2}$
e)	$\dfrac{2\mathcal{A}}{b}$		$\dfrac{\sqrt{4\mathcal{A}^2 + b^4}}{b}$	$\tan^{-1}\left(\dfrac{2\mathcal{A}}{b^2}\right)$	$\tan^{-1}\left(\dfrac{b^2}{2\mathcal{A}}\right)$	
f)	$\sqrt{2\mathcal{A}\tan(\alpha)}$	$\sqrt{\dfrac{2\mathcal{A}}{\tan(\alpha)}}$	$\sqrt{\dfrac{2\mathcal{A}(\tan^2(\alpha)+1)}{\tan(\alpha)}}$		$90° - \alpha$	

Applications numériques

	a	b	c	α	β	$\mathcal{A}$
a)	1,65	3,92		22,80°		3,23
b)		18,49		35,71°	54,29°	122,86
c)		3,74	6,12		37,63°	9,07
d)			50,60	25,15°	64,85°	492,35
e)	49,98		63,71	51,68°	38,32°	
f)	4,10	4,97	6,45		50,50°	

Exercice 5.2:

	a	$b = c$	α	$\beta = \gamma$	$\mathcal{A}$
a)		$\dfrac{a}{2\sin(\alpha/2)}$		$90° - \alpha/2$	$\dfrac{a^2}{4\tan(\alpha/2)}$
b)		$\dfrac{a}{2\cos(\beta)}$	$180° - 2\beta$		$\dfrac{a^2\tan(\beta)}{4}$

Applications numériques

	a	$b = c$	α	$\beta = \gamma$	$\mathcal{A}$
a)		32,56		68,75°	358,06
b)		9,28	67,40°		39,77

Exercice 5.3:

$$\boxed{h = L \cdot \tan(\alpha)} \qquad \Longrightarrow \qquad h \cong 29{,}96\ m$$

Exercice 5.4:

- cercle inscrit : $\boxed{r_i = \dfrac{a}{2} \cdot \tan\left(\dfrac{180° - \alpha}{4}\right)} \qquad \Longrightarrow \qquad r_i \cong 3{,}63 \text{ cm}$
- cercle circonscrit : $\boxed{r_c = \dfrac{a}{4 \cdot \sin(\alpha/2) \cdot \cos(\alpha/2)}}$ ou $\boxed{r_c = \dfrac{a}{2 \cdot \sin(\alpha)}} \quad \Longrightarrow \quad r_c \cong 8{,}51 \text{ cm}$

Exercice 5.5:

- rayon : $\boxed{r = \dfrac{L}{2 \cdot \sin\left(\frac{360° - \alpha}{2}\right)}} \qquad \Longrightarrow \qquad r \cong 6{,}39 \text{ m}$
- hauteur : $\boxed{h = \dfrac{L}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{\tan\left(\frac{360° - \alpha}{2}\right)} + \dfrac{1}{\sin\left(\frac{360° - \alpha}{2}\right)}\right)} \qquad \Longrightarrow \qquad h \cong 8{,}57 \text{ m}$

Exercice 5.6:

- En posant h et x les 2 inconnues cherchées, vous obtiendrez le système :

$$\begin{cases} \dfrac{h}{x} = \tan(41{,}20°) \\ \dfrac{h}{x + 25} = \tan(22{,}10°) \end{cases}$$

Dont les solutions sont :

$$x = \frac{25 \cdot \tan(22{,}10°)}{\tan(41{,}20°) - \tan(22{,}10°)} \cong 21{,}63 \text{ m} \qquad h = \frac{25 \cdot \tan(22{,}10°) \cdot \tan(41{,}20°)}{\tan(41{,}20°) - \tan(22{,}10°)} \cong 18{,}93 \text{ m}$$

- Littéralement, on obtient les formules générales suivantes :

$$\boxed{x = d \cdot \frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}} \qquad \boxed{h = d \cdot \frac{\tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}}$$

Exercice 5.7:

Cet exercice est un clone de l'exercice précédent. Vous obtiendrez :

$$h = 62 \cdot \frac{\tan(23{,}5°) \cdot \tan(52°)}{\tan(52°) - \tan(23{,}5°)} \cong 40{,}83 \text{ m}$$

Exercice 5.8:

$$r = \frac{252 \cdot \sin(89{,}49°)}{1 - \sin(89{,}49°)} \cong 6'360'937{,}23 \text{ m}$$

Exercice 5.9:

a) 30° **b)** 120° **c)** 18° **d)** 720° **e)** $-150°$
f) 675° **g)** 57,30° **h)** 40,11° **i)** -114,59° **j)** 171,89°

Exercice 5.10:

a) $\frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{\pi}{3}$ **c)** $\frac{5\pi}{12}$ **d)** $-\frac{\pi}{6}$ **e)** $\frac{2\pi}{3}$
f) $\frac{7\pi}{4}$ **g)** 0,40 **h)** -1,88 **i)** 5,10 **j)** 2,66

Exercice 5.11:

Erreur absolue : $2{,}464 \cdot 10^{12}$ km Erreur relative : 2,33%

Exercice 5.12:

a) 8,59 cm **b)** 22,28 m ; 25,13 m^2 **c)** 100,27° ; 1,75 rad
d) Il s'agit de résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues.Vous obtiendrez :

rayon = 2,50 m angle = 1,60 rad

e) La 2ᵉ.

Exercice 5.13:

a) 4/5 **b)** 96π **c)** 5760π **d)** 288

Exercice 5.14:

Pas de corrigé proposé

Exercice 5.15:

Ces affirmations se justifient en les visualisant sur un cercle trigonométrique.

Exercice 5.16:

a) Vrai **b)** Vrai **c)** Vrai **d)** Faux **e)** Faux **f)** Vrai

Exercice 5.17:

a) IV **b)** III **c)** III **d)** II

Exercice 5.18:

Pourra être vu ensemble, à votre demande…

Exercice 5.19:

	α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
a)	$120°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
b)	$-\pi/3$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
c)	$945°$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
d)	$-5\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
e)	$270°$	-1	0	non défini
f)	6π	0	1	0

Vous ressentez le besoin de vous entraîner ? `www.javmath.ch`

Exercice 5.20:

a) $\alpha + k \cdot 2\pi$ mais aussi $(\pi - \alpha) + k \cdot 2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

b) $\alpha + k \cdot 2\pi$ mais aussi $-\alpha + k \cdot 2\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

c) $\alpha + k \cdot \pi$ $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 5.21:

a) $\alpha_1 = 19{,}47°$ et $\alpha_2 = 160{,}53°$

b) $\alpha_1 = 60°$ et $\alpha_2 = 300°$

c) $\alpha_1 = 116{,}57°$ et $\alpha_2 = 296{,}57°$

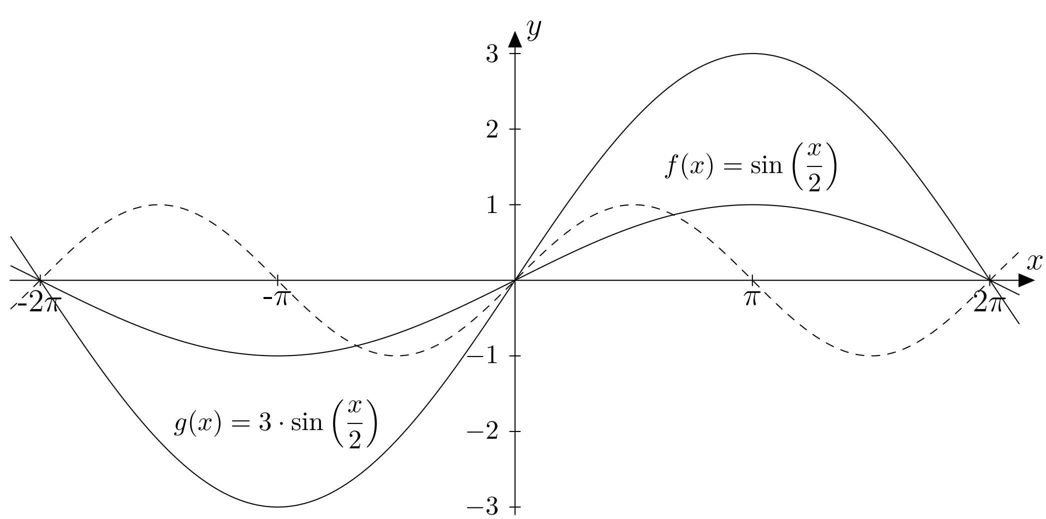
d) $\alpha_1 = 154{,}16°$ et $\alpha_2 = 205{,}84°$

e) $\alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = 180°$ et $\alpha_3 = 360°$

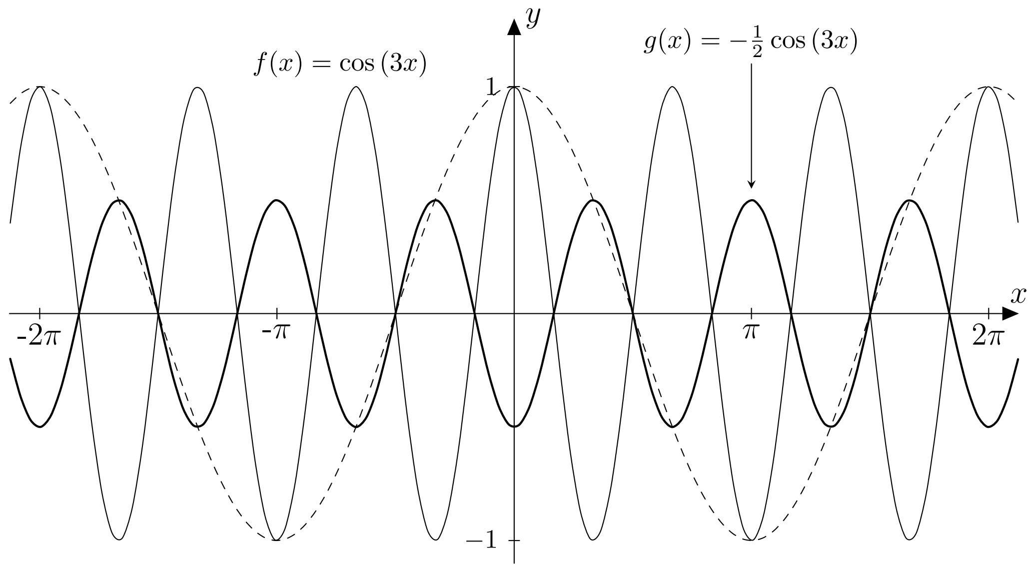
f) aucun

Exercice 5.22:

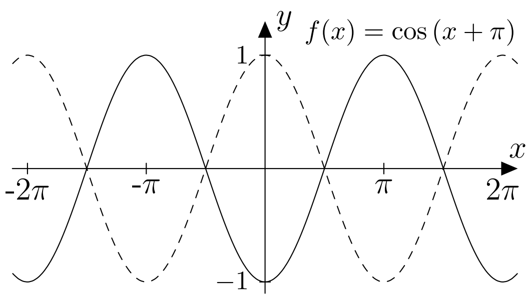
a)



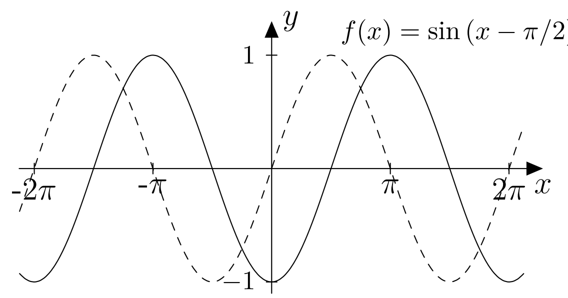
b)



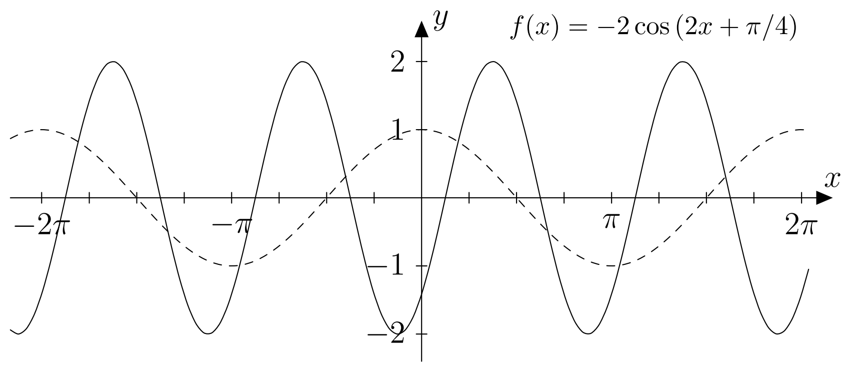
c)



d)



e)



Exercice 5.23:

Pourra être vu ensemble, à votre demande…

Exercice 5.24:

Pourra être vu ensemble, à votre demande…

Exercice 5.25:

a) $\boxed{\alpha = 180° - \beta - \gamma} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \cong 32{,}28°$

$\boxed{b = \dfrac{a\sin(\beta)}{\sin(180° - \beta - \gamma)}} \quad \Longrightarrow \quad b \cong 134{,}26$

$\boxed{c = \dfrac{a\sin(\gamma)}{\sin(180° - \beta - \gamma)}} \quad \Longrightarrow \quad c \cong 66{,}62$

$\boxed{\mathcal{A} = \dfrac{a^2\sin(\beta)\sin(\gamma)}{2\sin(180° - \beta - \gamma)}} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A} \cong 2388{,}55$

b) $\boxed{\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right)} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \cong 22{,}99°$

$\boxed{\beta = \cos^{-1}\left(\dfrac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}\right)} \quad \Longrightarrow \quad \beta \cong 64{,}52°$

$\boxed{\gamma = \cos^{-1}\left(\dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right)} \quad \Longrightarrow \quad \gamma \cong 92{,}48°$

$\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin\left(\cos^{-1}\left(\dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}\right)\right)} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A} \cong 2030{,}50$

c) $\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)}} \quad \Longrightarrow \quad c \cong 41{,}92$

$\boxed{\alpha = \sin^{-1}\left(\dfrac{a\cdot\sin(\gamma)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)}}\right)} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \cong 58{,}79°$

$\boxed{\beta = 180° - \gamma - \sin^{-1}\left(\dfrac{a\cdot\sin(\gamma)}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)}}\right)} \quad \Longrightarrow \quad \beta \cong 90{,}52°$

$\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A} \cong 1472$

Dans ce dernier exercice, certains parmi vous ont dû obtenir $\beta \cong 89{,}48°$.
Il semblerait que le théorème du sinus peut nous réserver des "mauvaises surprises" !
Nous en reparlerons...

Exercice 5.26:

- $\boxed{\gamma = 180° - \alpha - \beta} \quad \Longrightarrow \quad \gamma \cong 36{,}98°$

- $\boxed{b = \sqrt{\dfrac{2\,\mathcal{A}\cdot\sin(\beta)}{\sin(\alpha)\cdot\sin(180° - \alpha - \beta)}}} \quad \Longrightarrow \quad b \cong 7{,}17$

- $\boxed{a = \sqrt{\dfrac{2\,\mathcal{A}\cdot\sin(\alpha)}{\sin(\beta)\cdot\sin(180° - \alpha - \beta)}}} \quad \Longrightarrow \quad a \cong 5{,}81$

- $\boxed{c = \sqrt{\dfrac{2\,\mathcal{A}\cdot\sin(180° - \alpha - \beta)}{\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}}} \qquad \Longrightarrow \qquad c \cong 4{,}31$

Exercice 5.27:

Pourra être vu ensemble, à votre demande…

Exercice 5.28:

$AC = 10\sqrt{7} \cong 26{,}46$ cm $\qquad BD = 10\sqrt{19} \cong 43{,}59$ cm $\qquad \theta \cong 64{,}31°$

Exercice 5.29:

$AB \cong 529{,}11$ m

Exercice 5.30:

$\angle IAJ \cong 33{,}56°$ $\qquad \angle AIJ = \angle AJI \cong 73{,}22°$

Exercice 5.31:

$A'\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\,;\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \qquad B'\left(\dfrac{5\sqrt{3}-1}{2}\,;\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$

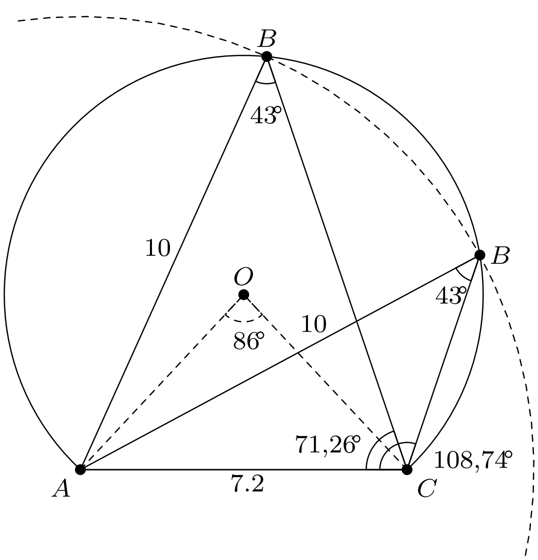
Exercice 5.32:

a) $AC = \sqrt{BA^2 + BC^2 - 2\cdot BA\cdot BC\cdot\cos(\beta)} \cong 7{,}20$ cm

b) $\gamma = \sin^{-1}\left(\dfrac{AB\cdot\sin(\beta)}{AC}\right) \cong 71{,}26°$

c) $\gamma = \cos^{-1}\left(\dfrac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2\cdot CA\cdot CB}\right) \cong 108{,}74°$

d) Sera vu ensemble. Mais si vous commenciez par étudier cette figure…



Exercice 5.33:

Pourra être vu ensemble, à votre demande…

Index

Si vous souhaitez commander ou utiliser ce polycopié dans vos classes, merci de prendre contact avec son auteur en passant par son site web :

`http://www.javmath.ch`