Thème 1 AM: Équations polynomiales et division de polynômes

1.1 Valeur numérique d'un polynôme

Définition : On appelle **valeur numérique d'un polynôme *p*(*x*)** la valeur que l'on obtient en remplaçant x par *un nombre* dans ce polynôme.

Par exemple, si $p(x) = x^2 + 1$, alors $p(-3) = 10$

Modèle 1 : Soit le polynôme $p(x) = -2x^2 + 7x - 5$. Calculer $p(1)$ et $p(-2)$.

valeur numérique d'un polynôme:

Définition : On appelle **zéro d'un polynôme *p*(*x*)** toute valeur a pour laquelle la valeur numérique du polynôme est nulle, c'est-à-dire $p(a) = 0$.

Exercice 1.1:

a) Soit le polynôme $p(x) = 2x^2 + 3x - 5$. Calculer $p(-1)$ et $p(2)$.

b) Soit le polynôme $p(x) = 3x^3 - 4x^2 - 3x + 4$.
Calculer $p(-1)$, $p(1)$ et $p(2)$.

c) Soit le polynôme $p(x) = -2x^2 - 3x + 1$.
Calculer $p(0)$, $p(1/2)$ et $p(-1/3)$.

Exercice 1.2:

a) Soit le polynôme $p(x) = 2x^3 + 7x^2 - 7x - 30$.
Montrer que $x = 2$, $x = -5/2$ et $x = -3$ sont des zéros de $p(x)$.

b) Soit le polynôme $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 5$.
Montrer que $x = 1$, $x = -1$ et $x = 5/2$ sont des zéros de $p(x)$.

1.2 Divisions de polynômes

Démarche 1 : *Pour diviser un polynôme par un monôme, on divise chacun des termes du polynôme par le monôme et on fait la somme algébrique des quotients partiels ainsi obtenus.*

Modèle 2 : Effectuer la division de $p(x) = 4x^4 + 9x^3 + 6x^2$ par $d(x) = 2x^2$.

Exercice 1.3: Effectuer les divisions de $p(x)$ par $d(x)$ dans les cas suivants :

a) $p(x) = 12x^4 - 9x^3 + 36x^2$ $\quad d(x) = 3x^2$

b) $p(x) = 25x^5 + 12x^4 - x^2$ $\quad d(x) = 5x$

c) $p(x) = 4x^5 - 7x^4 + x^3 - 2x^2$ $\quad d(x) = 2x^3$

Démarche 2 : *Pour diviser un polynôme par un diviseur qui est également un polynôme, on les ordonne par rapport à la même lettre, on divise alors le premier terme du polynôme par le premier terme du diviseur pour obtenir le premier terme du quotient. On multiplie alors* *<u>tout</u>* *le diviseur par ce premier terme du quotient et on soustrait du polynôme le produit obtenu. On recommence ainsi le procédé jusqu'à ce que l'on ne puisse plus trouver de quotient partiel (sous la forme d'un monôme).*

Modèle 3 : Effectuer la division de :

$$p(x) = 3x^3 - 11x^2 + 19x - 12 \text{ par } d(x) = x - 3$$

Exercice 1.4:

a) Trouver le quotient et le reste de la division des polynômes

$$p(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 8 \text{ par } d(x) = x^2 - 6x + 8 .$$

b) Trouver le quotient et le reste de la division des polynômes

$$p(x) = 6x^4 + 3x^3 - 6x - 24 \text{ par } d(x) = 2x^2 + x + 4 .$$

Exercice 1.5: Déterminer le polynôme $p(x)$ tel que le quotient de sa division par $2x^2 + 1$ soit $5x^2 - 3x + 1$ et le reste de $1 - x$

Modèle 4 : Effectuer la division de :

égalité fondamentale:

$$p(x) = 6x^4 - 4x^3 + 24x - 8 \quad \text{par} \quad d(x) = 2x^2 + 8$$

Puis en déduire l'égalité fondamentale

Exercice 1.6: Effectuer les divisions ci-dessous puis écrire les égalités fondamentales :

a) $\left(5x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 6\right) \div \left(x^2 - 3x - 2\right)$

b) $\left(4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 4x + 7\right) \div \left(2x^2 + 3x - 2\right)$

c) $\left(6x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 34x^2 - 21x + 8\right) \div \left(2x^3 - 5x + 8\right)$

d) $\left(x^4 + 4x^2 - 12\right) \div \left(x^2 - 3\right)$

e) $\left(2x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 16x + 8\right) \div (2x - 4)$

f) $\left(x^3 + 27\right) \div (x + 3)$

1.3 Cas particulier de la division par $(x - a)$ où a est un nombre

Division par (x – a) Lorsque l'on divise un polynôme $p(x)$ par un polynôme de la forme $d(x) = x - a$, l'égalité fondamentale s'écrit

$p(x) = q(x) \cdot (x - a) + r(x)$ où $r(x)$ est un nombre que l'on note r

"***Truc***" ***du reste :***

- Le reste de la division du polynôme $p(x)$ par $(x - a)$ s'obtient en remplaçant x par a dans le polynôme $p(x)$

$$\boxed{r = p(a)}$$

Modèle 5 : Sans effectuer la division, déterminer le reste de la division de

$$p(x) = x^3 - x^2 - 4 \text{ par } d(x) = x - 2$$

truc du reste:

Modèle 6 : Sans effectuer la division, déterminer le reste de la division de

$$p(x) = x^3 - x - 3 \text{ par } d(x) = x + 1$$

truc du reste:

Exercice 1.7: **a)** On considère les 2 polynômes suivants:

$$p(x) = 4x^3 - 10x^2 + 11x - 5 \quad \text{et} \quad d(x) = x - 1$$

1) Calculer le reste de la division de $p(x)$ par $d(x)$ à l'aide du truc du reste.
2) Effectuer concrètement la division et comparer les restes obtenus.
3) Écrire l'égalité fondamentale.
4) Le truc du reste est-il vraiment si mystérieux ?

b) Confirmer vos observations avec les 2 polynômes suivants:

$$p(x) = 9x^4 + x^3 - x^2 + x + 2 \quad \text{et} \quad d(x) = x + 2$$

Définition : Le polynôme $p(x)$ est **divisible** par un polynôme $q(x)$ si le reste de la division vaut zéro.

Ainsi : Le polynôme $p(x)$ est divisible par $(x - a)$ lorsque :

$$r = p(a) = 0$$

Modèle 7 : Le polynôme $p(x) = x^3 - 8$ est-il divisible par $d(x) = x - 2$?

divisibilité:

Exercice 1.8: Sans effectuer la division, examiner si $p(x)$ est divisible par $d(x)$:

a) $p(x) = 5x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 4x - 4$ $\quad d(x) = x + 2$

b) $p(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7x + 4$ $\quad d(x) = x - 2$

c) $p(x) = 4x^3 - x^2 - 2x + 1$ $\quad d(x) = x + 1/2$

d) $p(x) = 2x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 16x + 8$ $\quad d(x) = x - 2$

1.4 La division de polynômes pour résoudre des équations de degré > 2

Modèle 8 : Résoudre l'équation $2x^4 + 2x^3 - 68x^2 - 8x + 240 = 0$ sachant qu'elle admet déjà les solutions $x = 2$ et $x = 5$

équations de degré > 2:

Exercice 1.9: **a)** Résoudre l'équation $2x^4 - 3x^3 - 35x^2 - 9x + 45 = 0$ sachant qu'elle admet les solutions $x = 5$ et $x = -3$

b) Résoudre l'équation $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ sachant qu'elle admet la solution $x = 1$

c) Factoriser le polynôme $p(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$, sachant que $p(1) = 0$ et $p(-1) = 0$

d) Factoriser le polynôme $p(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$, sachant que $p(2) = 0$ et $p(-3) = 0$

Modèle 9 : Résoudre l'équation $x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$

équations de degré > 2:

Exercice 1.10: Résoudre les équations suivantes :

a) $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$ **b)** $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

c) $x^3 + 3x^2 = 4$ **d)** $x^3 - x^2 = -2x + 24$

Exercice 1.11: Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^4 - 17x^3 + 19x^2 + 14x = 0$

b) $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 0$

1.5 La factorisation pour résoudre des équations du 2ème degré

Introduction : Cette démarche de factorisation des trinômes a déjà été initiée en 1ère année. Il est temps maintenant de consolider ces acquis en mettant la priorité sur:
la vitesse – l'exactitude – l'aisance – …

C'est dans cet esprit qu'il faut considérer les execices de ce paragraphe comme des exercice de drill.

1.5.1 La factorisation par produit remarquable

Exemple : Factoriser les polynômes suivants:

a) $-x^2 + 4$ **b)** $x^2 + 10x + 25$ **c)** $9x^2 - 24x + 16$

Exercice 1.12: Factoriser les polynômes suivants:

a) $9x^2 - 4$ **b)** $x^2 + 16x + 64$
c) $2x^2 - 8x + 8$ **d)** $-x^2 + 36$
e) $49 - x^2$ **f)** $25x^2 + 30x + 9$
g) $x^2 - 12x + 36$ **h)** $x^2 - 121$
i) $4x^2 - 4x + 1$ **j)** $x^2 + 2x + 1$

1.5.2 La factorisation du trinôme unitaire du type $x^2 + bx + c$

Exemple : Factoriser:

a) $x^2 + 3x - 10$ **b)** $x^2 - 23x + 126$

Exercice 1.13: Factoriser les trinômes unitaires suivants:

a) $x^2 + 7x - 18$ **b)** $x^2 + x - 6$
c) $x^2 + 3x - 18$ **d)** $x^2 + 3x - 54$
e) $x^2 - 17x - 18$ **f)** $x^2 - 8x + 7$
g) $x^2 - 10x + 24$ **h)** $x^2 - 4x - 45$
i) $x^2 - 7x + 12$ **j)** $x^2 - 10x + 9$

Exercice 1.14: Factoriser les trinômes unitaires suivants:

a) $x^2 + 9x + 14$ **b)** $x^2 - 3x - 18$
c) $x^2 + 3x - 28$ **d)** $x^2 + 5x - 24$
e) $x^2 - 10x + 21$ **f)** $x^2 - 9x + 18$
g) $x^2 + x - 12$ **h)** $x^2 + 4x - 21$
i) $x^2 - 7x - 8$ **j)** $x^2 + 15x + 56$

1.5.2 La factorisation du trinôme non unitaire du type $ax^2 + bx + c$

Exemple : Factoriser:

a) $3x^2 - x - 10$ **b)** $-6x^2 + 5x + 21$

Exercice 1.15: Factoriser les trinômes suivants:

a) $3x^2 - 26x - 9$ **b)** $12x^2 - 35x + 18$
c) $3x^2 + 14x + 15$ **d)** $-3x^2 - 20x + 7$
e) $4x^2 - 13x + 10$ **f)** $-3x^2 + 17x + 6$
g) $6x^2 + 7x + 2$ **h)** $3x^2 - 14x + 8$
i) $2x^2 + 5x - 12$ **j)** $-2x^2 + 7x - 5$

Exercice 1.16: Factoriser les trinômes suivants:

a) $4x^2 - 16x + 15$ **b)** $5x^2 + 26x - 63$
c) $-3x^2 + x + 14$ **d)** $-6x^2 - 7x + 24$
e) $6x^2 - 17x - 45$ **f)** $3x^2 - x - 10$
g) $-4x^2 + 29x + 24$ **h)** $-3x^2 + 24x - 45$
i) $4x^2 - 3x - 27$ **j)** $-3x^2 + x + 30$

1.5.2 Un petit mélange de tout…

Exemple : Factoriser:

a) $16x^2 + 48x + 32$ **b)** $16x^2 + 40x + 9$ **c)** $16x^2 + 24x + 9$

Exercice 1.17: Factoriser les trinômes suivants:

a) $x^2 - 6x + 8$
b) $x^2 - 10x + 25$
c) $x^2 + 5x - 14$
d) $10x^2 - 28x + 16$
e) $x^2 - 4x - 45$
f) $2x^2 - 28x + 98$
g) $x^2 + 2x - 3$
h) $4x^2 + 8x + 3$
i) $-x^2 + 100$
j) $-6x^2 + 29x - 35$

Exercice 1.18: Factoriser les trinômes suivants:

a) $x^2 - 64$
b) $3x^2 - 25x + 8$
c) $x^2 - 3x + 2$
d) $x^2 - 25$
e) $-12x^2 + 25x + 7$
f) $x^2 + 9x + 18$
g) $-8x^2 - 14x + 15$
h) $4x^2 - 20x + 25$
i) $6x^2 - 23x - 18$
j) $-121x^2 + 1$

1.6 La factorisation pour résoudre des équations du 2ème degré

Exemple : Résoudre les équations suivantes:

a) $x^2 + 3x - 18 = 0$ **b)** $3x^2 = x + 10$

Exercice 1.19: Résoudre les équations suivantes:

a) $x^2 - x - 2 = 0$ **b)** $-12x^2 - x + 6 = 0$
c) $3x^2 - 24x + 36 = 0$ **d)** $2x^2 - 20x + 42 = 0$
e) $2x^2 - 16x + 24 = 0$ **f)** $x^2 = 9$
g) $x^2 - 10x + 24 = 0$ **h)** $5x^2 - 37x + 14 = 0$
i) $x^2 + 6x - 27 = 0$ **j)** $-3x^2 = -x - 140$

Exercice 1.20: Résoudre les équations suivantes:

a) $x^2 - 17x + 70 = 0$ **b)** $6x^2 - 37x + 56 = 0$
c) $12x^2 - 27x + 6 = 0$ **d)** $10x^2 - 5x - 50 = 0$
e) $x^2 + 3x - 18 = 0$ **f)** $3x^2 + 24x + 48 = 0$
g) $x^2 - 3x - 4 = 0$ **h)** $2x^2 - 12x + 16 = 0$
i) $12x^2 - 52x + 56 = 0$ **j)** $x^2 + 5x - 7 = -x^2$