Thème 10: Croissance exponentielle, intérêts composés

10.1 Activités d'introduction

Objectifs du thème: Dans ce thème, nous allons étudier des phénomènes avec **un taux de variation constant**. Ces phénomènes se décrivent à l'aide de fonctions exponentielles, fonctions que nous allons définir et étudier un peu.

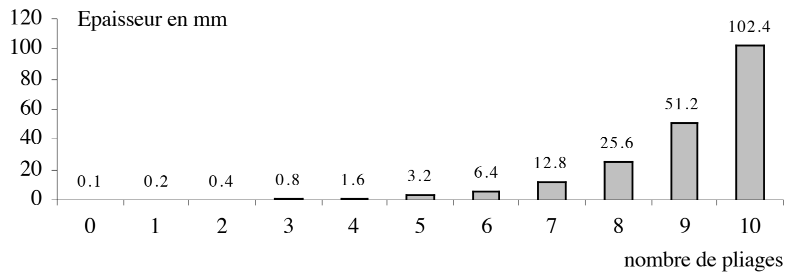
Nous appliquerons ce modèle de croissance aux intérêts composés.

Activité 1 : On plie une feuille de papier de 0,1 mm d'épaisseur en deux, puis en quatre, puis en huit, et ainsi de suite soixante fois. Serait-il possible d'atteindre une épaisseur qui dépasse :

2 m ,   20 m ,   1 km ,   la distance Terre-Soleil ?

Réponse : *D'une part, l'extrême minceur, 0,1 mm, fait douter d'arriver à dépasser des grandeurs comme 20 m, 1 km, et encore plus la distance Terre-Soleil; en doublant quelque chose de très petit, on obtient certainement quelque chose de très petit ! Mais, en le doublant un grand nombre de fois on finit par dépasser n'importe quel nombre.*

Pour se faire une idée, calculons les épaisseurs obtenues après les premiers pliages.



On y observe qu'après 10 pliages l'épaisseur est de l'ordre de 10 cm, ce qui n'est pas encore très grand. Après 15 pliages, l'épaisseur est de l'ordre de 3,2 m, ce qui est déjà plus surprenant. Après 20 pliages, elle est de l'ordre de 100 m et enfin après 60 pliages, elle vaut $0{,}1 \cdot 2^{60}$ *mm.*
D'après la calculatrice,

$$0{,}1 \cdot 2^{60} = 1{,}152922 \cdot 10^{17}$$

C'est un nombre de millimètres. Comme 1 km = 10^6 *mm, cela fait quand même*

115'292'200'000 km.

Pour comparaison, la distance de la Terre au Soleil vaut

149'597'910 km

Exercice 10.1: **a)** Sur un même système d'axes, effectuer le graphique des 2 fonctions f et g pour $x \in [-5 ; 5]$.

$$f : x \longmapsto x^2$$
$$g : x \longmapsto 2^x$$

b) Laquelle des 2 fonctions croît le plus rapidement ?

c) À l'aide du graphique, résoudre ces 6 équations:

(1) $x^2 = 16$	**(2)** $2^x = 16$
(3) $x^2 = 20$	**(4)** $2^x = 20$
(5) $x^2 = 1$	**(6)** $2^x = 1$

d) On entend parfois dire que *"l'évolution technologique se ferait de façon exponentielle"*. Que signifie au fond cette phrase ?

e) Sur un même système d'axes, effectuer le graphique des 2 fonctions f et g pour $x \in [-5 ; 5]$.

$$f : x \longmapsto 2^x$$
$$g : x \longmapsto 0{,}5^x$$

f) Comparer les deux courbes.

Activité 2 : Il arrive qu'on reçoive dans sa boîte aux lettres un message libellé comme suit: « *Quand vous recevrez cette lettre, envoyez-moi 10 frs. puis recopiez la lettre dix fois et envoyez-la à dix de vos connaissances. Ainsi, vous recevrez 100 frs. après avoir donné seulement 10 frs. Merci de ne pas interrompre cette chaîne* ». Que penser d'une telle pratique ??

Réponse : *Supposons que tout le monde joue le jeu. Au premier coup, 10 lettres sont envoyées, au deuxième, $10^2 = 100$, au troisième $10^3 = 1000$, …*
Ainsi, après seulement 10 coups, le nombre de lettres écrites à cette étape (et de personnes ainsi engagées) atteint

$$10^{10} = 10'000'000'000$$

ce qui est plus que la population mondiale ! C'est donc l'impasse. Une foule de gens auront perdu 10 frs, à savoir tous ceux qui ne trouveront plus de personnes après eux pour continuer.
On comprend que la loi interdise ce genre de pratique: les premiers dans la chaîne volent tout simplement les suivants.

Les fonctions appelées **exponentielles** du type: 2^x, 10^x ou ... a^x décrivent la plupart des phénomènes de croissance et de décroissance apparaissant sur notre brave terre:

Croissance d'une population, augmentation de la pollution, accroissement de la demande énergétique, croissance du capital déposé à la banque, augmentation salariale, la cote à l'argus (Eurotax) pour une voiture, la croissance du Web, et j'en passe…

10.2 Intérêts composés

Modèle 1 : Un capital de Frs 10'000.- est placé à un taux d'intérêt de 6% capitalisé annuellement.

Calculons la valeur de ce placement à la fin de chacune des 3 prochaines années.

Croissance de capital:

Modèle 2 : On place un montant de Frs 5'000.- à un taux d'intérêt de $2\frac{1}{4}$ % capitalisé annuellement.

Modèle de croissance:

a) Déterminer un **modèle mathématique** décrivant la valeur du capital après n années.

b) À l'aide du modèle, déterminer le montant accumulé en 15 ans.

Exercice 10.2: On place un montant de Frs 7'500.- placé à $3\frac{3}{4}\%$ d'intérêt capitalisé annuellement.

a) Déterminer le modèle exponentiel décrivant la valeur du capital après n années.
b) Quel est le capital accumulé après 5 ans ?

Exercice 10.3: Un capital placé depuis 13 ans à un taux de $2\frac{3}{4}\%$ capitalisé annuellement a acquis une valeur de Frs 10'671.50.
Déterminer le modèle décrivant la valeur du capital au temps n et à l'aide de ce modèle, déterminer le capital initial.

Exercice 10.4: Quelle somme faut-il placer à un taux de $3\frac{1}{4}\%$ capitalisé annuellement pour avoir un montant disponible total de Frs 20'000.- au bout de 15 ans de placement ?

Exercice 10.5: À quel taux annuel faut-il placer un capital de Frs 8'000.- pour avoir un montant disponible total de Frs 12'000.- au bout de douze ans de placement ?

Intérêts composés : Les 4 derniers exercices correspondent au type de placement que vous proposent les banques et il est appelé placement à **intérêt composé**. Le capital C_0 placé pendant n années à un taux de t donnera la fortune finale $C(n)$ donnée par

$$C(n) = C_0 \cdot (1+t)^n$$

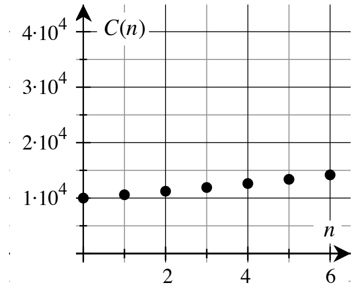
Exercice 10.6: Transformer cette dernière formule afin d'isoler :

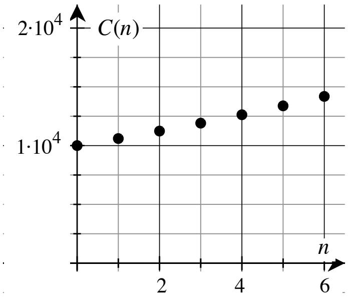
a) $C_0 = \ldots\ldots$ **b)** $t = \ldots\ldots$

Graphiques et modèles exponentiels : *Lorsqu'on veut représenter graphiquement une situation descriptible par un modèle exponentiel, il faut savoir choisir l'échelle de l'axe horizontal pour donner une bonne illustration du phénomène.*

Reprenons $C(n) = 10'000(1{,}06)^n$ (modèle 1).

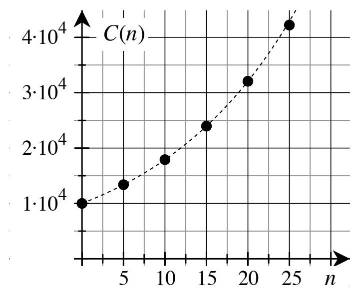
n	0	1	2	3	4	5	6
$C(n)$	10'000	10'600	11'236	11'910,16	12'624,77	13'382,25	14'185,19





Graphiques et modèles exponentiels :

n	0	5	10	15	20	25
$C(n)$	10'000	13'382,25	17'908,48	23'965,58	32'071,35	42'918,70



Intervalles de cinq ans

Modèle 3 : Une compagnie vient d'acquérir de nouveaux équipements informatiques au coût de V_0

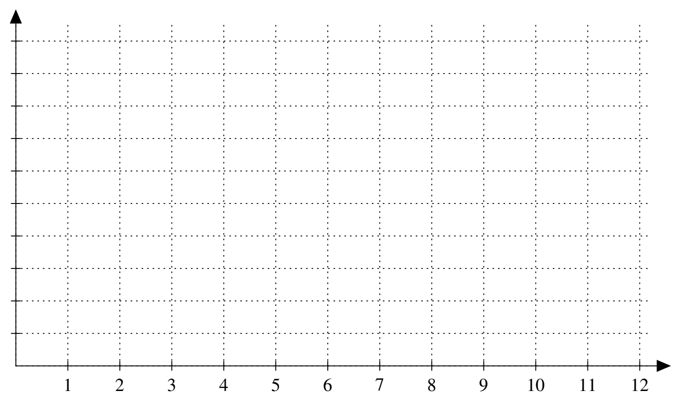
Décroissance d'une valeur:

a) Sachant que ces équipements se déprécient de 15% par année, déterminer un modèle mathématique décrivant la valeur de ces équipements en fonction du temps.

b) À l'aide du modèle, déterminer la valeur de cet équipement 2 ans après l'achat.

c) Compléter le tableau de valeurs suivant puis le graphique:

n	0	2	4	6	8	10	12
$V(n)$							



Exercice 10.7: Une automobile se déprécie de 15% par année.

a) Trouver le modèle mathématique décrivant la valeur de l'automobile en fonction du temps n, en représentant par V_0 la valeur à l'achat.
b) Si la valeur initiale était de Frs 10'000.-, combien vaudra-t-elle 8 ans après l'achat ? 10 ans après l'achat ?
c) Esquisser le graphique de cette fonction.

Exercice 10.8: Une compagnie renouvelle sa machinerie au prix de Frs 300'000.- Sachant que cette machinerie se déprécie au taux de 20% par année:

a) Trouver la règle de correspondance donnant la valeur de la machinerie en fonction du temps mesuré en années.
b) Trouver la valeur de la machinerie 2 ans après l'achat, 3 ans après l'achat, 5 ans après l'achat.
c) Esquisser le graphique de cette fonction.

Exercice 10.9: L'ancien comptable de la compagnie avait effectué un placement au nom de la compagnie. Vous ne trouvez en filière que deux relevés de ce placement. Un de ces relevés date de 1977 et indique 35'000.- comme valeur acquise par le placement. L'autre relevé date de 1982 et indique Frs 56'800.- comme valeur du placement.

a) Trouver le modèle mathématique décrivant la valeur du placement en fonction du nombre d'années.
b) Quelle est la valeur du placement en 2005 ?

Exercice 10.10: Quel est le taux de dépréciation d'un équipement dont la valeur initiale était Frs 250'000.- et dont la valeur cinq ans après l'achat est de Frs 110'000.- ?

Exercice 10.11: Un sel radioactif se désintègre de telle sorte qu'à la fin de chaque année, il reste les 49/50 de la quantité au début de l'année.

a) Trouver le modèle mathématique donnant la quantité restante après n années si la quantité initiale est Q_0.
b) Si la quantité initiale est $Q_0 = 100$ unités, trouver la quantité restante après 5 ans, après 10 ans.

Exercice 10.12: Le radium A se désintègre à une vitesse telle qu'à la fin de chaque minute il ne reste que les 8/10 de la quantité initiale.

a) Établir le modèle décrivant la quantité de radium en fonction du temps n mesuré en minutes.
b) Représenter le graphique de cette fonction.

?? Le saviez-vous ??

Les grains de blé et le jeu d'échecs

Un auteur arabe, Al Sephadi*, raconte que Sessa ayant inventé le jeu d'échecs fut convoqué par son maître, roi de Perse: "Ton jeu m'a redonné la joie de vivre ! je t'offre ce que tu désires !"*
Le sage ne voulait rien et ne dit mot. Le roi offensé s'énerva: "Parle donc, insolent ! Tu as peur que je ne puisse exaucer tes souhaits ?"
Le sage fut blessé par ce ton et décida de se venger: "j'accepte ton présent. Tu feras déposer un grain de blé sur la première case de l'échiquier."
"Et c'est tout ? Te moquerais-tu de moi ?"
"Pas du tout Sire. Vous ferez mettre ensuite 2 grains sur la 2ème case, 4 sur la troisième et ainsi de suite…"
Le roi s'énerva pour de bon: "Puisque tu honores si mal ma générosité, vas-t-en! Ton sac de blé te sera porté demain et ne me dérange plus !"
Le lendemain matin, le roi fut réveillé par son intendant affolé: "Sire, c'est une catastrophe ! Nous ne pouvons pas livrer le blé ! Nos mathématiciens ont travaillé toute la nuit: il n'y a pas assez de blé dans tout le royaume pour exaucer le souhait du savant".

En effet:
- Rien que sur la dernière case il faudrait .... grains de blé.

- Ce qui au total donnerait le nombre faramineux de 18'446'744'073'709'551'615 grains.

S'il voulait fournir cette quantité de blé, le roi devrait accumuler toutes les moissons réalisées sur Terre depuis 5000 ans !! Si son silo mesure 4 mètres sur 10, sa hauteur devra être de 300 millions de kilomètres, deux fois la distance Terre – Soleil !!

10.3 Rappels des différentes formules d'intérêt et pour aller plus loin…

Intérêt simple: Lorsque la durée d'un placement est courte (en général moins d'une année), on calcule un intérêt simple.
Celui-ci est directement proportionnel au capital initial placé C_0, à la durée du placement (nbre de jours) n et au taux d'intérêt t.

$$C(n) = C_0 \cdot \left(1 + t\frac{n}{360}\right)$$

Cette dernière formule provient naturellement de:

$C(n) = C_0 + I$

Modèle 4 : Un capital de CHF 73'250 a acquis le 17 novembre la valeur de CHF 73'803.
À quelle date avait-il été placé au taux annuel de 11% ?

Intérêt simple:

Exercice 10.13: Un capital de CHF 136'200 placé pendant 120 jours a acquis la valeur de 140'549. À quel taux a-t-il été placé ?

Exercice 10.14: Un capital initial de CHF 37'500 placé du 15 septembre 2014 au 3 novembre 2015 au taux annuel de 1,5%.

a) Quel somme disposera-t-on alors ?
b) Quel intérêt aura-t-on touché ?

Intérêt composé: Lorsque la durée d'un placement est longue (en général plus d'une année), on calcule un intérêt composé.
L'intérêt est calculé non seulement sur le capital initial, mais également sur les intérêts rapportés au fur et à mesure du placement.

$$C(n) = C_0 \cdot (1 + t)^n$$

où C_0 est le capital initial, t le taux d'intérêt annuel et n le nombre d'années.

Exercice 10.15: Un capital de CHF 104'000 est placé pendant 7 ans à intérêt composé.
Pendant les trois premières années, le taux est de $2\frac{1}{4}\%$.
Les quatre dernières années, le taux est descendu à $1\frac{3}{4}\%$
a) Calculer la valeur acquise par ce capital après 7 ans
b) Calculer le taux moyen équivalent pendant ces 7 ans.

Exercice 10.16: Un capital est placé pendant 3 ans à un taux annuel de 2,5% puis encore 2 ans à un taux de 1,75%.
Calculer le taux moyen équivalent pendant ces 5 ans.

10.4 Capitalisation mixte

Capitalisation mixte: Si un capital est retiré au cours d'une année, la somme finale sera calculée en deux étapes :
a) en utilisant la formule des intérêts composés, on calcule le capital après le nombre entier d'années de capitalisation
b) en utilisant la formule des intérêts simples sur le nombre de jours restant, puisque la période de capitalisation n'est pas échue.

Ce type de capitalisation s'appelle une **capitalisation mixte**.

Modèle 5 : On place un capital de 25'800 francs à un taux d'intérêt annuel de 7.5%. Quelle est la valeur acquise après 15 ans et 3 mois ?

Capitalisation mixte:

Exercice 10.17: On place un capital de 10’000 francs à un taux d’intérêt annuel de 3.25%.
Quelle est la valeur acquise après 10 ans et 8 mois ?

Exercice 10.18: On place un capital de 15’000 francs à un taux d’intérêt annuel de $1\frac{1}{4}$%.
Quelle est la valeur acquise après 12 ans et 4 mois et 20 jours ?

Exercice 10.19: Quel capital initial doit-on placer à un taux de $2\frac{1}{2}$% pendant 20 ans et 3 mois pour que celui-ci admette la valeur de 25'000 ?

10.5 Taux proportionnels, taux équivalents

Modèle 6 : Vous voulez placer un montant de 1’000 francs et vous avez consulté trois banques.

- La première banque B_1 offre un taux annuel de 9%, capitalisé annuellement.
- La seconde banque B_2 offre un taux proportionnel à 9% capitalisé trimestriellement, c’est-à-dire que l’intérêt est capitalisé quatre fois par année au taux de ¼ de 9% = 2.25%.
- La troisième banque B_3 offre un taux proportionnel à 9%, capitalisé mensuellement, c’est-à-dire que l’intérêt est capitalisé douze fois par année au taux de $\frac{1}{12}$ de 9% = 0.75%.

Quelle institution offre les meilleures conditions ?

Définition : Dans le cas des intérêts simples, on définit les **taux proportionnels** t_m de la manière suivante:

si la période considérée est une fraction $1/m$ d'année, on aura la relation:

$$\underbrace{C_0(1+m\cdot t_m)}_{\substack{\text{Intérêt simple payable} \\ m \text{ fois dans l'année}}} = \underbrace{C_0(1+t)}_{\substack{\text{Intérêt simple} \\ \text{annuel}}}$$

D'où $t_m = \dfrac{t}{m}$. En effet:

Codage : Par la suite, nous coderons:

- t : taux annuel
- t_{12}: taux ……………… , car il y a …………………………
- t_2: taux ……………… , car il y a …………………………
- t_4: taux ………………, car il y a …………………………

Modèle 7 : Quel est le taux mensuel proportionnel à un taux annuel de 3% ?

Exercice 10.20: Quel est le taux mensuel proportionnel à un taux trimestriel de 2,25% ?

Exercice 10.21: Quel est le taux mensuel proportionnel à un taux semestriel de 3% ?

Exercice 10.22: Quel est le taux annuel proportionnel à un taux mensuel de 0,2% ?

Définition : Deux taux définis pour des périodes de capitalisation différentes sont dits **à taux équivalents** si deux capitaux égaux placés pendant le même temps, mais en considérant des périodes de capitalisation correspondantes aux taux utilisés donnent les valeurs acquises égales.

Suite du Modèle 6 :

- Ainsi, dans l'exemple précédent, la banque B_1 propose un **taux annuel** de 9%
- La banque B_2 propose un **taux proportionnel** de $t_4 = \frac{9\%}{4}$ qui correspond à un taux trimestriel de $t_4 = 2.25\%$.
  Le **taux annuel équivalent** sera donc de 9,31%. En effet:
- La banque B_3 propose un **taux proportionnel** de $t_{12} = \frac{9\%}{12}$ qui correspond à un taux mensuel de $t_{12} = 0.75\%$.
  Le **taux annuel équivalent** sera donc de 9.38%. En effet :

Exercice 10.23: On considère un taux annuel de 6%.
Compléter le tableau suivant:

durée	**taux prop. t_m**	**taux annuel équiv. t_m**
semestriel		
trimestriel		
mensuel		

Exercice 10.24: En partant de la formule des intérêts composés m fois dans l'année:

$$\underbrace{C_0(1+t_m)^m}_{\text{Intérêt composé payable } m \text{ fois dans l'année}} = \underbrace{C_0(1+t)}_{\text{Intérêt composé annuel}}$$

Montrer que: $t = \left(1+t_m\right)^m - 1$

Exercice 10.25: On place un capital de CHF 10'000 à un taux annuel annoncé à 5,25%. La banque propose de capitaliser semestriellement ou mensuellement (taux proportionnel).

a) Quelle somme aura-t-on alors accumulée après 2 ans pour ces 2 cas de figure?

b) Quels sont alors les taux annuels équivalents ?

Exercice 10.26: Quel est le taux d'intérêt annuel d'un capital qui double en dix ans si la capitalisation est annuelle ?
Et si la capitalisation est mensuelle ?

Exercice 10.27: Trouver le taux mensuel équivalent au taux annuel de 12%

Modèle 8 : Calculer le taux trimestriel équivalent au taux annuel de 3%

Formule : En partant de la formule des intérêts composés m fois dans l'année:

$$\underbrace{C_0(1+t_m)^m}_{\text{Intérêt composé payable } m \text{ fois dans l'année}} = \underbrace{C_0(1+t)}_{\text{Intérêt composé annuel}}$$

Montrons que: $t_m = \sqrt[m]{1+t} - 1$

Exercice 10.28: Trouver le taux semestriel équivalent au taux annuel de $4\frac{1}{2}\%$

Exercice 10.29: Trouver le taux trimestriel équivalent au taux mensuel de 1%
(indication: commencer par calculer le taux annuel équivalent)

Modèle 9 : Calculer le taux trimestriel équivalent au taux mensuel de 0,5%

Exercice 10.30: Que pensez-vous de la publicité suivante ?

Qu'il s'agisse de payer une facture imprévue, de faire plaisir à votre famille, ou de compléter la somme nécessaire pour un projet, le petit crédit proposé par FlexCredit vous permettra d'obtenir la somme nécessaire. Nous vous proposons de nous rembourser votre emprunt avec un intérêt annuel de seulement 12% payable par tranche mensuelle de 1%.