Thème 3 AM: Optimisation quadratique

3.1 Optimisation "arithmétique"

Introduction : On va être amené à minimiser ou maximiser une fonction quadratique liée à une contrainte (un lien) de type affine:

$$ax + by = c.$$

La résolution de ce type de problème d'optimisation consiste à isoler x ou y de la contrainte et la substituer dans la fonction quadratique.
On cherche ensuite le minimum ou le maximum de cette fonction à l'aide des coordonnées du sommet de la parabole correspondante.

Modèle 1 : La somme de deux nombres est 36. Déterminer ces deux nombres sachant que leur produit est maximal.

problème d'optimisation

Exercice 3.1: La somme de deux nombres entiers est 36. Déterminer ces deux nombres sachant que la somme de leur carré est minimale.

Exercice 3.2: Quelle est la valeur minimale du produit de deux nombres si leur différence est égale à 12 ?

3.2 Optimisation "économique"

Modèle 2 : Le propriétaire d'un champ estime que s'il plante 60 poiriers, le rendement moyen sera de 480 poires par arbre et que ce rendement diminuera de 5 poires par arbre pour chaque poirier additionnel planté dans le champ. Combien le propriétaire devrait-il planter de poiriers pour que le rendement du verger soit maximal?

problème d'optimisation

Exercice 3.3: Si un ostréiculteur récolte des huîtres cette semaine, il pourrait en obtenir 120 paniers qu'il pourrait vendre 240 CHF pièce. Pour chaque semaine d'attente, sa récolte augmenterait de 30 paniers, mais le prix de chaque panier diminuerait de 40 CHF.

a) Dans combien de semaines, la récolte sera-t-elle la plus favorable financièrement ?

b) À ce moment-là quel sera le montant que lui rapportera la récolte ?

Exercice 3.4: Une agence de voyages offre des voyages organisés au prix de 60 CHF par personne pour les 30 premiers participants. Pour les plus grands groupes, jusqu'à 90, chaque personne bénéficie d'un rabais de 0,50 CHF pour tout participant en plus des 30 premiers. Par exemple, si 31 personnes participent, le prix par personne est de 59,50 CHF.
Pour quel nombre de participants l'agence gagnera-t-elle le plus ?

Une méthode générale ? *La variété des problèmes d'optimisation est telle qu'il est bien difficile de donner une méthode générale de résolution.*

Nous allons néanmoins donner sous forme d'une marche à suivre, une stratégie d'approche de ces problèmes. Cependant, ce n'est qu'au prix de quelques efforts et d'entraînements que vous arriverez à une certaine aisance dans la résolution de ces problèmes.

*Essayez donc avec … **persévérance** !*

3.3 Marche à suivre pour la résolution des problèmes d'optimisation

① Lisez le problème attentivement (plusieurs fois) en réalisant parallèlement une figure d'étude (si nécessaire) pour y indiquer toutes les informations.

② Préciser ce qu'il s'agit d'optimiser

③ Exprimez la quantité ***Q* à optimiser** (une aire, un volume, des coûts, …) comme fonction d'une ou de plusieurs variables.

④ Si ***Q*** dépend de plus d'une variable, en choisir une que l'on appelle x et exprimer les autres en fonction de x à l'aide des équations liant ces variables (contraintes).

⑤ Utilisez ces équations pour exprimer ***Q*** comme fonction d'**une seule variable** (par substitutions).

⑥ La fonction obtenue étant quadratique, son maximum (ou minimum) pourra être obtenu en calculant les coordonnées du sommet de la parabole représentant cette fonction.

⑦ Répondez finalement à la question posée à l'aide d'une phrase en s'assurant que celle-ci est admissible dans le contexte de l'exercice.

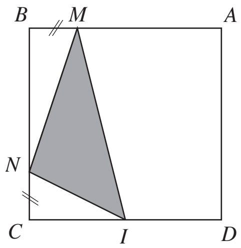
3.4 Optimisation "géométrique"

Modèle 3 : $ABCD$ est un carré de côté 6. Le point I est le milieu de CD. M est un point quelconque de AB, N est le point de CB tel que $CN = BM$.

Optimisation

Quelle doit être la position de M sur AB pour que l'aire du Δ MNI soit minimale ?

Solution: ① Relire l'énoncé du problème et profiter de faire une figure d'étude "intelligente" :



② À optimiser:

③ Les liens (contraintes):

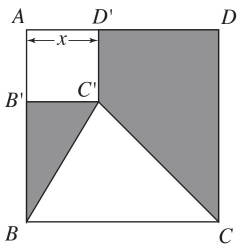
④ La fonction à optimiser ne dépendant plus que d'une variable :

Solution (fin): ⑤ Le sommet de la parabole S :

⑥ La réponse est donc :

http://www.javmath.ch

Exercice 3.5: $ABCD$ est un carré de 8 cm de côté. $AB'C'D'$ est un carré de x cm de côté.

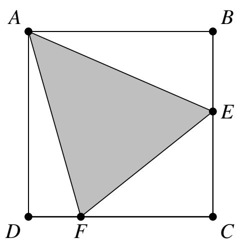


a) Pour quelle valeur de x, la partie grisée a-t-elle la plus grande aire ?

b) Que vaut alors cette aire optimale ?

Exercice 3.6: Le triangle AEF grisé est inscrit dans un carré $ABCD$ de 8 cm de côté selon la contrainte suivante:
Les points E et F sont mobiles sur les côtés et respectent que:

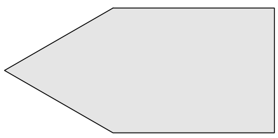
$$\overline{CE} = 2 \cdot \overline{DF} .$$



a) Déterminer la position du point F sur DC pour laquelle l'aire du triangle AEF sera minimum.

b) Déterminer alors la proportion du carré qui sera grisée.

Exercice 3.7: On considère le terrain, représenté ci-dessous, formé d'un rectangle et d'un triangle équilatéral
On précise encore que son périmètre est de 224 mètres.

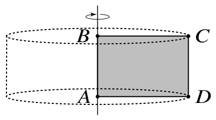


a) Déterminer l'aire maximale du terrain.

(Indice: Aire d'un triangle équilatéral de côté x est $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ *)*

b) Démontrer la formule donnée dans l'indice.

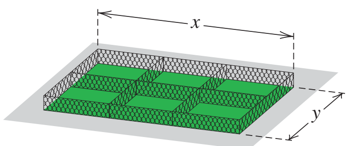
Exercice 3.8: On fait tourner un rectangle de périmètre 60 cm autour de l'un de ses côtés.
Déterminer les dimensions du rectangle pour que le cylindre ainsi obtenu ait la plus grande aire latérale



Modèle 4 : Un fermier veut mettre une barrière autour d'un champ rectangulaire et diviser ce champ en trois lopins rectangulaires en plaçant deux barrières parallèles à l'un des côtés. Si le fermier ne dispose que de 1000 m de barrière, quelles dimensions donneront la plus grande aire rectangulaire ?

Optimisation

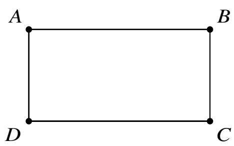
Exercice 3.9: 1'200 mètres de grillage sont utilisés pour construire six cages à animaux, comme le montre la figure.



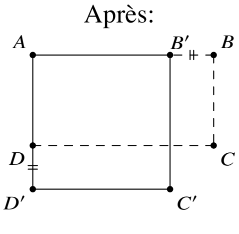
a) Déterminer les dimensions qui donnent une aire clôturée maximale.
b) Que vaut alors cette aire ?

Exercice 3.10: On propose à Monsieur Bolomey, propriétaire d'un terrain rectangulaire $ABCD$ d'une longueur de 20 mètres et d'une largeur de 10 mètres, de modifier son terrain en retirant un certain nombre de mètres à la longueur et en ajoutant cette même distance à la largeur comme l'indiquent les figures ci-dessous.
Il deviendrait alors propriétaire d'un nouveau terrain rectangulaire $AB'C'D'$.

Avant:



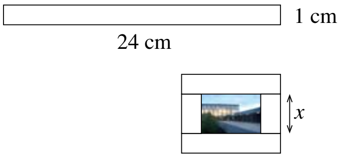
Après:



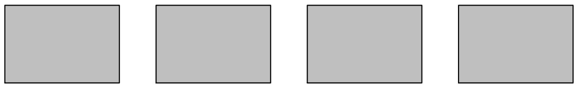
a) Déterminer la valeur de cette distance pour laquelle l'aire du terrain soit maximale.
b) Préciser alors la forme du terrain final.

Exercice 3.11: Un éleveur de bovins désire enclore un terrain rectangulaire bordant une rivière rectiligne. Il dispose de 1000 m de fil et ne veut pas enclore le côté longeant la rivière, car ses bovins ne savent pas nager. Calculer la surface maximale qu'il peut créer.

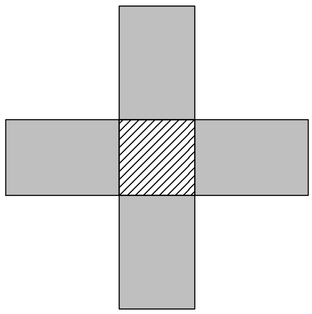
Exercice 3.12: Un photographe désire fabriquer un cadre pour une photo rectangulaire à partir d'une planche de 24 cm de long et 1 cm de large. Comment devra-t-il couper cette planche pour que l'aire intérieure du cadre soit maximale ?



Exercice 3.13: On a quatre rectangles identiques, le périmètre de chacun de ces rectangles est de 120 cm.

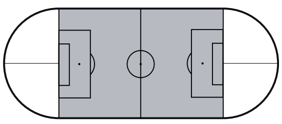


On dispose ces rectangles de façon à former une croix comme sur la figure ci-dessous.



Quelle est l'aire maximale de la croix ainsi constituée ? *(Ne pas oublier de compter également l'aire du carré hachuré situé au centre de la croix.)*

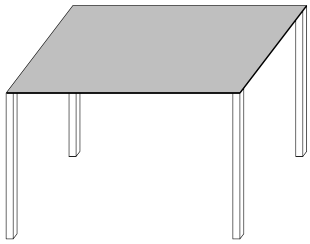
Exercice 3.14: On désire construire, dans un nouveau stade, une piste de 400 m constituée de deux lignes droites parallèles ainsi que deux virages formés chacun d'un demi-cercle. (cf. figure)



Déterminer le rayon des 2 demi-cercles pour que le rectangle (surface de jeu pour un terrain de sport) soit de surface maximale.

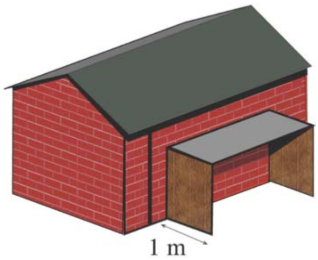
Modèle 5 : On fabrique un couvert à l'aide de quatre poutres métalliques verticales de même longueur qui seront les supports d'un toit plat. Le couvert doit mesurer 5 mètres de profondeur. Le prix de revient des poutres est calculé en fonction de leur longueur : elles coûtent 12 francs le mètre. Le toit coûte 8 francs le mètre carré. On sait de plus que le prix de revient total (poutres et toit) du couvert est de 240 francs.

Optimisation



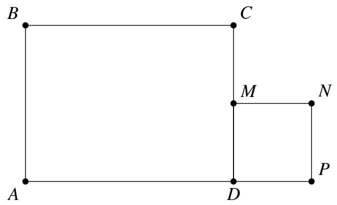
a) Calculer les dimensions du couvert qui donnent un volume maximal.
b) Que vaut alors ce volume optimal?

Exercice 3.15: On désire accoler à une construction existante un abri rectangulaire ouvert composé de deux parois verticales de 1 m de profondeur et d'un toit plat (voir figure). Le toit est exécuté en zinc qui coûte 40 fr. le m^2 et les deux autres côtés en contre-plaqué qui coûte 15 fr. le m^2.



Si on dispose de 300 fr, déterminer les dimensions de cet abri admettant un volume maximum. Que vaut alors ce volume ?

Exercice 3.16: Un agriculteur désire construire deux enclos juxtaposés. Le premier est un rectangle *ABCD* et le second un carré *MNPD* où *M* est au milieu de *CD*.

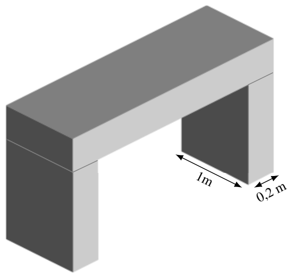


Le prix de revient de la clôture est de 12.- Fr. le m, sauf pour la partie commune aux deux enclos où il est de 36.- Fr. le m. L'agriculteur dispose de 1'104.- Fr. pour cette construction. Déterminer les dimensions des enclos permettant d'avoir une surface au sol maximum.

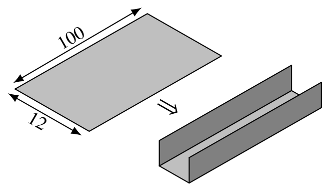
3.4 Un petit mélange

Exercice 3.17: Parmi tous les rectangles admettant un périmètre de 1 m, quel est celui dont l'aire est maximale ? Que vaut alors cette aire ?

Exercice 3.18: Avec un budget de 1000 CHF, on souhaite fabriquer un petit abri en béton à l'aide de 3 dalles de même épaisseur selon le modèle ci-contre. Déterminer la longueur et la largeur des dalles si l'on souhaite avoir un volume intérieur de l'abri maximum. On précise encore que le mètre cube de béton est facturé 500 CHF.



Exercice 3.19: On veut faire une gouttière avec une longue feuille d'aluminium de 100×12 cm en pliant les deux longs côtés et en les relevant perpendiculairement. Quelle hauteur doivent avoir les côtés relevés pour que la gouttière ait une contenance maximale ?



Exercice 3.20: On a constaté que, dans une petite salle de concert, le nombre de spectateurs était dépendant du prix p d'entrée. La valeur minimale de p est fixée à 10 CHF. Si le prix est de 10 CHF, le nombre de spectateurs n est généralement de 180. Toute augmentation de 1 CHF du prix d'entrée entraîne en moyenne une diminution de 10 spectateurs par concert.

a) Déterminer la valeur de n pour que la recette engendrée soit maximale.

b) Quels sont alors le prix d'entrée et la recette totale ?

Quelques réponses : Thème 3 AM

Exercice 3.1: Les 2 nombres sont identiques et valent 18.

Exercice 3.2: Le produit minimum vaut -36.

Exercice 3.3: **a)** La vente la plus favorable aura lieu dans une semaine.
b) Le montant optimal sera de 30'000 CHF.

Exercice 3.4: Il s'agira de considérer 30 + 45 = 75 passagers.

Exercice 3.5: **a)** L'aire est optimale pour $x = 2$ cm.
b) Cette aire optimale est de 36 cm^2.

Exercice 3.6: **a)** Le point F doit être situé à 2 cm à droite de D.
b) La proportion grisée est de 28/64 = 43,75 %.

Exercice 3.7: **a)** L'aire maximale est d'environ 2939,12 m^2.
b) Il s'agit d'utiliser le théorème de Pythagore sur le 1/2 triangle équilatéral.

Exercice 3.8: Le rectangle optimal est un carré de côté 15 cm.

Exercice 3.9: **a)** Les dimensions de l'ensemble des six cages sont 200 m et 150 m.
b) Cette aire optimale est de 30'000 m^2

Exercice 3.10: **a)** La distance est de 5 m.
b) le terrain final est un carré de 15 m de côtés.

Exercice 3.11: La surface maximale est de 125'000 m^2.

Exercice 3.12: Il s'agira de considérer 2 morceaux de 5 cm de long et 2 morceaux de 7 cm de long.

Exercice 3.13: L'aire maximale de la croix est de 4'800 cm^2.

Exercice 3.14: Le rayon des 2 demi-cercles est d'environ 31,83 m.

Les directives edictées par l'Association Suisse de Football précise que les dimensions d'un terrain doivent être de 105 m par 74 m pour être homologué en Super League.
À comparer avec les mesures obtenues dans cet exercice.

Exercice 3.15: L'abri doit avoir une longueur de 3,75 m, une hauteur de 5 m pour un volume optimal de 18,75 m^3.

Exercice 3.16: Le petit enclos est de forme carrée de côté 5,75 m et l'enclos de forme rectangulaire est un rectangle de côtés 11,5 et 20,125 m.

Exercice 3.17: Il s'agit d'un carré de côté 0,25 m et d'aire 0,0625 m^2.

Exercice 3.18: 2 dalles de $2,4 \times 1 \times 0,2$ m et une dalle de $5,2 \times 1 \times 0,2$ m.

Exercice 3.19: La hauteur doit être de 3 cm.

Exercice 3.20: **a)** Le nombre de spectateurs est de $n = 140$.
b) Le prix d'entrée est de 14 CHF pour une recette optimale de 1960 CHF.