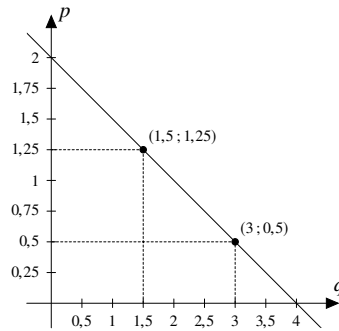


Thème 7: Fonctions: applications dans le contexte économique

7.1 Introduction

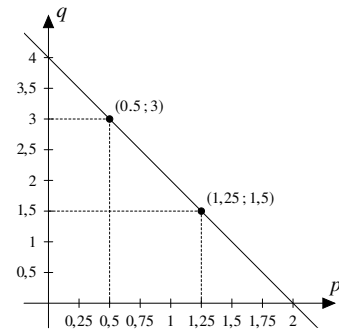
En économie, mais aussi en mathématiques, on est souvent amené à travailler sur des fonctions mettant en lien quantités q et prix p . Par exemple, plus le prix d'un objet augmente, moins il en est vendu (en principe...). Observons ceci sur les 2 graphiques suivants:

Le prix en fonction de la quantité:



$$p(q) = \dots \cdot q + \dots$$

La quantité en fonction du prix:



$$q(p) = \dots \cdot p + \dots$$

Notons que seul le 1^{er} quadrant nous intéresse. En effet, des quantités ou des prix négatifs n'ont pas de sens. Il est nécessaire également de signaler que dans la réalité de telles fonctions sont rarement caractérisées sous la forme d'une droite (ou même d'une portion de parabole); cependant, dans le cadre de ce chapitre, nous nous permettrons de simplifier la situation en ne considérant que des fonctions du premier ou du deuxième degré.

Modèle 1: Algébriquement, comment à partir de la donnée de l'une des fonctions, peut-on retrouver l'autre ?

Fonction réciproque:

$$p(q) = -\frac{1}{2}q + 2$$

$$q(p) = -2p + 4$$

On appelle cette démarche: "la recherche de la fonction réciproque (ou fonction inverse)".

Exercice 7.1: Pour les fonctions suivantes, déterminer leur réciproque:

a) $p(q) = -4q + 12$ b) $q(p) = \frac{2}{3}p - 6$
 c) $q(p) = 3p + \frac{5}{2}$ d) $p(q) = -\frac{2}{7}q - \frac{5}{14}$

7.2 L'offre et la demande

L'**offre** et la **demande** constituent un des mécanismes essentiels de l'économie. C'est par ce mécanisme que se forment les prix, se règlent les quantités produites et que se répartissent les ressources. Sans ce mécanisme, une économie aurait de la peine à fonctionner.

• **Qu'est-ce que la demande ?:** La demande est la quantité de biens ou services que les consommateurs désirent acheter (consommer) au cours d'une période donnée.

De quoi dépend-elle ?: La quantité qu'on désire acheter dépend principalement:

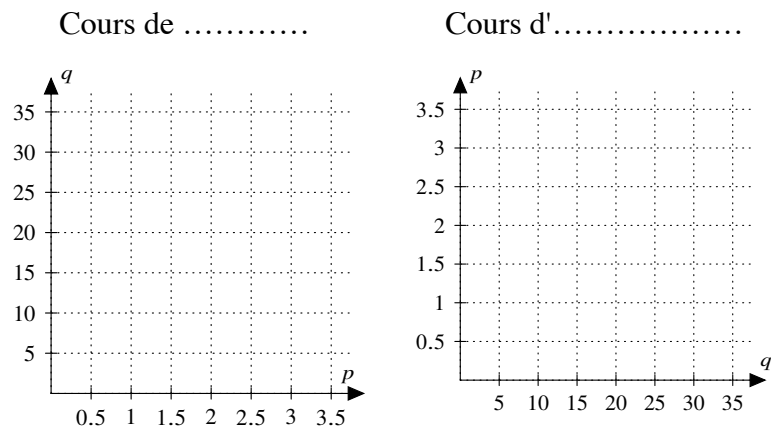
- de l'aptitude de ce bien ou service à satisfaire un besoin, c'est-à-dire de son utilité;
- des possibilités financières de l'individu demandeur, à savoir sa fortune et son revenu;
- des conditions de marché: la quantité demandée varie lorsque le prix change.

La courbe de demande: Il est possible de représenter la **fonction de demande** sous une forme graphique.

Prenons un exemple: celui de Trinkus, consommateur de jus de raisin. Trinkus veut satisfaire son besoin en jus de raisin. La quantité q_d (en litres) qu'il va consommer dépend du prix p (en CHF).

Si le prix p du litre est de...	alors la quantité q_d sera de:
3.-	5
2.-	15
1.-	25
0.50	30

Compléter ces 2 représentations graphiques:



Observation: La quantité demandée est une fonction décroissante du prix:

- si le prix baisse, la quantité demandée augmente;
- si le prix augmente, la quantité demandée baisse.

- Pourquoi ?:**
- Lorsque le prix augmente, chaque consommateur achète moins.
 - À partir d'un niveau de prix suffisamment élevé, certains consommateurs décident de ne plus acheter du tout et sortent du marché.

La fonction de demande: À l'aide des informations du tableau précédent, déterminer la **fonction de demande** $q_d(p)$ indiquant la quantité demandée en fonction du prix:

- **Qu'est-ce que l'offre?:** L'offre est la quantité de biens et de services que les vendeurs désirent mettre à disposition (produire) au cours d'une période donnée.

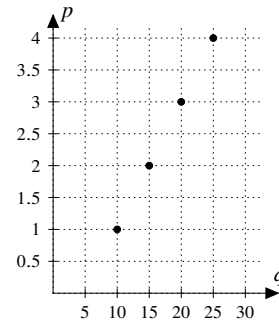
De quoi dépend-elle?: Les quantités offertes d'un produit dépendent principalement de la comparaison des coûts de production et du prix de vente.

La courbe d'offre: Comme pour la fonction de demande, il est possible de représenter l'offre à l'aide d'un graphique. Reprenons l'exemple du jus de raisin, vu du côté du producteur qui s'appelle Bacchus.

Bacchus est un excellent producteur de jus de raisin. La quantité q_o (en litres) qu'il va offrir dépend du prix de vente p (en CHF par litre).

Graphe (économie)

Si le prix p est de:	alors, la quantité q_o sera de:
1.-	10
2.-	15
3.-	20
4.-	25



Observation: La quantité offerte est une fonction croissante du prix:

- si le prix baisse, la quantité offerte baisse;
- si le prix augmente, la quantité offerte augmente.

- Pourquoi ?:**
- d'une part, chaque entreprise est disposée à offrir une plus grande quantité du bien concerné à un niveau de prix plus élevé ;
 - d'autre part, des prix plus élevés incitent de nouvelles entreprises à produire ce même bien.

La fonction d'offre : À l'aide des informations du tableau précédent, déterminer la **fonction d'offre** $q_o(p)$ indiquant la quantité offerte en fonction du prix:

Exercice 7.2: À l'aide du tableau suivant, déterminer la fonction de demande $q_d(p)$ et la fonction d'offre $q_o(p)$ puis représenter le graphe des 2 fonctions dans un même système d'axe.

p	$q_d(p)$	$q_o(p)$
1.50	3	4
2.-		6
3.-	1	

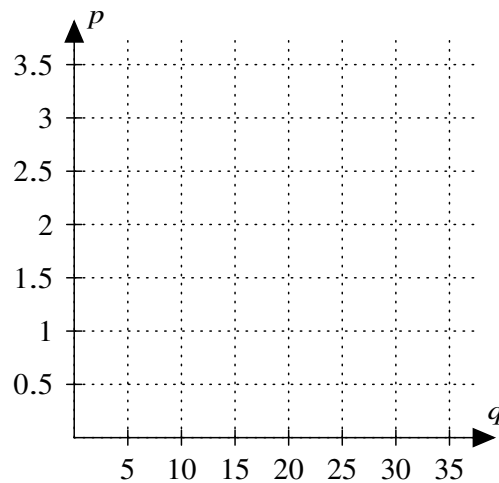
7.3 Le marché et les prix

Les volontés des acheteurs et des vendeurs se rencontrent sur le marché...

Le marché est le lieu de rencontre des acheteurs et des vendeurs. Anciennement, c'était un endroit géographiquement identifiable (place du marché où s'échangeaient toutes sortes de marchandises). Aujourd'hui, on parle de marché sans se référer à un endroit spécifique (marché de l'emploi, du logement).

... et forment les prix : La rencontre des désirs des vendeurs et des acheteurs forme le prix.

Superposons le graphe des fonctions d'offre et de demande sur le même système d'axes et calculons les coordonnées du point d'intersection:



Dans notre exemple, les volontés de Trinkus (demande) et de Bacchus (offre) coïncident pour un prix égal à 2 CHF (prix d'équilibre), auquel correspond une quantité de 15 litres.

- On peut retrouver algébriquement ces valeurs d'équilibre en résolvant le système d'équations:

- Comment pourrait-on décrire la situation si le prix était imposé à 3 CHF ?

Exercice 7.3:

Une étude de marché a été réalisée sur la vente de fraises dans les magasins d'une chaîne d'hypermarchés. On estime que le prix de vente p , en CHF, d'un kilogramme de fraise est tel que pour: $2 \leq p \leq 5$ on a:

- La demande, c'est-à-dire la quantité de fraises (en milliers de tonnes) réclamée par les consommateurs, est:

$$q_d(p) = -\frac{3}{2}p + \frac{17}{2}$$

- L'offre, c'est-à-dire la quantité de fraises (en milliers de tonnes) disponible chez les fournisseurs, est :

$$q_o(p) = p - \frac{3}{2}$$

- Quelle est la quantité de fraises demandée lorsque le prix est de 3 CHF ?
- Quelle est la quantité de fraises offerte lorsque le prix est de 3 CHF ?
- Que peut-on dire du marché quand le prix des fraises est de 3 CHF ?
- Déterminer le prix d'équilibre pour le marché des fraises.
- Représenter la situation sur un graphique.

Exercice 7.4:

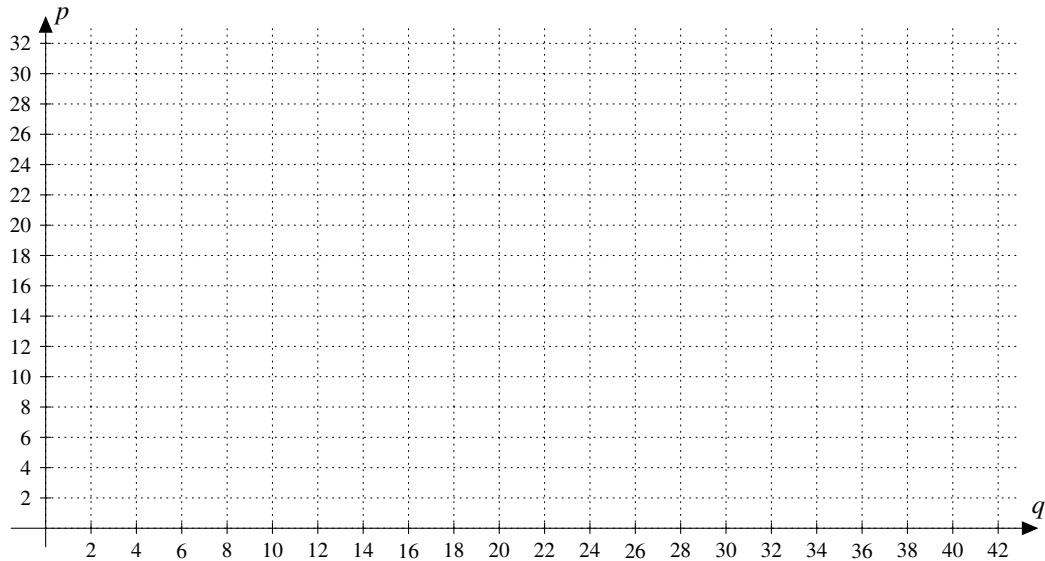
À propos d'un bien de consommation, on sait que:

- Si le prix est de 30 CHF, alors la quantité souhaitée par les consommateurs est de 10 kg;
- Si le prix est de 10 CHF, alors la quantité souhaitée par les consommateurs est de 40 kg;
- Si le prix est de 26 CHF, alors la quantité que les entreprises souhaitent produire est de 20 kg;
- Si le prix est de 14 CHF, alors la quantité que les entreprises souhaitent produire est de 14 kg;

On sait en plus que le coût de production unitaire est de 8 CHF.

Déterminer:

- Les fonctions de demande et d'offre.
- L'équilibre du marché, à savoir le prix d'équilibre et la quantité d'équilibre.
- Le bénéfice unitaire et le bénéfice total de l'ensemble des offreurs (vendeurs) du marché.
- Sur la page suivante, compléter (au crayon) le graphe présentant l'ensemble de cette situation.



Suite de l'exercice 7.4: L'équilibre du marché déterminé dans l'exercice précédent permet aux offreurs de réaliser un bénéfice important. Cette situation va conduire à l'arrivée de nouveaux offreurs (de nouveaux concurrents). La fonction d'offre va donc se "déplacer", elle va augmenter:

- Au prix d'équilibre de l'exemple précédent, la quantité que les entreprises souhaitent produire est maintenant de 31;
- La nouvelle offre est parallèle à la première offre.

Déterminer

- a) La nouvelle fonction d'offre.
- b) Le nouvel équilibre du marché.
- c) Le nouveau bénéfice unitaire et le nouveau bénéfice total de l'ensemble des offreurs (vendeurs) du marché.
- d) Compléter le tableau de la *page suivante* indiquant l'évolution absolue et relative (en %) du prix d'équilibre, de la quantité d'équilibre, du bénéfice unitaire et du bénéfice total.
- e) Compléter le graphe ci-dessus avec ce nouvel équilibre du marché.

d)

	Différences absolues	Différences relatives
Prix d'équilibre		
Quantité d'équilibre		
Bénéfice unitaire		
Bénéfice total		

On constate que les bénéfiques ont attiré de nouveaux offreurs, mais ce sont les consommateurs qui en ont profité. Cet aspect est souvent présenté comme un avantage de la concurrence.

Exercice 7.5: À propos du marché des barres chocolatées, on donne les informations suivantes:

- Le tableau suivant:

Prix de la barre de chocolat (CHF)	Quantité demandée (en millions)
3.-	1
1.-	9

- La fonction suivante: $q_o(p) = \frac{2}{3}p + \frac{29}{6}$
- a) Déterminer l'équilibre du marché, à savoir le prix d'équilibre et la quantité d'équilibre.
- b) Sachant que le coût de production unitaire est de 0.4 CHF, déterminer le bénéfice unitaire et le bénéfice total de l'ensemble des offreurs du marché.
- c) Représenter ces différentes informations sur un graphique

Une étude publiée par le ministère de la Santé souligne les risques d'obésité liés à une consommation excessive de barres chocolatées. Conséquence de cette étude, la demande des consommateurs diminue brusquement et atteint, pour le prix d'équilibre calculé en a), la nouvelle valeur de 2,5 millions.

- d) Compléter le graphique avec ces modifications.
- e) Déterminer la nouvelle fonction de demande.
- f) Déterminer le nouvel équilibre du marché.
- g) L'évolution absolue et relative du prix et de la quantité d'équilibre, du bénéfice unitaire et total.

Suite à de mauvaises récoltes en Côte d'Ivoire et au Ghana, principaux pays producteurs de cacao, le prix du cacao augmente fortement. D'après vous, pour un prix inchangé:

- h) L'offre va-t-elle augmenter ou diminuer ?
- i) Dès lors, la courbe d'offre va-t-elle se déplacer vers la gauche ou vers la droite du graphique ?

7.4 Situation de monopole

Introduction: On parle de monopole lorsque sur un marché, et pour un produit donné, il n'y a qu'un seul vendeur (ou plusieurs agissant de concert sans concurrence) en face d'une multitude d'acheteurs agissant individuellement. Il n'existe aucun produit de substitution à celui vendu par le monopoleur. On peut citer comme exemple:

- Les TL sur le marché des transports lausannois;
- Services *novae restauration SA* au Gymnase de Morges

Dans le cas d'un monopole, il n'y a pas de fonction d'offre puisque le monopoleur fixe le prix ou la quantité. Par contre, il ne peut pas fixer les deux éléments, car ils dépendent l'un de l'autre, de par la fonction de demande. En effet, le monopoleur ne peut pas contraindre les consommateurs d'acheter.

Étudions la situation directement sur un exemple:

Modèle 2: Un monopoleur fait face à la demande de son marché.

Demande du marché : $q(p) = -5p/4 + 20$

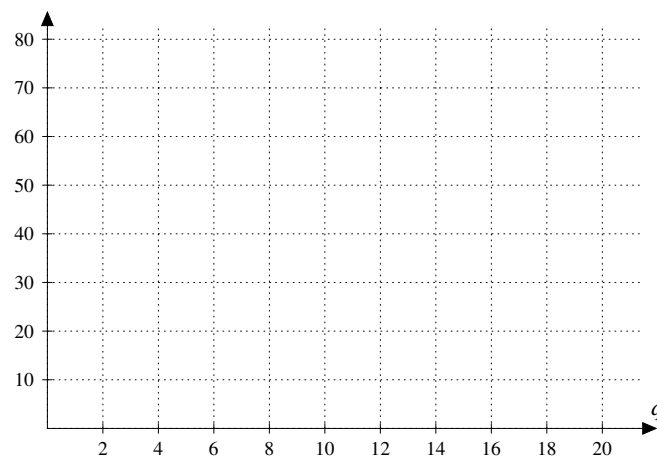
Déterminer:

- a) La fonction du prix de vente p en fonction de la quantité q .
- b) La fonction du chiffre d'affaires net (CAN) en fonction de la quantité q .
- c) La quantité à vendre qui maximise le chiffre d'affaires net (CAN), ainsi que le chiffre d'affaires net résultant pour cette quantité.

Modèle 2 (suite): Concernant la fabrication, cette entreprise a des charges fixes de 10 et des charges variables de 2 par pièce fabriquée. Déterminer:

- d) La fonction des charges totales en fonction de la quantité q .
- e) La fonction du bénéfice en fonction de la quantité q .
- f) Les deux quantités au seuil de rentabilité, à savoir lorsque le bénéfice de l'entreprise est de zéro.
- g) La quantité à vendre qui maximise le bénéfice, ainsi que le bénéfice résultant de cette quantité.

- h) Représenter l'ensemble de cette situation dans le système d'axes suivant:



Exercice 7.6: Votre esprit entrepreneurial s'étant bien développé, vous décidez à la fin de votre 4^e année d'études de vous lancer en affaires dans la restauration ! Votre restaurant ne sera pas ordinaire toutefois, car votre concept est unique à Morges, soit : sushi et pizza à volonté dans un décor country, avec soirée disco/karaoké. Riche des enseignements que vous avez reçus, vous estimez que la demande du marché et les charges totales seront pour votre restaurant :

- Demande du marché: $p(q) = -0,003q + 50$
 - Charges totales = $0,002q^2 + 3000$
- a) Déterminer la fonction du chiffre d'affaire net CAN.
 b) Montrer que le bénéfice sera donné par la formule:
- $$\text{Bénéfice} = -0,005q^2 + 50q - 3000$$
- c) Combien de repas devrez-vous vendre, et à quel prix afin de maximiser vos bénéfices ?

Exercice 7.7: Ces dernières années, l'industrie des produits laitiers a vu apparaître de nouveaux produits tels que le lait *PurFiltre*, l'*Ultra'Lait* et l'*Ultra'crème*. C'est dans cet esprit qu'une entreprise a songé à lancer un nouveau produit à base de lait enrichi pour athlètes de haut niveau. Après avoir effectué une étude de marché, la firme pense que la fonction qui représente le mieux la demande pour ce nouveau produit est donnée par :

$$q(p) = -\frac{1}{2}p + 3450$$

Où q est la quantité vendue (mesurée en milliers de litres) et p est le prix de 1000 litres.

De plus, l'entreprise estime que ses charges fixes sont de 300'000 CHF et que ses charges variables pour 1000 litres sont :

$$\text{charges variables} = 5q - 100.$$

Déterminer:

- a) La fonction du prix de vente p en fonction de la quantité q .
 b) La fonction du chiffre d'affaires net CAN
 c) La fonction des charges totales en fonction de la quantité q .
 d) Montrer que le bénéfice total sera donné par la formule:

$$\text{Bénéfice} = -7q^2 + 7000q - 300'000$$

- e) Les deux quantités au seuil de rentabilité, à savoir lorsque le bénéfice de l'entreprise est de zéro.
 f) Calculez le prix et la quantité qui maximiseraient les bénéfices de l'entreprise. Quels seraient ses bénéfices ?
 g) Esquisser sur un même graphique:
- La fonction du chiffre d'affaires net (CAN).
 - La fonction des charges totales.
 - La fonction de bénéfice.
 - Le bénéfice maximum.

Exercice 7.8: La compagnie de disques GYMO Inc. décide de mettre en marché le nouvel album du groupe morgien «Les 2E d'ENFER». Leur division du marketing est d'avis que la demande pour cet album est de: $p = -2q + 20$
où p est le prix d'un disque et q représente le nombre de disques (en millier).

La compagnie peut produire le disque sans coût fixe, mais la production implique une charge variable constante de 4 CHF par album. Faites l'hypothèse que GYMO Inc. est un monopole sur ce marché.

a) Quels seront le prix et la quantité que choisira la compagnie afin de maximiser ses bénéfices? Quel sera ce bénéfice ?

Dans un premier temps, le groupe « Les 2E d'ENFER » annonce qu'il demande un bonus de 10'000 CHF pour signer le contrat.

b) Quels seront alors les nouveaux prix, quantités et bénéfice optimum ?

Après réflexion, le groupe suggère une redevance de 6 CHF par album vendu plutôt qu'un bonus fixe.

c) Quels seront alors les nouveaux prix, quantités et bénéfice optimum ?

Quelques références: - Mathématiques pour la maturité professionnelle (J-P.Favre)
- Economie 21 (Jean-Marie Ayer, Luca Perazzi)
- Recueil d'exercices de microéconomie (www.tifawt.com)

Mes remerciements: - M. Didier Poretti (prof d'économie au gymnase de Morges)

Quelques réponses : Thème 7

Exercice 7.1: a) $q(p) = -\frac{1}{4}p + 3$

b) $p(q) = \frac{3}{2}q + 9$

c) $p(q) = \frac{1}{3}q - \frac{5}{6}$

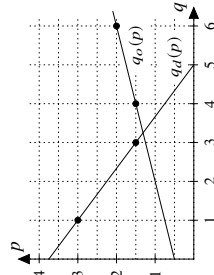
d) $q(p) = -\frac{7}{2}p - \frac{5}{4}$

Exercice 7.2: • Fonction de demande:

$$q_d(p) = -\frac{4}{3}p + 5$$

• Fonction d'offre:

$$q_o(p) = 4p - 2$$

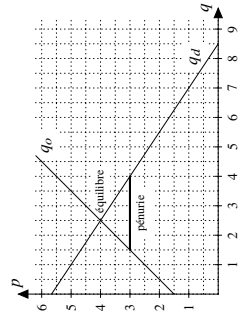


Exercice 7.3: a) $q_d(3) = 4000$ tonnes

b) $q_o(3) = 1'500$ tonnes

c) Comme l'offre est plus petite que la demande, il y a une pénurie de 2'500 tonnes.

d) Prix d'équilibre: 4 CHF



Exercice 7.4: a) $q_o(p) = -\frac{3}{2}p + 55$ et $q_d(p) = \frac{1}{2}p + 7$

b) Prix d'équilibre = 24 CHF et quantité d'équilibre = 19 kg

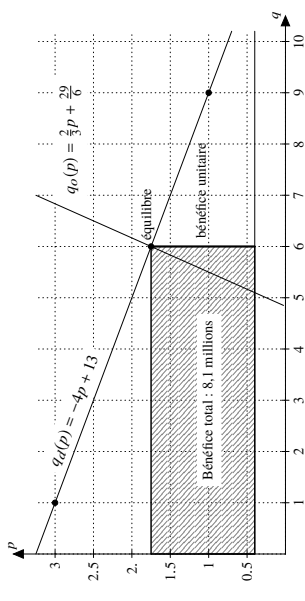
c) Bénéfice unitaire = prix d'équilibre - coût de production unitaire = 16 CHF
Bénéfice total = bénéfice unitaire · quantité = 304 CHF

Exercice 7.5:

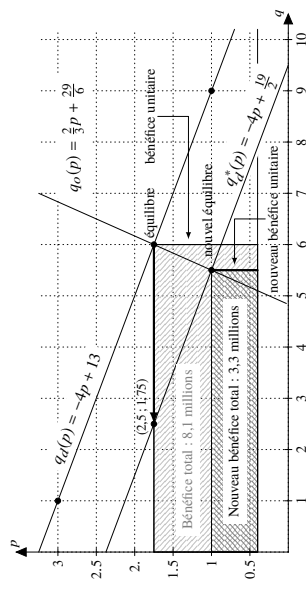
a) Prix d'équilibre = 1.75 CHF
Quantité d'équilibre = 6 millions de barres chocolatées.

b) Bénéfice unitaire = 1.35 CHF
Bénéfice total = 8,1 millions de CHF.

c)



d)



e) $q_o^*(p) = -4p + \frac{19}{2}$

f) Nouveau prix d'équilibre = 1.- CHF
Quantité d'équilibre = 5.5 millions de barres chocolatées

g)

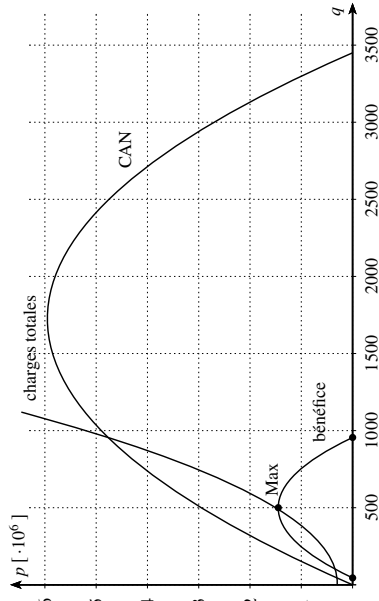
	Différences absolues	Différences relatives
Prix d'équilibre	- 0.75 CHF	- 42,86 %
Quantité d'équilibre	- 0,5 millions	- 8,33 %
Bénéfice unitaire	- 0.75 CHF	- 55,56 %
Bénéfice total	- 4,8 millions CHF	- 59,26 %

h) L'offre va diminuer

i) Il s'agit d'un déplacement vers la gauche

- Exercice 7.6:**
- a) $CAN = p(q) \cdot q = -0,003q^2 + 50q$
 - b) Bénéfice = $CAN - \text{charges totales} = -0,003q^2 + 50q - (0,002q^2 + 3000)$
 - c) Bénéfice max en $q = \frac{-b}{2a} = 5000$ repas, $p(5000) = 35$ CHF

- Exercice 7.7:**
- a) $p(q) = -2q + 6900$
 - b) $CAN = -2q^2 + 6900q$
 - c) Charges totales = $5q^2 - 100q + 300'000$
 - d) Bénéfice total = $-2q^2 + 6900q - (5q^2 - 100q + 300'000) = \dots$
 - e) Seuil de rentabilité en $q = 44,87$ et $q = 955,13$, soit, un peu moins de 45'000 litres et un peu plus de 955'000 litres.
 - f) Bénéfice est maximum pour $q = 500$, et vaut 1'450'000 CHF



Pour le tracé des 3 paraboles:

- CAN: zéros en $x = 0$ et $x = 3450$; sommet en $(1725 ; 5951,250)$.
- Charges: ordonnée à l'origine $(0 ; 300'000)$ et un autre point à choisir. Par exemple: $q = 1000$ et charges = $5'200'000$.
- Bénéfice: zéros en $x = 44,87$ et $x = 955,13$; sommet en $(500 ; 1'450'000)$

- Exercice 7.8:**
- a) $CAN = -2q^2 + 20q$, bénéfice = $-2q^2 + 16q$.
Bénéfice max en $q = 4$ milles disques, $p(4) = 12$ CHF,
Bénéfice = 32'000 CHF
 - b) Bénéfice = $-2q^2 + 16q - 10$. Il est max en $q = 4$ milles disques,
 $p(4) = 12$ CHF, Bénéfice = 22'000 CHF
 - c) Bénéfice = $-2q^2 + 10q$. Il est max pour 2500 disques,
 $p(2,5) = 15$ CHF. Bénéfice = 12'500 CHF