Chapitre 2: Espaces vectoriels

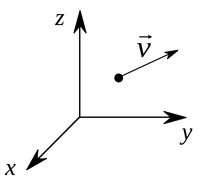
2.1 Introduction et mise en garde

Introduction : Beaucoup de problèmes de mathématique ou de physique vérifient la propriété suivante : si ***u*** et ***v*** sont deux solutions, alors ***u*** + ***v*** est aussi une solution, ainsi que : $\alpha \cdot \boldsymbol{u}$, α étant un nombre réel. De tels problèmes sont dits linéaires et ils sont habituellement plus faciles à résoudre que les problèmes plus généraux (appelés "non linéaires" précisément).

En fait, un grand nombre de problèmes provenant de toutes les branches des mathématiques, ainsi que des applications à la physique (équations de la chaleur, cordes vibrantes, …), à la chimie, à l'économie… sont linéaires du moins en première approximation.

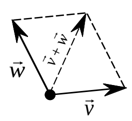
On comprend dès lors l'intérêt qu'il peut y avoir à dégager un cadre mathématique commun à ce type de problèmes, de manière à pouvoir déterminer des méthodes et des algorithmes adaptés. Ce cadre mathématique commun est la notion d'**espace vectoriel**.

Avant de commencer l'étude abstraite, considérons un exemple géométrique qui va nous permettre de visualiser, d'une certaine manière, les propriétés d'un espace vectoriel.

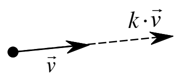


On sait que les physiciens représentent certaines grandeurs par des segments orientés que l'on appelle "vecteurs". Une force, par exemple, n'est pas déterminée uniquement par son intensité, mais aussi par son point d'application et par la direction et le sens suivant lesquels elle s'exerce.

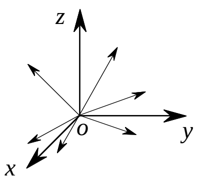
On représente cela par une flèche ayant comme origine le point d'application, de longueur égale à l'intensité de la force et dont le sens et la direction sont ceux de la force.



Sur les vecteurs de **même origine**, on peut définir deux opérations :

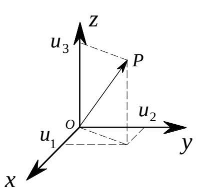


- l'addition définie par la "règle du parallélogramme" ;
- le produit d'un vecteur par un nombre réel α qui donne un vecteur ayant la même direction de même sens si $\alpha > 0$ et de sens contraire si $\alpha < 0$ et dont la longueur est multipliée par $|\alpha|$.



REMARQUE. --- On n'additionne pas de vecteurs d'origines différentes.

La théorie des espaces vectoriels reflète justement cette situation; aussi si l'on veut avoir une visualisation géométrique du problème, il faudra considérer toujours uniquement des vecteurs ayant **tous la même origine *O***. Ainsi, les vecteurs que nous considérerons peuvent être visualisés comme des "flèches" d'origine *O*.



Pour pouvoir faire des calculs, on part de l'observation suivante : à un point *P* du plan - ou de l'espace - est associé un vecteur et un seul (celui qui a *P* comme extrémité). Ainsi les vecteurs du plan peuvent être mis en correspondance avec les coordonnées de *P*, c'est-à-dire avec les couples $(u_1 ; u_2) \in \mathbb{R}^2$. D'une manière analogue, les vecteurs de l'espace sont en correspondance avec les triplets $(u_1 ; u_2 ; u_3) \in \mathbb{R}^3$.

Soit les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, ainsi que les deux opérations:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot u_1 \\ \alpha \cdot u_2 \\ \alpha \cdot u_3 \end{pmatrix}$$

À l'aide de ces 2 opérations, on peut vérifier les propriétés suivantes

A) L'addition est commutative et associative, c'est-à-dire:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w}$$

B) Il existe un vecteur noté $\vec{0}$ tel que $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ pour tout vecteur $\vec{u}$.

C) Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un vecteur $\vec{v}$ tel $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.

D) Quant au produit par des réels α et β, il vérifie les propriétés suivantes:

- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$
- $1\vec{u} = \vec{u}$

Il y a, bien entendu, beaucoup d'autres propriétés qui sont vérifiées, mais comme nous le verrons, celles que nous venons de signaler constituent justement "le cadre mathématique commun à tous les problèmes linéaires".

En d'autres termes, toutes les propriétés essentielles des problèmes linéaires peuvent être dégagées à partir de ces propriétés.

REMARQUE. L'exemple que l'on vient d'étudier est très utile, car il permet d'avoir présent à l'esprit un modèle géométrique qui peut servir de support à l'intuition. Cependant, il est important de comprendre que cette interprétation, même si elle est suggestive, n'est pas essentielle à la théorie. D'abord parce que nous ne considérerons pas seulement des espaces de "dimension" 2 ou 3 comme $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ mais aussi des espaces de dimension supérieure, comme $\mathbb{R}^n$, ou même infinie. D'une manière approximative on peut dire que la "dimension", dont nous donnerons la définition précise par la suite, est liée au nombre des paramètres qui interviennent dans le problème, nombre qui peut être très grand dans ce cas, l'analogie avec les vecteurs de l'espace ordinaire risque de ne pas être d'un grand secours. Ceci dit, le support géométrique est particulièrement important en algèbre linéaire et, en règle générale, il ne faudra pas se priver d'y faire appel.

Conventions d'écriture : En géométrie vectorielle, nous avons symbolisé les vecteurs par une lettre surmontée d'une flèche (par exemple $\vec{v}$). Cette flèche, permettant de différencier nombre et vecteur, n'aura plus de sens si l'on considère des ensembles non géométriques. Nous laisserons tomber cette flèche et, à la place, les vecteurs seront codés en caractère gras italique (par exemple ***v***).

De même, nous n'aurons plus besoin de différencier composantes d'un vecteur et coordonnées d'un point. Nous utiliserons dès lors un codage horizontal pour les composantes d'un vecteur : (par exemple : ***v*** = (0 ; 1 ; 3) vecteur de $\mathbb{R}^3$).

2.2 Définition d'un espace vectoriel

Définition : Un **espace vectoriel** $\boldsymbol{V}$ est un ensemble muni de deux opérations :

(a) une opération appelée **addition** définie par :

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (\boldsymbol{u}\,;\boldsymbol{v}) & \to & \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \end{array}$$

(b) une opération appelée **multiplication scalaire** définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \to & V \\ (\alpha\,;\boldsymbol{v}) & \to & \alpha \cdot \boldsymbol{v} \end{array}$$

Ces deux opérations doivent satisfaire les huit propriétés suivantes :

1. $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

2. $\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V,\ (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$

3. Il existe un élément de V noté $\boldsymbol{0}$ tel que $\forall \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{0}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$

4. Pour tout élément $\boldsymbol{v}$ de V, il existe un élément noté $-\boldsymbol{v}$ dans V tel que $\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$

5. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall \boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V,\ \alpha \cdot (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \alpha \cdot \boldsymbol{v} + \alpha \cdot \boldsymbol{w}$

6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\forall \boldsymbol{v} \in V,\ (\alpha+\beta) \cdot \boldsymbol{v} = \alpha \cdot \boldsymbol{v} + \beta \cdot \boldsymbol{v}$

7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\forall \boldsymbol{v} \in V,\ (\alpha \cdot \beta) \cdot \boldsymbol{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{v})$

8. $\forall \boldsymbol{v} \in V,\ 1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

1. la commutativité
2. l'associativité du +
3. élément neutre de l'addition
4. élément opposé
5. distributivité I
6. distributivité II
7. l'associativité du ·
8. élément neutre pour la multiplication

Exemples :

- L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel pour les lois d'addition et de multiplication usuelles.

- L'ensemble $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1\,;x_2\,;\ldots\,;x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

formé des n-tuples de nombres réels est un espace vectoriel pour les lois définies par :

  - l'addition : $(x_1\,;\ldots\,;x_n) + (y_1\,;\ldots\,;y_n) = (x_1+y_1\,;\ldots\,;x_n+y_n)$
  - la multiplication : $\alpha \cdot (x_1\,;x_2\,;\ldots\,;x_n) = (\alpha x_1\,;\alpha x_2\,;\ldots\,;\alpha x_n)$

- L'ensemble $\mathcal{F}([a\,;b])$ des fonctions réelles définies sur l'intervalle $[a\,;b]$ est un espace vectoriel pour les lois d'addition et de multiplication usuelles des fonctions.

Exemple développé : L'ensemble de tous les binômes $\mathbb{P}_1 = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ est un espace vectoriel pour les lois définies par :

- l'addition : $(ax + b) + (cx + d) = (a + c)x + (b + d)$
- la multiplication : $\alpha \bullet (ax + b) = \alpha ax + \alpha b$

En effet :

1) La commutativité

2) L'associativité du **+**

3) Elément neutre de l'addition

4) Elément opposé

5) Distributivité I

6) Distributivité II

7) Associativité du •

8) Elément neutre du •

Indications pour les exercices :

- *Démontrer qu'un ensemble muni des opérations indiquées est un espace vectoriel reviendra à vérifier les 8 propriétés à l'image de l'exemple précédent.*
- *Démontrer qu'un ensemble muni des opérations indiquées **n'est pas** un espace vectoriel reviendra à montrer **une contradiction** avec l'une des 8 propriétés.*

Exemple: L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des 2 opérations suivantes :

$$(x\,;y) \mathbin{\boldsymbol{+}} (x'\,;y') = (x + x' + 1\,;y + y' + 1) \quad \text{et} \quad k \bullet (x\,;y) = (kx\,;ky)$$

est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2.1 :

a) L'ensemble des matrices $M_{2\times 3}$ muni des opérations habituelles d'addition et de multiplication par un scalaire forme-t-il un espace vectoriel ?

b) Ce résultat se généralise-t-il à l'ensemble des matrices $M_{m\times n}$?

Exercice 2.2 : L'ensemble $\mathbb{P}_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 muni des opérations habituelles sur les polynômes forme-t-il un espace vectoriel ?

Exercice 2.3 :

a) L'ensemble $V = \{1\}$ muni des deux opérations:

$$1 \mathbin{\boldsymbol{+}} 1 = 1 + 1 \quad \text{et} \quad \alpha \bullet 1 = \alpha \cdot 1$$

est-il un espace vectoriel ?

b) Qu'en est-il pour l'ensemble $V' = \{0\}$ muni des 2 opérations:

$$0 \mathbin{\boldsymbol{+}} 0 = 0 + 0 \quad \text{et} \quad \alpha \bullet 0 = \alpha \cdot 0$$

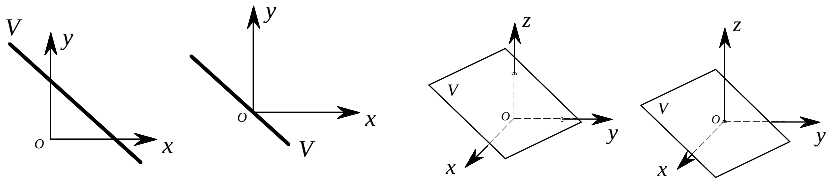
Exercice 2.4 : Pour quelles raisons l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations suivantes n'est pas un espace vectoriel :

l'addition : $(a\ ;\ b) + (c\ ;\ d) = (a + c\ ;\ b + d)$
la multiplication par un scalaire : $\alpha \cdot (a\ ;\ b) = (\alpha a\ ;\ b)$

Exercice 2.5 : Soit V les ensembles de points de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ représentés ci-dessous. Préciser (en justifiant) dans chaque cas si V est un espace vectoriel.

Dans $\mathbb{R}^2$
V représentant une droite

Dans $\mathbb{R}^3$
V représentant un plan



a) **b)** **c)** **d)**

Exercice 2.6 : Soit T l'ensemble des fonctions de $[0\ ;\ 2\pi]$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = a \cdot \cos(x) + b.$$

Montrer que T, munie de l'addition de fonctions et de la multiplication d'une fonction par un nombre réel est un espace vectoriel.

2.3 Familles génératrices, familles libres et bases

Définition : Soit V un espace vectoriel et $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$ une famille de vecteurs de V. Nous dirons qu'un vecteur $\boldsymbol{v}$ de V est **combinaison linéaire** de la famille $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$ s'il existe des scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tels que

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \dots + \alpha_k\boldsymbol{v}_k = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{v}_i$$

Exercice 2.7 : Exprimer le vecteur (4 ; 3 ; 2) de $\mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v}_1 = (1 ; 2 ; 3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1 ; 1 ; 2)$ et $\boldsymbol{v}_3 = (1 ; -1 ; 1)$.

Définition : La famille $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$ est appelée une **famille génératrice de V** si tout vecteur de V peut se représenter comme combinaison linéaire de $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k$.

Exemple 1: La famille (1 ; 2), (3 ; 1), (2 ; 1) forme une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2 : Les vecteurs :
$\boldsymbol{e}_1 = (1 ; 0 ; \dots ; 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0 ; 1 ; \dots ; 0)$, … , $\boldsymbol{e}_n = (0 ; 0 ; \dots ; 1)$
forment une famille génératrice de $V = \mathbb{R}^n$.

Exercice 2.8 : Les familles de vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-elles une famille génératrice ?

a) (1 ; 1) et (2 ; 1) **b)** (1 ; 1) et (3 ; 3) **c)** (1 ; 2)
d) (0 ; 0) et (2 ; 3) **e)** (1 ; 1), (0 ; 1) et (1 ; 0)
f) (3 ; 4) et (4 ; 3)

Exercice 2.9 : Même question pour les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$.

a) (1 ; 0 ; 1), (0 ; 1 ; 0) et (1 ; 1 ; 1)
b) (1 ; 0 ; 1) et (2 ; 1 ; 0)
c) (1 ; 0 ; 0), (0 ; 0 ; 0) et (0 ; 0 ; 1)
d) (1 ; 1 ; 1), (2 ; 1 ; 0), (2 ; 0 ; 1) et (0 ; 0 ; 1)
e) (2 ; 3 ; 4), (3 ; 4 ; 5) et (5 ; 7 ; 10)
f) (1 ; 2 ; 0), (0 ; 1 ; 0) et (1 ; 2 ; 3).

Définition : La famille $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\ \boldsymbol{v}_k$ forme une **famille libre** (ou **linéairement indépendante)** si la seule manière d'obtenir $\boldsymbol{0}$ comme combinaison linéaire des $\boldsymbol{v}_i$ est d'imposer à tous les coefficients d'être nuls.

Autrement dit, $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\ \boldsymbol{v}_k$ forme une famille libre si la seule solution de l'équation :

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

est la solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Dans le cas contraire, la famille sera dite **liée** (ou **linéairement dépendante**).

Exemple : La famille {(1 ; 0 ; -l), (2 ; 1 ; 2), (3 ; -2 ; 0)} de $\mathbb{R}^3$ est-elle libre ?

Exemple : Qu’en est-il de la famille {(1 ; 0 ; -l), (2 ; 1 ; 2), (3 ; 1 ; 1)} ?

Exemple : $\{x + 1, x^2 + 3x, x^2 + x + 2\}$ est une famille libre dans $\mathbb{P}_2$.
Montrer qu’elle est aussi génératrice.

Exercice 2.10 : Parmi les familles définies dans les deux exercices précédents, lesquelles sont libres ?

Exercice 2.11 : Les 3 affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a) Toute famille contenant une famille génératrice est une famille génératrice.
b) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
c) Une famille libre ne contient pas le vecteur nul.

Exercice 2.12 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{P}_2$, montrer que les polynômes suivants sont linéairement dépendants :

$$x^2 + 2x + 3 \quad ; \quad 2x^2 - x - 5 \quad ; \quad 3x^2 + x - 3 \quad ; \quad 2x^2 - x - 4$$

Exercice 2.13 : Dans l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{F} : \mathbb{R} - \{-1 ; 1\} \to \mathbb{R}$, on considère les vecteurs :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} \qquad g(x) = \frac{3}{x-1} \qquad h(x) = \frac{-2}{x+1}$$

La famille $\{ f ; g ; h\}$ est-elle libre ?

Exercice 2.14 : Soit $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ des vecteurs linéairement indépendants dans un espace vectoriel V. Montrer que:
a) $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3$ et $\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$ sont linéairement indépendants.
b) $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_3$ et $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$ sont linéairement dépendants.

Exercice 2.15 : Prouver que, dans un espace vectoriel, les vecteurs $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ sont linéairement indépendants si et seulement si les 3 vecteurs $\boldsymbol{v}_1 + \lambda\boldsymbol{v}_2 + \mu\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_2$ et $\boldsymbol{v}_3$ le sont ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

Proposition 1 : Soit $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel V.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) La famille $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ est libre,

(2) Chaque vecteur $\boldsymbol{v}$ de V peut s'écrire au plus d'une manière comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v}_i$.
Autrement dit, si $\sum \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \sum \beta_i \boldsymbol{v}_i$, alors $\alpha_i = \beta_i$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Preuve:

Exercice 2.16 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{P}_1$ des binômes, on considère les vecteurs suivants :

$$\boldsymbol{p}_1 = 2x + 1 \qquad \boldsymbol{p}_2 = x + 2 \qquad \boldsymbol{p}_3 = 4x + 3$$

a) La famille $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}$ est-elle génératrice ?
b) La famille $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\}$ est-elle libre ?
c) Exprimer $\boldsymbol{p}_3$ comme combinaison linéaire de $\boldsymbol{p}_1$ et $\boldsymbol{p}_2$.

Proposition 2 : La famille $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ est liée si et seulement si un des vecteurs $\boldsymbol{v}_i$ s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

Preuve:

Exercice 2.17 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs suivants :

$$\boldsymbol{v}_1 = (-1\,;\,4\,;\,-4) \qquad \boldsymbol{v}_2 = (3\,;\,0\,;\,2) \qquad \boldsymbol{v}_3 = (1\,;\,2\,;\,-1)$$

Si la chose est possible, exprimer le vecteur $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ uniquement.

Proposition 3 : Si la famille $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ est génératrice et si un des vecteurs $\boldsymbol{v}_i$ est combinaison linéaire des autres vecteurs, alors la famille obtenue à partir de la famille $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ en supprimant ce vecteur reste génératrice.

Preuve:

Exercice 2.18 : Appliquer le théorème précédent à la famille de vecteurs génératrice de $\mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{v}_1 = (-1\,;\,2) \qquad \boldsymbol{v}_2 = (0\,;\,1) \qquad \boldsymbol{v}_3 = (1\,;\,1) \qquad \boldsymbol{v}_4 = (1\,;\,3)$$

afin d'en extraire progressivement une famille génératrice libre.

Définition : **Une base** d'un espace vectoriel est une famille génératrice et libre de cet espace vectoriel.

Exemples :

1) La famille $\boldsymbol{e}_1 = (1\,;\,0\,;\,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0\,;\,1\,;\,0)$ et $\boldsymbol{e}_3 = (0\,;\,0\,;\,1)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
Elle est appelée la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$.

2) La famille $\{1, x, x^2\}$ forme une base de $\mathbb{P}_2$. Il s'agit même de la base canonique.

3) La famille formée des 4 vecteurs suivants $\boldsymbol{v}_1 = (1 ; 1 ; 0 ; 0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0 ; 1 ; 1 ; 0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0 ; 0 ; 1 ; 1)$ et $\boldsymbol{v}_4 = (0 ; 1 ; 0 ; 1)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

4) Proposer une base de $\mathbb{C}$ (avec une justification rapide).

Exercice 2.19 : Soit $\mathbb{P}_4$ l'ensemble des polynômes à une variable de degré inférieur ou égal à 4. Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ? Génératrices ? Des bases ?

a) $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$
b) $\{1, x-1, x^2+2x+1, x^3\}$
c) $\{2x, x+1, x^2+1, x^2-1\}$
d) $\{x^3, x^2+1, x, x-1, x^4+x+1\}$.

Exercice 2.20 : Soit M_2 l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.

a) Proposer une base naturelle (canonique) de M_2 ?
b) Les familles formées des vecteurs suivants sont-elles des bases ?

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2.21 : Soit les deux vecteurs $\boldsymbol{v}_1 = (1\,;2\,;0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0\,;1\,;3)$ de $\mathbb{R}^3$

a) Montrer que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants.
b) Montrer qu'ils n'engendrent pas $\mathbb{R}^3$.
c) Déterminer $\boldsymbol{v}_3$ pour que la famille $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ soit une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Théorème de la base incomplète :

Toute famille libre $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ de V peut être étendue en une famille génératrice de V.

Théorème de la base extraite

Soit $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ est une famille génératrice de V.
Cette famille $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ contient alors un sous-ensemble formant une base.

Remarque : Quel que soit le choix de la base considérée dans un espace vectoriel, celles-ci admettront toutes le même nombre de vecteurs.

Définition : Le nombre de vecteurs formant une base de V s'appelle **la dimension de *V*** et est notée dim V.

Dimension de quelques EV. :

1) La base canonique $\boldsymbol{e}_1 = (1 ; 0 ; \dots ; 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0 ; 1 ; \dots ; 0)$, …, $\boldsymbol{e}_n = (0 ; 0 ; \dots ; 1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ comporte n vecteurs. Cet espace est donc de dimension n.

2) L'espace des matrices carrées M_n admet une base formée de n^2 vecteurs. Il est donc de dimension n^2.

3) L'espace $\mathbb{P}_2$ des polynômes de degré au plus égal à 2 est de dimension 3 car il admet $\{x^2, x, 1\}$ comme base.

Exercice 2.22 : Soit $\mathbb{P}_n = \{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$, l'ensemble des polynômes à une variable de degré inférieur ou égal à n.

a) Montrer que $\mathbb{P}_n$ est un espace vectoriel.

b) Exhiber une base de $\mathbb{P}_n$.
Quelle est la dimension de $\mathbb{P}_n$?

Exercice 2.23 : Soit V un espace vectoriel.
On suppose que la famille $\{\boldsymbol{t}_1, \dots, \boldsymbol{t}_4\}$ issue de V est libre et que la famille $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_4\}$ est génératrice. Quelle est la dimension de V ? Justifier.

Exercice 2.24 : Soit $\mathcal{F}([a ; b])$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur l'intervalle $[a ; b]$ avec les lois d'addition et de multiplication usuelles des fonctions. Déterminer la dimension de cet EV.

Remarques : Dans un espace vectoriel de dimension n,

a) Toute famille libre de n vecteurs est une base.

b) Toute famille génératrice de n vecteurs est une base.

Exercice 2.25 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère les vecteurs (i.e. nombres) suivants :

$$\boldsymbol{z}_1 : 2 - 3\boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{z}_2 : 4 - \boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{z}_3 : 1 + \boldsymbol{i}$$

a) Exprimer $\boldsymbol{z}_3$ comme combinaison linéaire de $\boldsymbol{z}_1$ et $\boldsymbol{z}_2$.

b) Montrer que $\boldsymbol{z}_1$ et $\boldsymbol{z}_2$ forment une base de $\mathbb{C}$.

c) Déterminer dim($\mathbb{C}$).

Composantes d'un vecteur dans une base ordonnée : Pour parler de composantes d'un vecteur dans une base, la donnée de l'ensemble de vecteurs de cette base ne suffit pas, nous devons placer ces vecteurs dans un certain ordre. Une **base ordonnée** désignera une base pour laquelle on a choisi un ordre sur ses vecteurs.

Codages :	base non ordonnée :	$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1 ; \dots ; \boldsymbol{e}_n\}$
	base ordonnée :	$\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1 ; \dots ; \boldsymbol{e}_n)$

Soit V un espace vectoriel, $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1 ; \dots ; \boldsymbol{e}_n)$ une base ordonnée de V et $\boldsymbol{v}$ un vecteur de V. Ce vecteur s'écrit de manière unique sous la forme $\boldsymbol{v} = \sum_i x_i \boldsymbol{e}_i$. Les nombres x_i sont appelés **les composantes** de $\boldsymbol{v}$ dans la base $\mathcal{B}$. La matrice colonne formée par les coefficients x_i se note $\boldsymbol{v}_{\mathcal{B}}$:

$$\boldsymbol{v}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

2.4 Sous-espaces vectoriels

Définition : Soit V un espace vectoriel. Un sous-ensemble W de V est un sous-espace vectoriel (SEV) si :

(0) $\boldsymbol{0} \in W$

(1) $\forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in W, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in W$

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $\forall \boldsymbol{v} \in W, \alpha \cdot \boldsymbol{v} \in W$

Remarque : Un sous-espace vectoriel W de V est en particulier un espace vectoriel pour lequel les lois d'addition et de multiplication par un scalaire sont les restrictions de celles de V.

Exemples :

1. L'espace $\mathbb{P}_2$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{P}_3$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

2. L'ensemble $\{\boldsymbol{0}\}$, les droites passant par l'origine $\{(x_1, y_1) \mid y_1 = kx_1 \text{ avec } x_1 \in \mathbb{R}\}$ pour $k \in \mathbb{R}$ et $\{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ et $\mathbb{R}^2$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

3. Les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont $\{\boldsymbol{0}\}$, les **droites vectorielles** $\Delta = \{k\cdot\boldsymbol{u} \mid k \in \mathbb{R}\}$ passant par l'origine, les **plans vectoriels** $\Pi = \{k\cdot\boldsymbol{u} + m\cdot\boldsymbol{v} \mid k \text{ et } m \in \mathbb{R}\}$ passant par l'origine et $\mathbb{R}^3$ lui-même.

4. Si W est un sous-espace vectoriel de V de même dimension alors $W = V$.

Exemple 1 à compléter : Montrer que $H = \{(x_1 ; x_2 ; x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $\dim(H)$.

Exemple 2 à compléter : L'ensemble $W = \{(x_1 ; x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| = |x_2|\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2.26 : Dans $\mathbb{R}^2$, quelles sont, parmi les parties suivantes, celles qui sont des sous-espaces vectoriels ? Pour ces derniers, en donner la dimension ainsi qu'une base. Représenter graphiquement ces ensembles.

$A = \{(x\,;0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $B = \{(x\,;y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$
$C = \{(0\,;0)\}$ $\quad$ $D = \{(0\,;1)\}$
$E = \{(x\,;y) \mid 2x + y = 0\}$ $\quad$ $F = \{(x\,;y) \mid 2x + y = 3\}$
$G = \{(x\,;2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $H = \{(x\,;y) \mid x^2 + y^2 \geq 0\}$

Exercice 2.27 : Même question pour les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$.

$A = \{(0\,;y\,;0) \mid y \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $B = \{(1\,;y\,;z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$
$C = \{(x\,;y\,;x+y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $D = \{(x\,;x+1\,;0) \mid x \in \mathbb{R}\}$
$E = \{(x\,;y\,;z) \mid ax + by + cz = 0\}$ $\quad$ $F = \{(x\,;y\,;z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Exercice 2.28 : Soit $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
Quelles sont les valeurs possibles pour la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_4\}$? Justifier et donner des exemples pour les cas jugés admissibles (avec figures).

Exercice 2.29 : Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer la dimension du sous-espace vectoriel engendré par la famille (1 ; 2 ; -1 ; 0), (-3 ; 0 ; -2 ; 4) et (2 ; 10 ; -7 ; 4).
Isoler une base et la prolonger en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2.30 : Déterminer les réels a et b pour que (-2 ; a ; b ; 3) appartienne au sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs (1 ; -1 ; 1 ; 2) et (1 ; 2 ; 3 ; 1).

Exercice 2.31 :
a) Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (0 ; 1 ; 0), (1 ; 1 ; 1) et (2 ; 0 ; 1) est $\mathbb{R}^3$ lui-même.

b) Donner une base et la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs (2 ; 1 ; -1), (3 ; 2 ; 1) et (1 ; 0 ; -3).

Exercice 2.32 : Soit $F_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'ensemble des fonctions paires de $F_{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel de $F_{\mathbb{R}}$.

b) Qu'en est-il de l'ensemble des fonctions impaires ?

Exercice 2.33 : Soit $\mathcal{F}([a\,;b])$ l'espace vectoriel des fonctions de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\mathcal{D}([a\,;b])$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $[a\,;b]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a\,;b])$.

Exercice 2.34 : Soit M_2 l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2. Déterminer, parmi les parties suivantes, celles qui sont des sous-espaces vectoriels de M_2. Pour chaque sous-espace vectoriel trouvé, exhiber une base et donner la dimension.

a) L'ensemble des matrices diagonales[1].

b) L'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

c) L'ensemble des matrices symétriques.[2]

2.5 Somme et intersection de sous-espaces vectoriels

Définition : Si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces vectoriels de V, leur somme et intersection sont définies par :

$$V_1 + V_2 = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 , \boldsymbol{v}_1 \in V_1, \boldsymbol{v}_2 \in V_2\}.$$
$$V_1 \cap V_2 = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{v} \in V_1 \text{ et } \boldsymbol{v} \in V_2\}.$$

Proposition : L’ensemble $V_1 + V_2$ est un sous-espace vectoriel de V.

Exercice 2.35 : L’ensemble $V_1 \cap V_2$ est un SEV de V

Théorème : Si V_1 et V_2 sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de V, alors

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Preuve : *En exercice (qui suit).*

[1] Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont les coefficients en dehors de la diagonale principale sont nuls.

[2] Une matrice A est dite **symétrique** si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout i et j.

Exercice 2.36 : **Compléter la preuve du théorème précédent :**

Soit $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ une base de $V_1 \cap V_2$. Comme $V_1 \cap V_2$ est contenue dans .... et ...., par prolongement, on obtient des bases de V_1 et V_2 :

$$V_1 : \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s$$
$$V_2 : \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_t$$

Montrons que $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s, \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_t$ est une base de ……

- Cette famille est .... car tout vecteur $\boldsymbol{u}$ de .... s'écrit comme somme d'un vecteur de V_1 et d'un vecteur de V_2, et donc comme .... des $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{w}_j$ et $\boldsymbol{z}_k$:

$$\boldsymbol{u} = \left(\sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i + \sum_j \beta_j \boldsymbol{w}_j\right) + \left(\sum_i \alpha'_i \boldsymbol{v}_i + \sum_k \gamma_k \boldsymbol{z}_k\right) = \sum_i \ldots\ldots\ldots\ldots \boldsymbol{v}_i + \sum_j \beta_j \boldsymbol{w}_j + \sum_k \gamma_k \boldsymbol{z}_k$$

- Cette famille est .... En effet, montrons que :

$$\sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i + \sum_j \beta_j \boldsymbol{w}_j + \sum_k \gamma_k \boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \text{les } \alpha_i, \beta_j \text{ et } \gamma_k \text{ tous } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

  De cette somme, on a $\sum_k \gamma_k \boldsymbol{z}_k =$ .... est à la fois dans V_1 et dans V_2, et appartient donc à ....
  Comme $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ est une base de $V_1 \cap V_2$, il existe des nombres δ_i tel que

$$\sum_k \gamma_k \boldsymbol{z}_k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow \sum_k \gamma_k \boldsymbol{z}_k + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

  Comme la famille ($\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_t$) est libre (base de ....), tous les γ_k et tous les δ_i sont .... On a donc

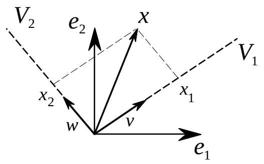
$$\sum_i \alpha_i \boldsymbol{v}_i + \sum_j \beta_j \boldsymbol{w}_j = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

  Ceci donne $\beta_j = \alpha_i = 0$, car la famille formée par les .... et les .... est également libre (base de ....).

Comme la dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs formant une de ses bases on a :

$$\begin{aligned} \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) &= (r + s + t) + r \\ &= (\ldots\ldots + \ldots\ldots) + (\ldots\ldots + \ldots\ldots) \\ &= \dim(V_1) + \dim(V_2) \text{ et l'on conclut.} \end{aligned}$$

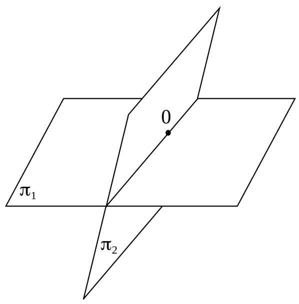
Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}^2$, soit $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ deux vecteurs indépendants.
On considère $V_1 = \{k \cdot \boldsymbol{v} \mid k \in \mathbb{R}\}$ et $V_2 = \{m \cdot \boldsymbol{w} \mid m \in \mathbb{R}\}$ les deux droites vectorielles engendrées par $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$.
On a $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ et $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2$



$V_1 \cap V_2 = \{0\}$ car

$V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2$ car

Exemple 2 : Dans $\mathbb{R}^3$, soit π_1 et π_2 deux plans vectoriels.



On a $\pi_1 \cap \pi_2 = \{$……………………………$\}$ et

$\pi_1 + \pi_2 = \{$……………………$\}$

dim $(\pi_1 + \pi_2) =$……,

dim $(\pi_1) =$ ……, dim $(\pi_2) =$ ……,

dim $(\pi_1 \cap \pi_2) =$ ……

Exercice 2.37 : Déterminer la dimension et une base ordonnée de l'ensemble des solutions de chacun des systèmes :

a) $\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \\ 6x + 5y + z = 0 \end{cases}$

Exercice 2.38 : *Vrai ou faux ?*

a) Une famille libre peut contenir le vecteur nul $\boldsymbol{0}$.

b) Si une famille de vecteurs engendre un espace vectoriel V, alors on peut en extraire une base de V.

c) Si la famille $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_5$ est libre, alors sa sous-famille $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3$ l'est aussi.

d) La base canonique ordonnée de $\mathbb{R}^4$ est :
$\{(1 ; 0 ; 0 ; 0), (0 ; 1 ; 0 ; 0), (0 ; 0 ; 1 ; 0), (0 ; 0 ; 0 ; 1)\}$.