Chapitre 4: Valeurs propres et vecteurs propres

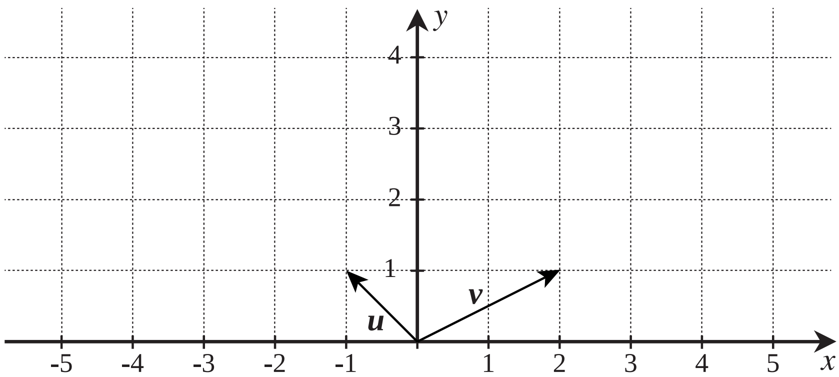
4.1 Introduction et définitions

Introduction : S'il est vrai qu'une transformation linéaire $\boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v}$ peut faire bouger un vecteur dans des directions très variées, il arrive souvent que, sur certains vecteurs, l'effet de A soit extrêmement simple.

Observons ceci sur un exemple de $\mathbb{R}^2$:

Soit $A = \begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 \\ 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}$ = (-1 ; 1) et $\boldsymbol{v}$ = (2 ; 1).

a) Calculer puis construire ci-dessous $A\boldsymbol{u}$, ainsi que $A\boldsymbol{v}$.



b) Calculer $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ puis $A\boldsymbol{w}$. Représenter le tout ci-dessus.

c) Que constate-t-on ?

Définition : Soit L une application linéaire d'un espace vectoriel V dans lui-même. Un vecteur $\boldsymbol{v}$ de V non nul est appelé **vecteur propre de *L*** s'il est **colinéaire** à son **image *L*(*v*)**, ce qui signifie qu'il existe un nombre réel λ tel que $L(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$.
Ce nombre λ s'appelle **valeur propre associée** au vecteur propre.

Remarques :

- On peut également proposer cette définition équivalente :

  Un nombre réel λ est appelé une ***valeur propre*** *de L s'il existe un vecteur v non nul tel que L(**v**) = λ**v**. Ce vecteur **v** s'appelle* ***vecteur propre associé*** *à la valeur propre.*

- Si A est la représentation matricielle de l'application linéaire L, un vecteur propre (resp. valeur propre) de A sera par définition un vecteur propre (resp. valeur propre) de l'application linéaire L.

4.2 Notions intuitives sur les vecteurs propres et valeurs propres

Exemple : Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Montrer que le vecteur $\boldsymbol{v} = (1\ ;\ 0\ ;\ 0)$ est un vecteur propre de valeur propre $\lambda = 2$.

b) Montrer que le vecteur $\boldsymbol{w} = (1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est un vecteur propre dont on déterminera sa valeur propre λ associée

c) Montrer que $\lambda = -1$ est une valeur propre dont on déterminera le vecteur propre associé.

Exercice 4.1 :

a) La valeur $\lambda = 2$ est-elle une valeur propre de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$?

Si oui, déterminer un vecteur propre associé.

b) Le vecteur $\boldsymbol{v} = (1\,;4)$ est-il un vecteur propre de $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$?

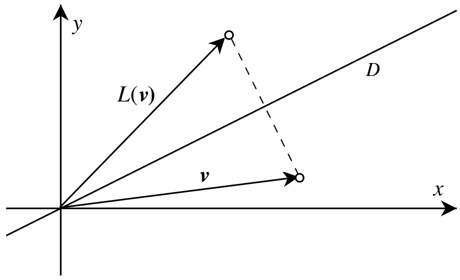
Si oui, déterminer la valeur propre λ associée.

c) La valeur propre $\lambda = 4$ est-elle une valeur propre de

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} ?$$

Si oui, déterminer le ou les vecteurs propres associés.

Exemple : La symétrie L par rapport à une droite D passant par l'origine est une application linéaire.



a) Que peut-on affirmer au sujet de tout vecteur non nul situé sur D ?

b) Que peut-on affirmer au sujet de tout vecteur non nul perpendiculaire à D ?

En déduire 2 vecteurs propres, ainsi que leur valeur propre associée, de l'application L

Exercice 4.2 : La rotation $\mathcal{R}$ d'angle θ autour de l'origine dans le plan est une application linéaire représentée dans les bases canoniques par la matrice :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

a) Si θ n'est pas un multiple de π, montrer que $\mathcal{R}$ n'admet aucun vecteur propre.

b) Si $\theta = \pi$, déterminer les vecteurs propres (et valeurs propres) de $\mathcal{R}$.

c) Si $\theta = 2\pi$, déterminer les vecteurs propres (et valeurs propres) de $\mathcal{R}$.

Exercice 4.3 : Démontrer les affirmations suivantes:

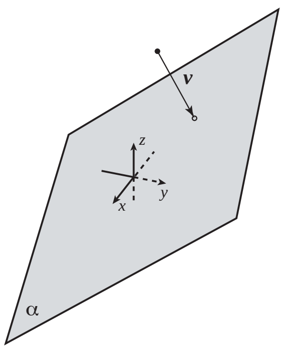
a) Si $\boldsymbol{v}$ est un vecteur propre de L de valeur propre λ et si α est un nombre réel non nul, alors $\alpha\boldsymbol{v}$ est aussi un vecteur propre de L de valeur propre λ.

b) Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont deux vecteurs propres de L de même valeur propre λ et si $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \neq 0$, alors $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ est un vecteur propre de L de valeur propre λ.

c) Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$, linéairement indépendants, sont deux vecteurs propres de L de même valeur propre λ, alors que peut-on affirmer au sujet du vecteur $\boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$ pour tout α, β non nuls ?

Exemple : On considère dans l'espace $\mathbb{R}^3$ la projection $\mathcal{P}$ sur un plan α passant par l'origine, parallèlement à un vecteur $\boldsymbol{v}$.

L'application $\mathcal{P}$, ainsi définie, est une application linéaire.



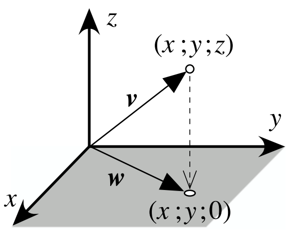
a) Que peut-on affirmer au sujet des vecteurs du plan α ?

b) Que peut-on affirmer au sujet du vecteur $\boldsymbol{v}$ définissant la direction de projection ?

En déduire 2 valeurs propres λ_1 et λ_2 de l'application L, et discuter des vecteurs propres associés.

Définition : Si λ est une valeur propre de l'application linéaire L, on note $V_{\lambda\,=\,\ldots}$ le sous-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs propres de valeur propre $\lambda = \ldots$.

Exemple : On considère la projection orthogonale sur le plan Oxy. Déterminer 2 valeurs propres, leurs vecteurs propres associés, ainsi que les espaces propres.



Exercice 4.4 : Pour chaque transformation linéaire suivante, déterminer des valeurs propres, leurs vecteurs propres associés, ainsi que les espaces propres.

Dans $\mathbb{R}^2$

a) Symétrie orthogonale relativement à l'axe Oy.
b) Projection orthogonale sur la droite $y = x$.

Dans $\mathbb{R}^3$

c) Projection orthogonale sur le plan Oyz.
d) Symétrie orthogonale relativement au plan Oxz.
e) Projection orthogonale sur le plan $y = z$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ la matrice d'une application linéaire L_A.

Sachant que $\lambda = 2$ est une valeur propre de A, déterminer une base associée de l'espace propre $V_{\lambda\,=\,2}$.

Exercice 4.5 : Déterminer l'espace propre associé à chaque valeur propre mentionnée.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = 1$ puis $\lambda = 5$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = -2$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = 3$ puis $\lambda = 8$

Théorème : L'ensemble $\{\boldsymbol{v}_1 ; \dots ; \boldsymbol{v}_r\}$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ d'une matrice carrée A d'ordre n est linéairement indépendant.

Sans preuve.

Exercice 4.6 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & -6 \end{pmatrix}$,

a) En échelonnant la matrice augmentée adéquate, résoudre l'équation $A \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$

b) Expliquer pourquoi cette équation admet "une" solution non triviale, c'est-à-dire différente du vecteur nul $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$.

c) Que peut-on affirmer au sujet de déterminant Det(A) ?

Théorème : L'équation matricielle $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ admet une solution non triviale

$$\Updownarrow$$

$$\text{Det}(A) = 0$$

Justification :

Théorème : Résoudre l'équation matricielle $A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$

$$\Updownarrow$$

Résoudre l'équation matricielle $(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

Preuve : Posons $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$,

$$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n = \lambda v_1 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n = \lambda v_2 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n = \lambda v_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22} - \lambda)v_2 + \cdots + a_{2n}v_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)v_n = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

Théorème : Un scalaire λ est une valeur propre d'une matrice carrée A d'ordre n si et seulement si λ satisfait à **l'équation caractéristique** $\det(A - \lambda I) = 0$

Preuve :

Exemple (début) : Déterminer l'équation caractéristique puis les valeurs propres de l'endomorphisme donné par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$)

Exercice 4.7 : Déterminer l'équation caractéristique et les valeurs propres des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 4.8 : Montrer que l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$h((x\ ;\ y)) = (-y\ ;\ x)$$

n'admet aucune valeur propre.

Exercice 4.9 : Déterminer l'équation caractéristique et les valeurs propres des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Exemple (fin) : Déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de l'endomorphisme donné par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.10 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer l'équation caractéristique A.
b) En déduire les valeurs propres.
c) Pour chaque valeur propre, déterminer l'espace propre associé.
d) En déduire la transformation géométrique définie par cette matrice.

Exercice 4.11 : On considère un endomorphisme défini par une matrice carrée d'ordre n. Justifier l'affirmation suivante :

Un tel endomorphisme admet au plus n valeurs propres différentes.

Exercice 4.12 : Déterminer les valeurs propres de la matrice triangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ce résultat se généralise-t-il à toute matrice carrée d'ordre n ?

Exercice 4.13 : Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 4.14 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer l'équation caractéristique A.
b) En déduire les valeurs propres.
c) Pour chaque valeur propre, déterminer l'espace propre associé.
d) En déduire la transformation géométrique définie par cette matrice.

Exercice 4.15 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la transformation géométrique définie par cette matrice.

Exercice 4.16 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer ses valeurs propres.
b) Déterminer leur espace propre associé.
c) Quelle est la transformation géométrique définie par cette matrice.

Exercice 4.17 : On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer ses valeurs propres.
b) Déterminer leur espace propre associé.
c) Que devient la matrice de cet endomorphisme si l'on considère, non pas la base canonique, mais la base formée par les 3 vecteurs propres ?

Exercice 4.18 : On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ donné dans la base canonique e par la matrice :

$$_eA_e = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'équation caractéristique de f.
b) Donner les valeurs propres de f.
c) Déterminer une base e' de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice associée à f est diagonale et vaut :

$$_{e'}A_{e'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

d) Déterminer les 2 matrices $_{e'}Id_e$ et $_eId_{e'}$ tels que :

$$_eA_e = {_eId_{e'}} \cdot {_{e'}A_{e'}} \cdot {_{e'}Id_e}$$

e) Calculer $\left(_{e'}A_{e'}\right)^n$ puis exprimer $\left(_eA_e\right)^n$ en fonction de $\left(_{e'}A_{e'}\right)^n$.

f) Calculer $\left(_eA_e\right)^6$

Définition : Un endomorphisme est **diagonalisable** s'il existe une base dans laquelle la matrice de cet endomorphisme est diagonale.

Exercice 4.19 : On considère l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ donné, dans la base canonique e par la matrice :

$$H = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & 18 & -6 \\ 18 & 1 & 6 \\ -6 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les espaces propres associés.
b) Diagonaliser H puis donner les matrices de passage et la relation qui lie ces matrices.
c) Montrer que l'image de la base canonique e par cet endomorphisme est une base orthonormée.
d) Caractériser géométriquement cet endomorphisme h.

Exercice 4.20 : On considère T la transformation géométrique suivante :

Symétrie orthogonale vectorielle de direction parallèle à $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

a) Déterminer les 2 valeurs propres de cette transformation
b) Donner une matrice diagonale de T en précisant la base e' à considérer.
c) Donner les matrices de passages permettant d'exprimer T dans la base canonique e.
d) Donner la matrice de cette transformation par rapport à la base canonique.