Analyse II

$3M_{\text{Renf}}$

Jean-Philippe Javet

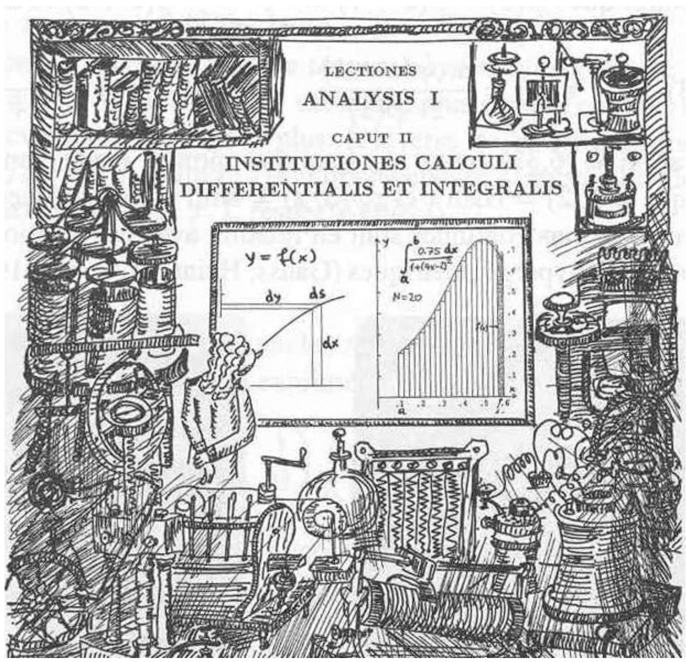


Table des matières

Malgré le soin apporté lors de sa conception, le polycopié que vous avez entre les mains contient certainement quelques erreurs et coquilles. Merci de participer à son amélioration en m'envoyant un mail :

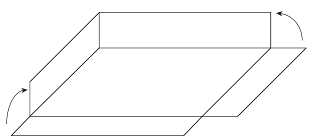
`javmath.ch@gmail.com`

Merci ;-)

7 Optimisation

7.1 Optimisation

Introduction: Dans beaucoup d'applications, les grandeurs physiques ou géométriques sont exprimées à l'aide d'une formule contenant une fonction. Il peut s'agir de la température d'un corps au moment x, du volume d'un gaz dans un ballon sphérique de rayon r, de la vitesse d'un corps au temps t, ...



Disposant de cette fonction, sa dérivée pourra nous être utile pour déterminer ses valeurs extrêmes. Celles-ci sont parfois appelées **valeurs optimales** parce que, vu leur signification, elles constituent les valeurs les plus favorables. Déterminer ces valeurs constitue ce que l'on appelle un **problème d'optimisation**.

Plan de résolution: Voici la marche à suivre pour résoudre un problème d'optimisation :

① Lisez le problème attentivement (plusieurs fois) en réalisant et en complétant parallèlement une figure d'étude pour y indiquer toutes les informations.

② Exprimez la quantité $\boldsymbol{Q}$ à optimiser (une aire, un volume, des coûts, ...) comme fonction d'une ou de plusieurs variables.

③ Si $\boldsymbol{Q}$ dépend de plus d'une variable, disons n variables, trouvez au moins $(n-1)$ équations liant ces variables.

④ Utilisez ces équations pour exprimer $\boldsymbol{Q}$ comme fonction d'une seule variable (par substitutions).

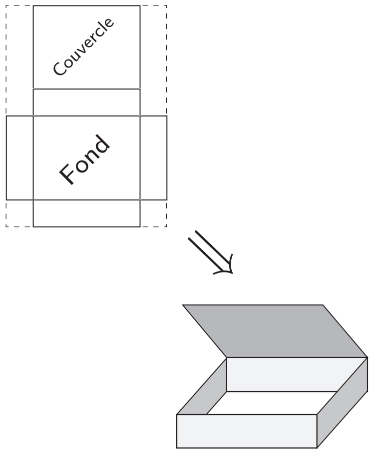
⑤ Déterminez l'ensemble de définition $\mathrm{E_D}$ des valeurs admissibles de cette variable.

⑥ Calcul de la dérivée de $\boldsymbol{Q}$, fonction à optimiser.

⑦ À l'aide d'un tableau de signes de la dérivée de $\boldsymbol{Q}$, étudiez la croissance de cette fonction.

⑧ Calculez les extremums de $\boldsymbol{Q}$ sans oublier de contrôler ce qui se passe au bord de $\mathrm{E_D}$.

⑨ Répondez finalement à la question posée à l'aide d'une phrase.



Exemple 1: On dispose d'une feuille de carton rectangulaire dont les dimensions sont 48×35 cm. On y découpe le patron représenté ci-contre que l'on referme selon les plis pour créer une boîte avec son couvercle. Quel sera le volume maximal de la boîte que l'on pourra ainsi construire ?

① Lisez le problème attentivement (plusieurs fois) en y indiquant sur la figure toutes les informations.

② Exprimez la quantité $\boldsymbol{V}$ à optimiser comme fonction d'une ou de plusieurs variables :

③ Comme $\boldsymbol{V}$ dépend de 3 variables, trouvez 2 équations liant ces variables :

④ Utilisez ces équations pour exprimer $\boldsymbol{V}$ comme fonction $\boldsymbol{V(x)}$ d'une seule variable (par substitutions) :

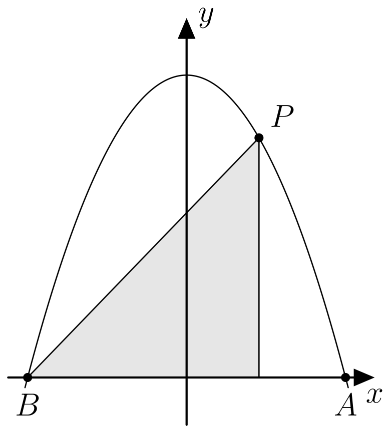
⑤ Le problème a un sens si x appartient à l'ensemble :

⑥ La dérivée de $\boldsymbol{V(x)}$ est :

⑦ Signe de $\boldsymbol{V'(x)}$ et croissance de $\boldsymbol{V(x)}$:

⑧ Au bord du domaine puis ⑨ réponse finale :

Exemple 2: La parabole d'équation $y = -\frac{2}{9}x^2 + 8$ coupe l'axe des abscisses en A et B.



Le point $P(x\,;y)$ se déplace sur la parabole entre A et B.

Déterminer les coordonnées du point P pour que l'aire du triangle rectangle grisé soit maximum.

① Lisez le problème attentivement (plusieurs fois) en y indiquant sur la figure toutes les informations.

② La quantité à optimiser est .... Son expression est :

③ Effectuer les calculs nécessaires pour exprimer cette aire :

④ La quantité à optimiser en fonction d'une seule inconnue :

⑤ Le problème a un sens si x appartient à l'ensemble :

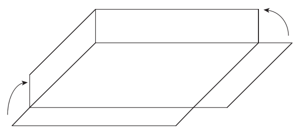
⑥ La dérivée de $\boldsymbol{A(x)}$ est :

⑦ Signe de $\boldsymbol{A'(x)}$ et croissance de $\boldsymbol{A(x)}$:

⑧ Au bord du domaine puis ⑨ réponse finale :

Exercice 7.1: On enlève un carré à chaque coin d'une pièce de carton rectangulaire de 22 cm × 18 cm et on relève ensuite les rectangles latéraux pour former une boîte sans couvercle.

Quelle doit être la dimension des 4 carrés enlevés pour obtenir la boîte de volume maximale ?

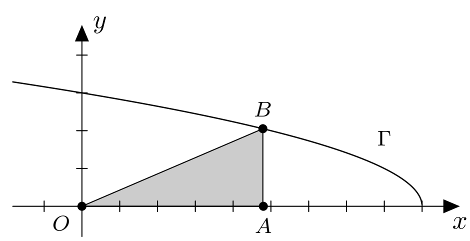


Exercice 7.2: Quelle est la valeur minimale du produit de deux nombres si leur différence est égale à 12 ?

Exercice 7.3: On veut clôturer un pâturage de forme rectangulaire devant avoir une superficie d'un kilomètre carré.

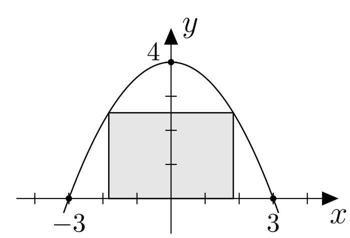
Le pâturage est borné par une route rectiligne sur l'un de ses côtés. Pour clôturer le long de la route, il en coûte 500.- fr. le km, clôturer les autres côtés revient à 300.- fr. le km.
Quelles sont les dimensions du pâturage qui minimisent les coûts ?

Exercice 7.4: On considère le triangle rectangle OAB situé dans le premier quadrant dont le point B parcourt la courbe Γ d'équation $y = \sqrt{9-x}$.



Déterminer les coordonnées du point A pour que l'aire du triangle soit maximale.

Exercice 7.5: Soit la parabole de sommet $S(0\,;4)$. Le rectangle hachuré a une aire maximale.
Quelles sont ses dimensions ?



Exercice 7.6: On considère le triangle ABC défini par :

$$A(3\,;0),\ B(-3\,;0),\ C(0\,;6).$$

On inscrit dans ce triangle un rectangle $PQRS$ dont le côté PQ s'appuie sur AB.
Déterminer pour quelle(s) abscisse(s) de P le rectangle ainsi construit a une aire maximale.

Exercice 7.7: Déterminer les coordonnées des points de la courbe $y = x^2 - 9$ dont la distance à l'origine est minimale.

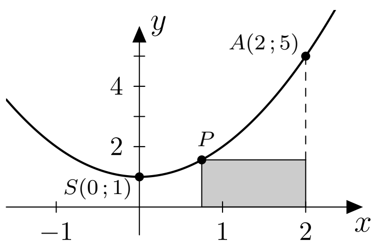
Exercice 7.8: Déterminer, pour un volume donné de $V = 1{,}75 \text{ dm}^3$, les dimensions de la boîte cylindrique qui utilise le minimum de matière première.

Exercice 7.9: Soit ABC est un triangle isocèle tel que $AB = AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm. M est un point de AB. La parallèle à BC passant par M coupe AC en N ; la parallèle à AB passant par N coupe BC en P. On pose $AM = x$.

a) Pour quelle valeur de x l'aire du parallélogramme $MNPB$ est-elle maximum ?

b) Pour quelle valeur de x le parallélogramme $MNPB$ est-il un losange ?

Exercice 7.10:



a) Déterminer l'équation de la parabole représentée ci-contre.

b) Pour quel point $P(x\,;y)$ de la parabole l'aire du rectangle grisé est-elle maximale ?

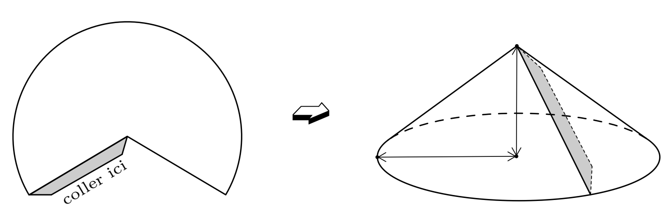
$$0 \leqslant x \leqslant 2$$

c) Calculer l'aire maximale du rectangle grisé.

Exercice 7.11: Une feuille de papier doit contenir 600 cm^2 de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent avoir 5 cm chacune, et celles de côté 3 cm chacune. Déterminer les dimensions de la feuille pour lesquelles il faudra un minimum de papier.

Exercice 7.12: Le propriétaire d'un champ estime que s'il plante 60 poiriers, le rendement moyen sera de 480 poires par arbre et que ce rendement diminuera de 5 poires par arbre pour chaque poirier additionnel planté dans le champ. Combien le propriétaire devrait-il planter de poiriers pour que le rendement du verger soit maximal ?

Exercice 7.13: On dispose d'un disque en carton flexible de rayon 10 cm, d'une paire de ciseaux et d'un tube de colle. Si l'on découpe un secteur du disque, on peut replier la partie restante et coller ensemble les arêtes découpées. On obtient ainsi un cône de révolution (voir figure).
Parmi tous les cônes possibles, fabriqués selon ce procédé, il en est un dont le volume est maximal. Calculer sa hauteur.



Exercice 7.14: On fait tourner un rectangle de périmètre 60 cm autour de l'un de ses axes de symétrie. Déterminer les dimensions du rectangle pour que le corps de révolution ainsi obtenu ait :

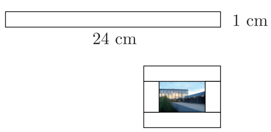
a) le plus grand volume ;

b) la plus grande aire latérale ;

c) la plus grande aire totale.

Exercice 7.15: Un ébéniste veut fabriquer un tiroir dont la profondeur, de l'avant à l'arrière, est de 40 cm et dont le volume est de 10'000 cm^3.
La face avant du tiroir (en chêne) coûte 0,08 fr. par cm^2 et les autres faces du tiroir (en épicéa) coûtent 0,04 fr. par cm^2.
Quelles doivent être les dimensions du tiroir pour que le coût de fabrication soit minimal ?

Exercice 7.16: Un photographe désire fabriquer un cadre pour une photo rectangulaire à partir d'une planche de 24 cm de long et 1 cm de large. Comment devra-t-il couper cette planche pour que l'aire intérieure du cadre soit maximale ?



Exercice 7.17: Un camion doit effectuer régulièrement un trajet de 1'500 km. Lorsqu'il roule à la vitesse moyenne v, exprimée en km/h, sa consommation $C(v)$, exprimée en litres pour 100 km, est donnée par la relation :

$$C(v) = \frac{600}{v} + \frac{v}{3}.$$

Le salaire horaire du chauffeur est de 26 francs et le litre de gasoil coûte 2 francs.

a) Montrer que le prix de revient du voyage $P(v)$ peut s'exprimer en francs par :

$$P(v) = \frac{57'000}{v} + 10v.$$

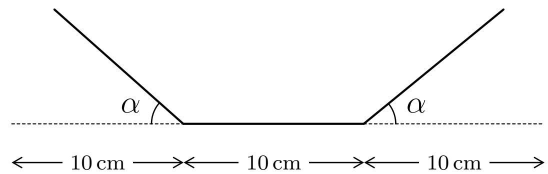
b) Quelle doit être la vitesse moyenne v pour minimiser le prix de revient du voyage ?

Pause sourire: *Lors d'un grand jeu télévisé, les trois concurrents se trouvent être un ingénieur, un physicien et un mathématicien. Ils ont une épreuve à réaliser. Cette épreuve consiste à construire une clôture tout autour d'un troupeau de moutons en utilisant aussi peu de matériel que possible.*
L'ingénieur fait regrouper le troupeau dans un cercle, puis décide de construire une barrière tout autour.
Le physicien construit une clôture d'un diamètre infini et tente de relier les bouts de la clôture entre eux jusqu'au moment où tout le troupeau peut tenir dans le cercle.
Voyant ça, le mathématicien construit une clôture autour de lui-même et se définit comme étant à l'extérieur.

7.2 Optimisation avec des fonctions trigonométriques

Introduction: L'objectif de ce paragraphe est d'appliquer la même démarche de résolution d'un problème d'optimisation, mais sur une fonction de type trigonométrique.

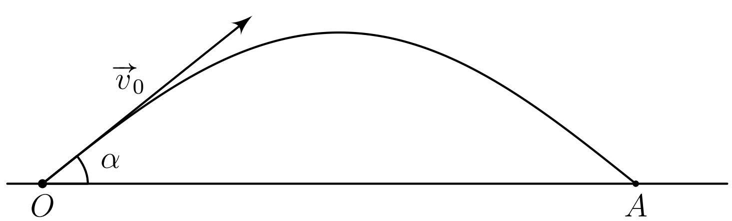
Exemple 3: Une gouttière est obtenue en repliant de chaque côté un tiers d'une longue feuille de zinc de 30 cm de large. Comment faut-il choisir α pour que la gouttière puisse retenir la plus grande quantité d'eau possible ?



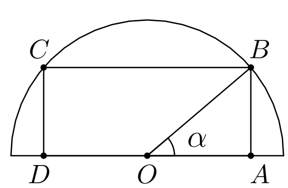
Exercice 7.18: La portée $P = OA$ d'un projectile lancé (dans le vide) avec une vitesse initiale v_0 et un angle d'élévation α est donnée par :

$$P(\alpha) = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g},$$

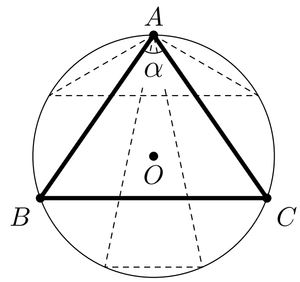
g étant l'accélération de la pesanteur. Pour une vitesse initiale donnée, déterminer la valeur de l'angle α pour laquelle la portée est maximale.



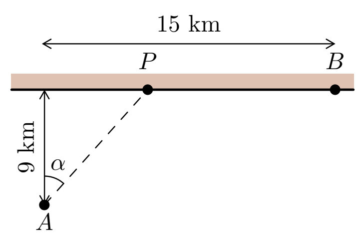
Exercice 7.19: Un rectangle $ABCD$ est inscrit dans un 1/2 cercle de diamètre égal à 2 cm. Déterminer le rectangle d'aire maximale en prenant l'angle α comme variable.



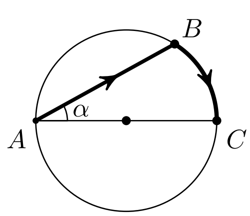
Exercice 7.20: Parmi tous les triangles ABC isocèles de sommet A inscrits dans un cercle de rayon 1, lequel admet une aire maximum ?
Indication : travailler dans le triangle BOC.



Exercice 7.21: Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h.
La côte étant supposée rectiligne, déterminer l'angle α puis la position du point d'accostage (point P) pour que le temps de parcours soit minimal.



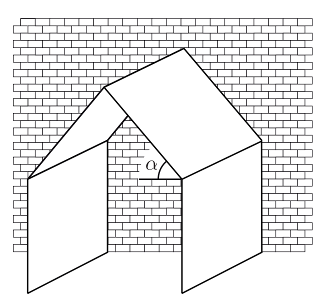
Exercice 7.22: Un promeneur part du point A situé au bord d'un lac circulaire de 2 km de rayon et veut atteindre le point C diamétralement opposé le plus rapidement possible. Il peut aller à pied à la vitesse de 4 km/h ou en barque à la vitesse de 2 km/h.
Selon quel angle α par rapport au diamètre doit-il orienter sa barque ?



Exercice 7.23:

a) Avec 4 planches carrées de côté 10 dm, on fabrique une niche à chien contre le mur d'une maison.
Déterminer l'angle α afin que le volume de la niche soit maximal.

b) Généraliser la démarche pour 4 planches de coté a.



8 Les fonctions exponentielles et logarithmiques

8.1 Quelques rappels

Les fonctions *exponentielle naturelle* et *logarithme naturel* : ce qu'il faut en savoir :

Fonction *exponentielle naturelle*

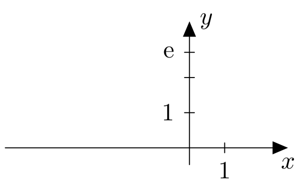
① Définition :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$$

Rappel : la base de l'exponentielle est le nombre e = 2,71828 . . .

② $\mathbf{E_D}$ =

③ Repr. graphique :



④ Zéro de la fonction :

⑤ Tableau de signes :

e^x	

⑥ Asymptotes :

Fonction *logarithme naturel*

① Définition :

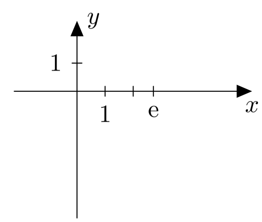
$$\begin{array}{rcl} & \rightarrow & \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

La fonction $\ln(x)$ a été définie comme la fonction réciproque de e^x :

$$\begin{array}{lll} a \longmapsto & & \longmapsto \\ -1 \longmapsto & & \longmapsto \\ b \longmapsto & & \longmapsto \\ 2 \longmapsto & & \longmapsto \end{array}$$

② $\mathbf{E_D}$ =

③ Repr. graphique :



④ Zéro de la fonction :

⑤ Tableau de signes :

$\ln(x)$	

⑥ Asymptotes :

Introduction: *La croissance de la population, l'augmentation du capital, l'inflation sont des exemples d'utilisation des fonctions exponentielles.*
En 2e année, nous avons eu l'occasion de travailler avec des formules contenant une expression exponentielle. Dans ce chapitre, nous aborderons cette même notion sous une forme fonctionnelle. Nous terminerons par des études de fonctions exponentielles.

Les règles de calculs de e^x et $\ln(x)$ à connaître

$\mathrm{e}^0 = 1$	$\leftrightarrow$	$\ln(1) = 0$
$\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$	$\leftrightarrow$	$\ln(\mathrm{e}) = 1$
$\mathrm{e}^{\ln(x)} = \ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$		
si x et $y \in \ldots$		si x et $y \in \ldots$
$\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$	$\leftrightarrow$	$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
$\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y} = \mathrm{e}^{x-y}$	$\leftrightarrow$	$\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
$(\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{x \cdot y}$	$\leftrightarrow$	$\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$

Exemple 1: Résoudre les équations suivantes :

a) $\ln(x-2) = 4$ **b)** $\mathrm{e}^{x+4} = 5$

Exemple 2: Résoudre les équations suivantes :

a) $\ln(x+3) = \ln(2x+7)$ **b)** $\ln\left(\dfrac{x+3}{2-x}\right) = 0$

Exercice 8.1: Préciser E_D puis résoudre les équations suivantes :

a) $\ln(x) = 1$ **b)** $e^{x+3} = 5$

c) $\ln(x-4) = 4$ **d)** $e^{2x-1} = -8$

e) $e^{x/10} = 7$ **f)** $\ln(x) = 0$

g) $\ln(x^2) = 0$ **h)** $\ln(2x) - \ln(5x-8) = 0$

i) $\ln\left(\dfrac{2x}{5x-8}\right) = 0$ **j)** $e^{x^2} = 4$

Exemple 3: Déterminer $\mathrm{E_D}$, les zéros et le tableau de signes de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{x}$$

Exercice 8.2: Déterminer l'$\mathrm{E_D}$, les zéros et le signe de f définie par :

a) $f(x) = \ln(2-4x)$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{1-x}\right)$

d) $f(x) = \dfrac{\ln(x)+3}{\ln(x)-2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\mathrm{e}^x}$

f) $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+x}}$

g) $f(x) = (x+3)\,\mathrm{e}^{1/x}$

h) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x+3}}$

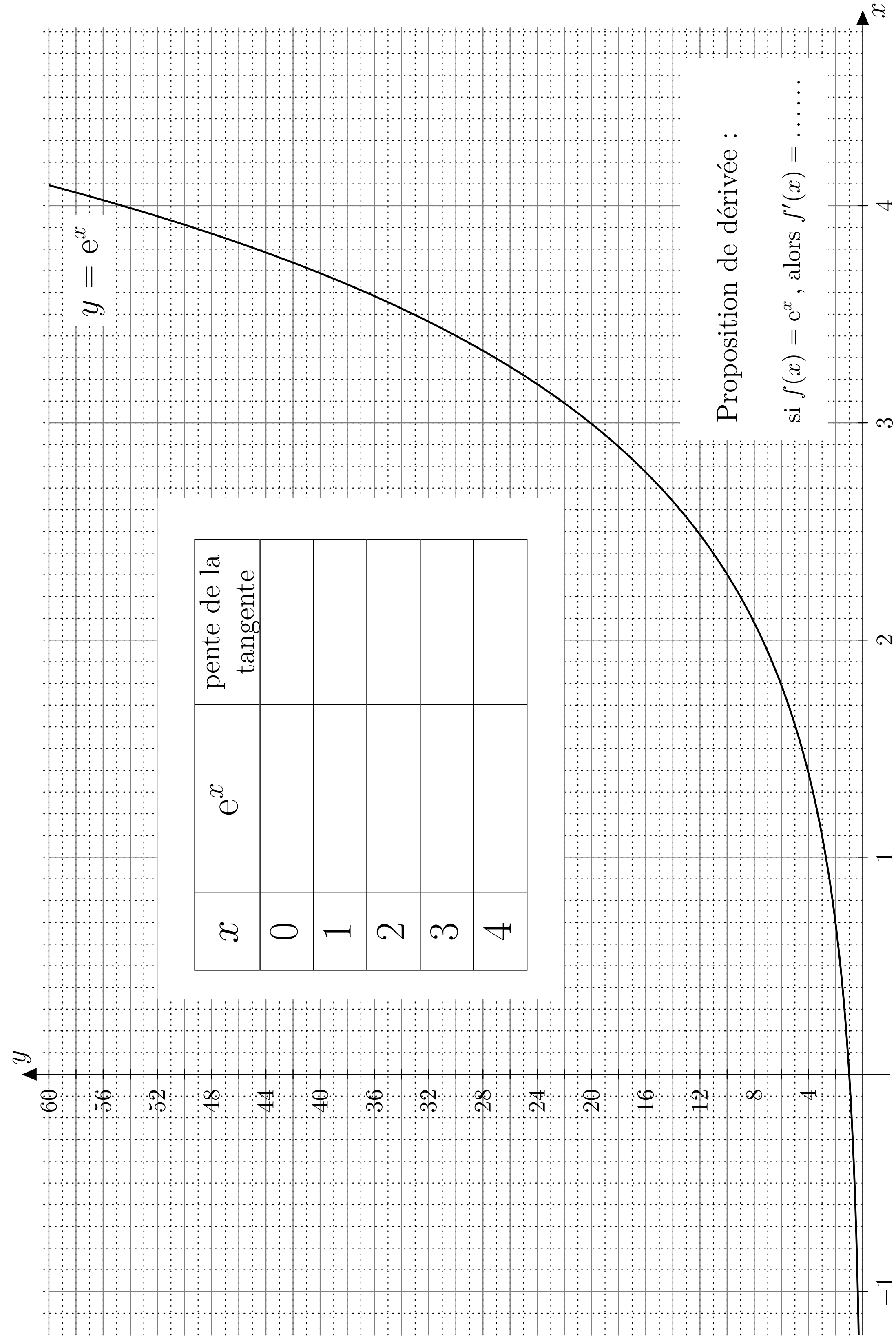
8.2 Calculs de la dérivée de $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $f(x) = \ln(x)$

Démarche: Formellement, nous devrions déterminer la dérivée f' de ces fonctions exponentielle et logarithme en utilisant la formule :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En fait, nous nous contenterons d'estimer la valeur de la **pente de la tangente** à $f(x) = \mathrm{e}^x$ et à $g(x) = \ln(x)$ en certains points puis nous tenterons d'en déduire la fonction dérivée f' et g' .

Exercice 8.3: À l'aide du graphique, compléter le tableau de valeurs de la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^x$ ainsi que la pente de la tangente en ces points. En déduire une proposition pour la dérivée de f.

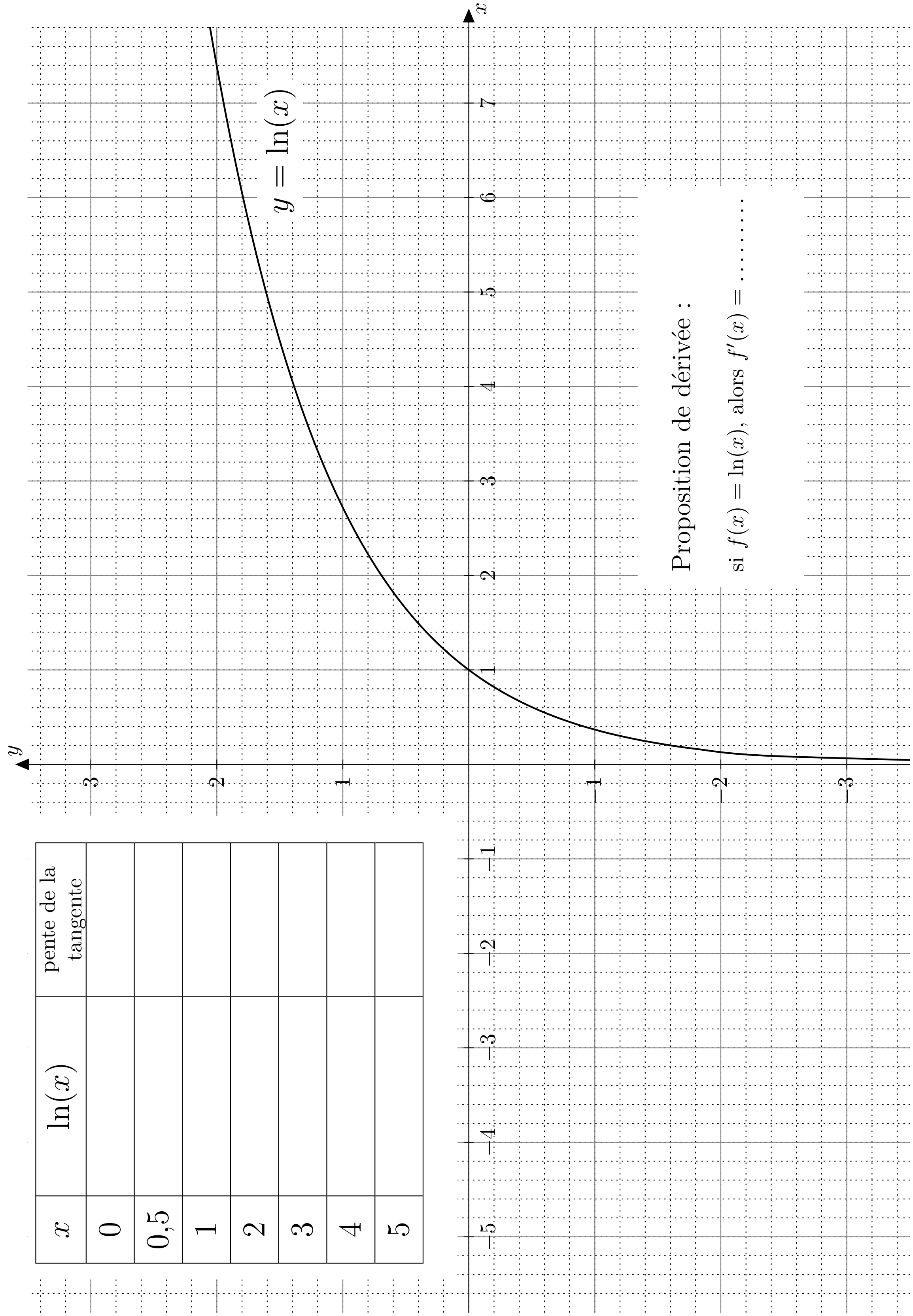


x	e^x	pente de la tangente
0		
1		
2		
3		
4		

Proposition de dérivée :

si $f(x) = \mathrm{e}^x$, alors $f'(x) = \ldots\ldots$

Exercice 8.4: À l'aide du graphique, compléter le tableau de valeurs de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x)$ ainsi que la pente de la tangente en ces points. En déduire une proposition pour la dérivée de f.



Proposition de dérivée :

si $f(x) = \ln(x)$, alors $f'(x) = \ldots\ldots\ldots$

x	$\ln(x)$	pente de la tangente
0		
0,5		
1		
2		
3		
4		
5		

1re règle: La dérivée de la fonction exponentielle :

$$\boxed{f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^x}$$

2e règle: La dérivée de la fonction logarithme :

$$\boxed{f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}}$$

3e et 4e règle: La dérivée de fonctions composées en $\mathrm{e}^{\cdots}$ et $\ln(\ldots)$.

$$g(x) = \mathrm{e}^{f(x)} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \mathrm{e}^{f(x)} \cdot \boldsymbol{f'(x)}$$

$$g(x) = \ln(f(x)) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot \boldsymbol{f'(x)}$$

Exemple 4: **a)** Soit $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$

alors $f'(x) = \mathrm{e}^{3x} \cdot \boldsymbol{(3x)'} = \mathrm{e}^{3x} \cdot 3 = \underline{\underline{3\,\mathrm{e}^{3x}}}$

b) Soit $f(x) = (x^2 + x + 1)\,\mathrm{e}^{-2x}$

alors $f'(x) = (x^2 + x + 1)' \cdot \mathrm{e}^{-2x} + (x^2 + x + 1)\,(\mathrm{e}^{-2x})'$

$$= (2x + 1) \cdot \mathrm{e}^{-2x} + (x^2 + x + 1) \cdot \mathrm{e}^{-2x} \cdot \boldsymbol{(-2)}$$

$$= \mathrm{e}^{-2x} \cdot (2x + 1 - 2x^2 - 2x - 2) = \underline{\underline{(-2x^2 - 1)\,\mathrm{e}^{-2x}}}$$

c) Soit $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{x+1}}$

alors $f'(x) =$

d) Soit $f(x) = \ln(5x)$

alors $f'(x) = \dfrac{1}{5x} \cdot \boldsymbol{(5x)'} = \underline{\underline{\dfrac{1}{x}}}$

e) Soit $f(x) = \ln(2x^2)$

alors $f'(x) =$

Exemple 4 (suite): **f)** Soit $f(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln(x) + 2}$

$$\text{alors } f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln(x) + 2) - (\ln(x) - 1)\frac{1}{x}}{(\ln(x) + 2)^2}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(x) + 2 - \ln(x) + 1}{(\ln(x) + 2)^2} = \underline{\underline{\frac{3}{x(\ln(x) + 2)^2}}}$$

Exercice 8.5: Déterminer l'$\mathrm{E_D}$, les zéros et la dérivée de f définie par :

a) $f(x) = \mathrm{e}^{5x}$

b) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$

c) $f(x) = \mathrm{e}^{1/x}$

d) $f(x) = \ln(-4x + 5)$

e) $f(x) = \ln\left(x^2 - x\right)$

f) $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{1/x}$

g) $f(x) = x(\ln(x) - 1)$

h) $f(x) = \dfrac{\ln(x) - 2}{\ln(x) - 1}$

i) $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 3\,\mathrm{e}^{x} + 2$ (*indication : il s'agit d'une ... maquillée !!*)

Exercice 8.6:

a) Démontrer que la tangente à la courbe $y = \mathrm{e}^x$ au point d'abscisse $x = 1$ passe par l'origine.

b) Démontrer que la tangente à la courbe $y = \ln(x)$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$ passe par l'origine.

Exercice 8.7: La capacité pulmonaire C d'une personne en fonction de son âge est donnée par la fonction :

$$C(t) = \frac{110\,\big(\ln(t) - 2\big)}{t}$$ avec t l'âge exprimé en année et $t > \mathrm{e}^2$

a) Calculer la capacité pulmonaire à 10, 20, 30 et 70 ans.

b) Calculer l'âge auquel la capacité pulmonaire d'une personne est maximale.

Devinette: Logarithme et exponentielle sont au restaurant. Qui paie l'addition ?

C'est exponentielle car logarithme népérien...

8.3 Calculs de limites (utiles pour les études fonctions)

Rappel:

- $\dfrac{\text{nbre pos}}{+\infty} = 0^+$ $\qquad \dfrac{\text{nbre pos}}{-\infty} = 0^-$

  $\dfrac{\text{nbre neg}}{+\infty} = 0^-$ $\qquad \dfrac{\text{nbre neg}}{-\infty} = 0^+$

- $\dfrac{\text{nbre pos}}{0^+} = +\infty$ $\qquad \dfrac{\text{nbre pos}}{0^-} = -\infty$

  $\dfrac{\text{nbre neg}}{0^+} = -\infty$ $\qquad \dfrac{\text{nbre neg}}{0^-} = +\infty$

Exercice 8.8: Compléter les limites suivantes :

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \text{nbre}} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to \text{nbre}} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow$
- $\lim\limits_{x\to \text{nbre}} f(x)\cdot g(x) = \ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to \text{nbre}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots\ldots\ldots$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \text{nbre}} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to \text{nbre}} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow$
- $\lim\limits_{x\to \text{nbre}} f(x)\cdot g(x) = \ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to \text{nbre}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots\ldots\ldots$

c) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \text{nbre}} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to \text{nbre}} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow$
- $\lim\limits_{x\to \text{nbre}} f(x)\cdot g(x) = \ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to \text{nbre}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots\ldots\ldots$

d) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \text{nbre}} f(x) = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to \text{nbre}} g(x) = 0^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow$
- $\lim\limits_{x\to \text{nbre}} f(x)\cdot g(x) = \ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to \text{nbre}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots\ldots\ldots$

e) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \text{nbre}} f(x) = 0^- \\ \lim\limits_{x\to \text{nbre}} g(x) = 0^- \end{array}\right\} \Longrightarrow$
- $\lim\limits_{x\to \text{nbre}} f(x)\cdot g(x) = \ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to \text{nbre}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots\ldots\ldots$

f) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \text{nbre}} f(x) = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to \text{nbre}} g(x) = 0^- \end{array}\right\} \Longrightarrow$
- $\lim\limits_{x\to \text{nbre}} f(x)\cdot g(x) = \ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to \text{nbre}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots\ldots\ldots$

g) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \text{nbre}} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to \text{nbre}} g(x) = \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow$

- $\lim\limits_{x\to \text{nbre}} f(x)\cdot g(x) = \ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to \text{nbre}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots\ldots\ldots$

h) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \text{nbre}} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to \text{nbre}} g(x) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$

- $\lim\limits_{x\to \text{nbre}} f(x)\cdot g(x) = \ldots\ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to \text{nbre}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ldots\ldots\ldots$

Devinette (suite): Nos amis Logarithme et Exponentielle sont maintenant sur un bateau. Tout à coup, Logarithme est terrifié : « Attention, on dérive ! ». Que va répondre Exponentielle ?

« Je m'en fiche, ça ne change rien. . . »
Et Logarithme d'ajouter « Moi, c'est l'inverse»

Cas indéterminés: Lors du calcul de limites, il arrive que l'on obtienne une expression que l'on **ne** peut pas **directement déterminer**. Il faudra les étudier au cas par cas pour "lever" les **indéterminations**.

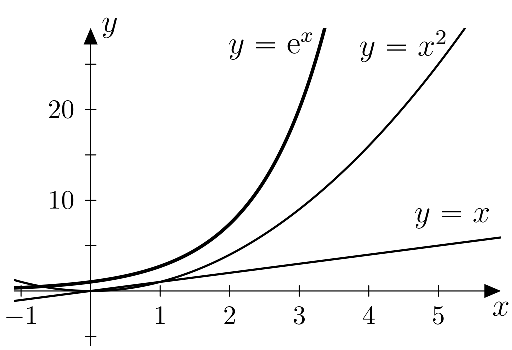
Voici 3 cas d'indétermination :

$$\frac{0}{0} \qquad\qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad\qquad 0\cdot(\pm\infty)$$

Exercice 8.9: Le but de cet exercice est de "lever" les limites indéterminées suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1$^{\text{er}}$ cas : $n = 1$ et 2 : En observant les graphiques suivants, compléter les limites :

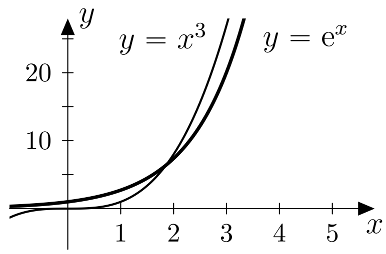


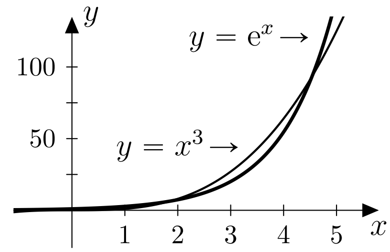
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = \ldots\ldots$

Vous constatez que "e^x *croît plus vite* que x et x^2".

Ceci va-t-il se confirmer également avec x^3 ?

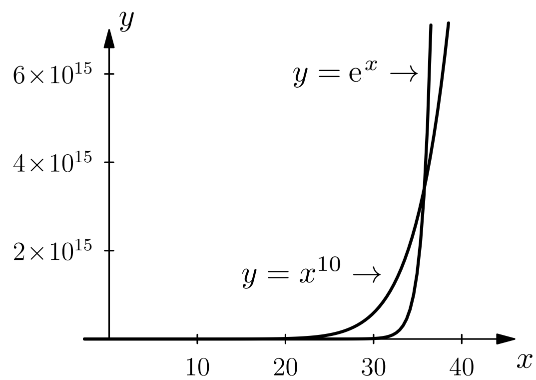
2ᵉ cas : $n = 3$: Justifiez-le à l'aide des deux graphes suivants :





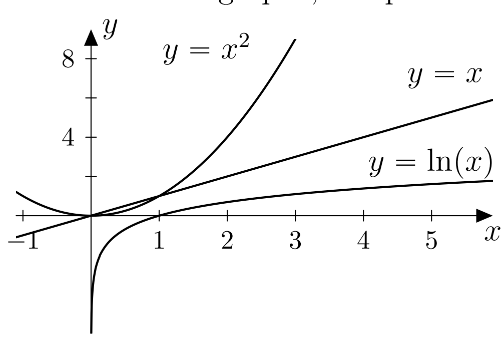
Laquelle des deux fonctions semble-t-elle croître le plus rapidement ?

3ᵉ cas : $n = 10$: En observant le graphique suivant, compléter les limites :



- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{10}} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{10}}{e^x} = \ldots\ldots$

Exercice 8.10: En observant le graphe, compléter les limites (pour $n \in \mathbb{N}$)



- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = \ldots\ldots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\ln(x)} = \ldots\ldots$

La règle du podium: Les deux exercices précédents nous ont permis d'observer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\ln(x)} = +\infty$$

Vous trouverez encore d'autres limites pratiques dans votre formulaire.

Exercice 8.11: Les limites suivantes sont-elles déterminées ?
À l'aide de votre calculatrice, estimer ces limites

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\ln(x)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \ln(x)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-5x}$

Exemple 5: Calculer les limites suivantes

La règle du podium

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \cdot e^{-x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot e^{1/x}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{4x}$

Exercice 8.12: Calculer les limites suivantes, en essayant, si nécessaire, de se rapporter à une situation de “podium” du type :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k}\ ,\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln(x)}\ ,\quad \ldots$$

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{e^{2x}}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\ln\left(x^3\right)$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\,x$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{x}\ln(-x)$ **e)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3\,e^{3x-5}$ **f)** $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{e^{1/x}}{x^2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} e^{1/x}\,x^2$ **h)** $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$

Encore 2 formules:

- $\displaystyle\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}$
- $\displaystyle\lim_{x\to a} \ln(f(x)) = \ln\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$

Exemple 6: Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{3x+4}{x-2}}$

Exercice 8.13: Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2-3x+2}{2x^2}}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{-2x}{x^2-5}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{3x^2+2}{2x}}$ **e)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{3x^2-3x+2}{x^2-5x+2}\right)$ **f)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Exercice 8.14: Le but de cet exercice est d’“estimer” $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$

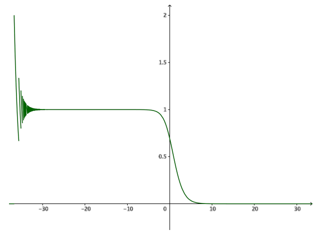
a) en “remplaçant” naïvement x par $-\infty$

b) à l’aide de la calculatrice en complétant le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-1	-10	-20	-25	-30
$\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$					

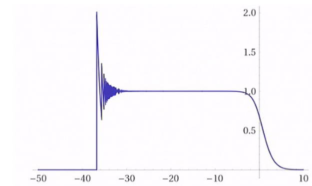
c) à l'aide 4 des représentations graphiques suivantes :

GeoGebra



`www.geogebra.at`

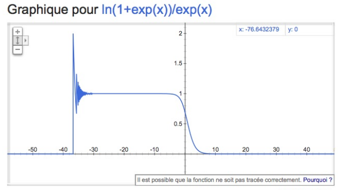
WolframAlpha



`www.wolframalpha.com`

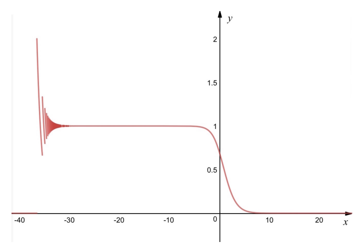
Google

Graphique pour ln(1+exp(x))/exp(x)



`www.google.com`

Desmos



`www.desmos.com/calculator`

d) Finalement, à l'aide de WolframAlpha, nous obtenons :

Limit

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\log_e(1+e^x)}{e^x} = 1$$

e) Comment expliquez-vous ces *interprétations délicates* ?

8.4 Études de fonctions exponentielles

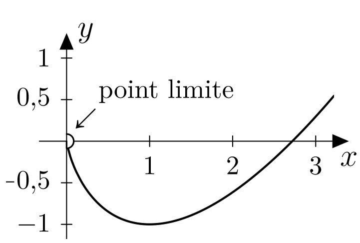
Méthodologie: L'étude d'une fonction exponentielle admet la même marche à suivre que celle étudiée lors de fonctions polynomiales ou rationnelles. On mentionnera toutefois :

a) Il n'y aura **pas de AO** à déterminer car la division de polynômes ne peut s'appliquer dans ce cas.

b) La recherche de(s) **AH** doit être effectuée en deux étapes :

- l'éventuelle **AHG** à l'aide de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
- l'éventuelle **AHD** à l'aide de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

c) Contrairement aux fonctions rationnelles, le graphique d'une fonction exponentielle peut débuter brusquement depuis un point que nous nommerons **point limite**.



Exemple 7: Étudier la fonction f définie par : $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2+x-2}{6x-12}}$.

Pour un tracé plus précis, calculer en plus $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)$

Exercice 8.15: Étudier les fonctions f définies par :

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$

b) $f(x) = (x^2 - 6)\,\mathrm{e}^{-2x}$

c) $f(x) = \mathrm{e}^{x}\,(6 - \mathrm{e}^{x})$

d) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2}{x^2-4}}$

8

Les fonctions exponentielles et logarithmiques (renf)

8.5 La dérivée de ces 2 fonctions

Introduction: *Dans le cours sur les fonctions exponentielles et logarithmes (en 2e année), nous avons défini le nombre d'Euler* $\mathrm{e} = 2{,}718\ldots$ *à l'aide d'une limite :*

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ ou d'une façon équivalente } \quad \mathrm{e} = \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}.$$

Utilisons cette définition pour démontrer les formules $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ *et* $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$.

Théorème: Si f est définie par $f(x) = \ln(x)$, montrer que sa dérivée f' est donnée par :

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Preuve:

Théorème: Si f est définie par $f(x) = \mathrm{e}^x$, montrer que sa dérivée f' est donnée par :

$$f'(x) = \mathrm{e}^x$$

Preuve:

Exercice 8.16:

a) Si f est définie par $f(x) = 10^x$, montrer que sa dérivée f' est donnée par : $f'(x) = \ln(10) \cdot 10^x$

Indication, écrire 10^x comme $\mathrm{e}^{\cdots}$

b) Si f est définie par $f(x) = \log(x)$, montrer que sa dérivée f' est donnée par : $f'(x) = \dfrac{1}{\ln(10) \cdot x}$

8.6 La règle de Bernoulli - L'Hospital

Introduction: *Calculons la limite :* $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{\mathrm{e}^{x-2} - 1} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Il est impossible de lever l'indétermination avec les méthodes utilisées jusqu'à maintenant. Dans ce cas, la méthode sera très simple, elle consiste ***à dériver le numérateur et le dénominateur*** *puis à recalculer cette limite :*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{\mathrm{e}^{x-2} - 1} = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{\mathrm{e}^{x-2}} = \frac{4}{1} = 4$$

Cette démarche porte le nom de règle de Bernoulli-L'Hospital.

Johann Bernoulli (1667-1748)

Guillaume de L'Hospital (1661-1704)

Enfant prodige, Guillaume de L'Hospital, suit les cours de Johann Bernoulli. Par suite d'un arrangement financier, Guillaume de L'Hospital publie sous son propre nom les résultats démontrés par son maître...

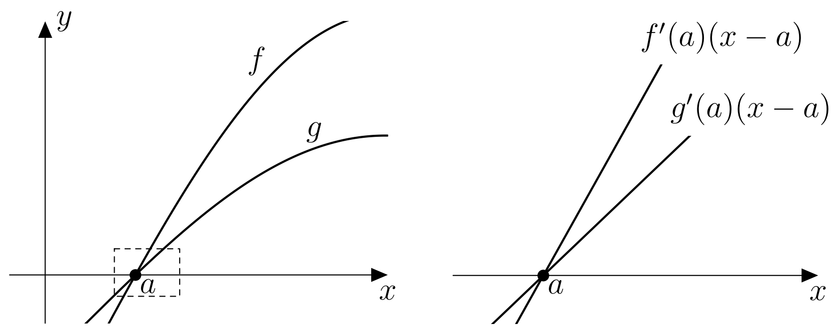
Règle de B - H: (version simplifiée) Supposons que :

- f et g soient dérivables et f' et g' continues
- $f(a) = g(a) = 0$
- mais $g'(a) \neq 0$

Alors : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Preuve : sera vue après les exercices d'application

Justification visuelle:



Les deux figures précédentes tentent de montrer graphiquement pourquoi la règle de B - H est correcte.
Le premier graphique est celui des 2 fonctions dérivables f et g qui toutes deux tendent vers 0 lorsque x tend vers a. Si on regarde de très près les courbes au voisinage du point $(a\,;0)$, elles semblent presque rectilignes. Si les fonctions étaient réellement du premier degré, comme le cas du second graphique, leur rapport serait égal à :

$$\frac{f'(a)(x-a)+f(a)}{g'(a)(x-a)+g(a)} = \frac{f'(a)(x-a)}{g'(a)(x-a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Voilà qui laisse à penser que l'on a bien : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Exemple 8: **a)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(x+1)} =$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} =$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x^2} =$

d) $\lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} =$

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) =$

Exercice 8.17: Calculer, éventuellement à l'aide de B - H

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^7 - 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^x - e^2}{x - 2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \dfrac{e^x}{1 - e^x}$ **e)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\ln(2 + x)}{x + 1}$ **f)** $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln(x) - 1}{x - e}$

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\ln(x)}$ **h)** $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ **i)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(x^2 - 3)}{x - 2}$

j) $\lim\limits_{x \to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ **k)** $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ **l)** $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

Preuve de B - H:
(version simplifiée)

Exercice 8.18: Calculer les limites suivantes

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x)\cdot \mathrm{e}^{x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x)\cdot \mathrm{e}^{-x}$

Règle de B - H: (version généralisée) Supposons que :

- f et g soient dérivables telles que $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$
- $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ou $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$

Alors : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

La règle s'appliquera également aux limites $\displaystyle\lim_{x\to a^+}$, $\displaystyle\lim_{x\to a^-}$, $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}$, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}$.

Elle pourra être appliquée plusieurs fois de suite si nécessaire.

Preuve : La démonstration de cette généralisation de la règle B - H est plus difficile et ne se trouve que dans des livres d'analyse avancée.

8.7 AO, une autre manière de les déterminer.

Rappel: La droite d'équation $y = mx + h$ est une **AOD** de la fonction f si

$$f(x) = mx + h + \delta(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to+\infty} \delta(x) = 0$$

La droite d'équation $y = mx + h$ est une **AOG** de la fonction f si

$$f(x) = mx + h + \delta(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to-\infty} \delta(x) = 0$$

Méthode: Si f ne peut pas s'écrire par division polynomiale sous la forme

$$f(x) = mx + h + \delta(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \delta(x) = 0$$

on peut alors déterminer m et h en calculant les quatre limites suivantes :

AOD : $\boxed{m = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad h = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)}$

AOG : $\boxed{m = \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad h = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx)}$

Exercice 8.19: Justifier pourquoi le calcul des 2 limites ci-dessus permet effectivement de déterminer les AO d'une fonction f.

Exercice 8.20: Déterminer toutes les asymptotes et les éventuels points limites des fonctions f définies par :

a) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 5x^2 + 2}{4x^2 + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{3}{4}\sqrt{x^2 - 2x - 3}$

c) $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^x) - x$

d) $f(x) = 2\ln(x) - 1 - \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

f) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

Exercice 8.21: Étudier les fonctions f suivantes (avec pts d'inflexion et evt AO)

a) $f(x) = (x-2)^2 \cdot \mathrm{e}^x$

b) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1+x}{1-x}}$

8.8 Études de fonctions du type $\ln(x)$

Exemple 9: Étudier la fonction f définie par : $f(x) = x^2(-2 + \ln(x))$.

Pour un tracé plus précis, calculer en plus $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$

Exercice 8.22: Étudier les fonctions f suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

b) $f(x) = x^2 \ln(x)$

c) $f(x) = x \ln(x) - x$

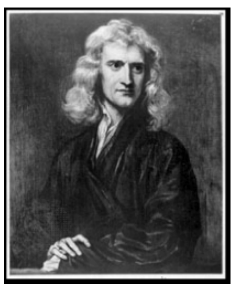
d) $f(x) = \dfrac{\ln(x) - 2}{\ln(x) - 1}$

e) $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x} + 3\,\mathrm{e}^{x} + 2\right)$ *(avec pts d'inflexion et evt AO)*

9 Primitives et intégrales

9.1 «À quoi ça sert ?»

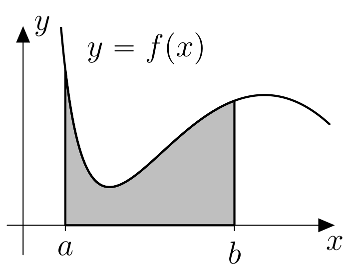
Un peu d'histoire:



Isaac Newton (1643-1727)

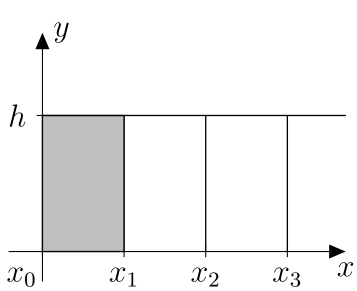
Les calculs d'aire de figures géométriques simples comme les rectangles, les polygones et les cercles sont décrits dans les plus anciens documents mathématiques connus. La première réelle avancée au-delà de ce niveau élémentaire a été faite par *Archimède*, le génial savant grec. Grâce à la technique *d'Archimède*, on pouvait calculer des aires bornées par des paraboles et des spirales. Au début du XVII^{e} siècle, plusieurs mathématiciens ont cherché à calculer de telles aires de manière plus simple à l'aide de limites. Cependant, ces méthodes manquaient de généralité. La découverte majeure de la résolution générale du problème d'aire fut faite indépendamment par *Newton* et *Leibniz* lorsqu'ils s'aperçurent que l'aire sous une courbe pouvait être obtenue en inversant le processus de dérivée.

Cette découverte, qui marqua le vrai début de l'analyse, fut répandue par *Newton* en 1669 et ensuite publiée en 1711 dans un article intitulé *De Analysis per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*. Indépendamment, *Leibniz* découvrit le même résultat aux environs de 1673 et le formula dans un manuscrit non publié daté du 11 novembre 1675.



Notre objectif dans ce chapitre sera de pouvoir calculer l'aire d'un domaine sous une courbe $y = f(x)$ bornée entre deux droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

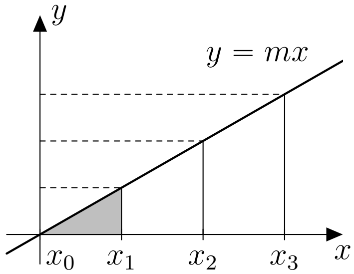
9.2 3 exemples pour débuter



a) Soit la fonction f définie par $f(x) = h$ où h représente une constante. Nous désirons calculer l'aire $A(x)$ sous la courbe $y = h$ comprise entre la borne $x_0 = 0$ et la deuxième borne variant $x = x_1, x_2, x_3, \ldots$

- si $x = x_1 \implies A(x_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- si $x = x_2 \implies A(x_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- si $x = x_3 \implies A(x_3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

En généralisant pour tout x, $\boxed{\text{Si } f(x) = h \implies A(x) = hx}$

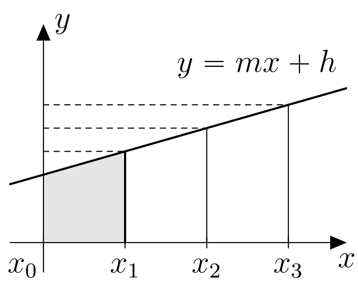


b) Soit la fonction f définie par $f(x) = mx$ où m représente la pente de la droite. Nous désirons calculer l'aire $A(x)$ sous la courbe $y = mx$ comprise entre la borne $x_0 = 0$ et la deuxième borne variant $x = x_1, x_2, \ldots$

- si $x = x_1 \implies A(x_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- si $x = x_2 \implies A(x_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ etc…

En généralisant pour tout x :

$$\boxed{\text{Si } f(x) = mx \implies A(x) = \frac{1}{2}mx^2}$$



c) Soit la fonction f définie par $f(x) = mx + h$. Nous désirons calculer l'aire $A(x)$ sous la courbe $y = mx + h$ comprise entre la borne $x_0 = 0$ et la deuxième borne variant $x = x_1, x_2, \ldots$

- si $x = x_1 \implies A(x_1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

  $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- si $x = x_2 \implies A(x_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ etc…

En généralisant pour tout x :

$$\boxed{\text{Si } f(x) = mx + h \implies A(x) = \frac{1}{2}mx^2 + hx}$$

Exercice 9.1: Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x$. Déterminer l'aire $A(x)$ définie sous la courbe dans les 3 cas suivants :

a) entre $x_0 = 0$ et $x_1 = 10$

b) entre $x_0 = 0$ et $x_2 = 20$

c) entre $x_1 = 10$ et $x_2 = 20$

Exercice 9.2: Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x + 4$. Déterminer l'aire $A(x)$ définie sous la courbe dans les 3 cas suivants :

a) entre $x_0 = 0$ et $x_1 = 2$

b) entre $x_1 = 2$ et $x_2 = 6$

c) entre $x_0 = 0$ et $x_2 = 6$

Exercice 9.3: Soit la fonction f définie par $f(x) = 2x - 4$. Déterminer l'aire $A(x)$ définie sous la courbe dans les 3 cas suivants :

Une bonne figure d'étude est vivement conseillée dans ce cas

a) entre $x_0 = 0$ et $x_1 = 2$

b) entre $x_1 = 2$ et $x_2 = 6$

c) entre $x_0 = 0$ et $x_2 = 6$

Définition: On nomme $A(x)$ **une intégrale indéfinie** de la fonction f.
On la note :

$$A(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Les 3 premières règles: Ainsi les 3 exemples précédents nous fournissent nos trois premières règles de calcul :

$$f(x) = b \quad \overset{\int \ldots \,\mathrm{d}x}{\Longrightarrow} \quad A(x) = bx$$

$$f(x) = ax \quad \overset{\int \ldots \,\mathrm{d}x}{\Longrightarrow} \quad A(x) = \frac{1}{2}ax^2$$

$$f(x) = ax + b \quad \overset{\int \ldots \,\mathrm{d}x}{\Longrightarrow} \quad A(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx$$

Constatations: On observe ici le lien entre dérivée et intégrale. En effet en dérivant l'expression $A(x)$, on retrouve $f(x)$. On pourrait symboliser ceci sur le schéma suivant :

$$\boxed{f(x)} \;\underset{(\ldots)'}{\overset{\int \ldots \,\mathrm{d}x}{\rightleftarrows}}\; \boxed{A(x)}$$

9.3 Les primitives

Nous allons maintenant oublier un petit moment la notion d'aire $A(x)$ et se concentrer sur la question suivante :

> **Soit la fonction f donnée, trouver la (ou les) fonction(s) F telle(s) que leur dérivée donne f.**

Définition: Une fonction F telle que $F'(x) = f(x)$ est **une primitive** de f.

Exemple 1: $\frac{3}{2}x^2$ est **<u>une</u> primitive** de $3x$, car $\left(\frac{3}{2}x^2\right)' = 3x$

Mais pourquoi une ???

☞ En fait, toute fonction de la forme $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \textit{constante}$ est une primitive de $f(x) = 3x$.

Exemple 2: Vérifier ou déterminer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + c$ car ....

b) $\displaystyle\int 7x^4 \, \mathrm{d}x = \frac{7}{5}x^5 + c$ car ....

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x =$ ....

d) $\displaystyle\int \sqrt{x} \, \mathrm{d}x =$ ....

e) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x =$ ....

Exercice 9.4: Déterminer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int 4 \, \mathrm{d}x$ **b)** $\displaystyle\int 6x \, \mathrm{d}x$ **c)** $\displaystyle\int x^2 \, \mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$ **e)** $\displaystyle\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$ **f)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x} \, \mathrm{d}x$ **h)** $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt[3]{x}} \, \mathrm{d}x$ **i)** $\displaystyle\int (2x)^3 \, \mathrm{d}x$

Exercice 9.5: Les deux fonctions F et G définies par :

$$F(x) = \frac{1}{6}(3x+4)^2 \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x$$

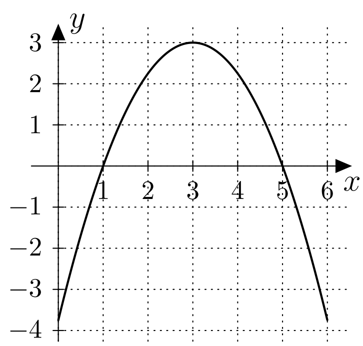
sont-elles deux primitives d'une même fonction f ?

Exercice 9.6: Déterminer f sachant que :

a) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 5x^2 - 3x + c$ **b)** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = x - \frac{1}{x} + c$

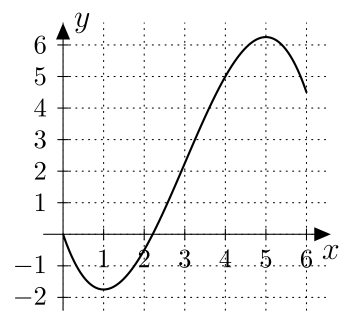
c) $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{x} + c$

Exercice 9.7: On a représenté ci-contre une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;6]$.

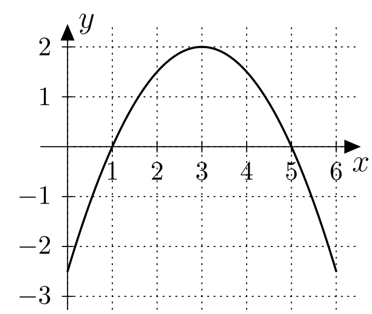


a) Sachant que f est la dérivée d'une fonction F définie sur $[0\,;6]$, déduire le tableau de croissance de F.

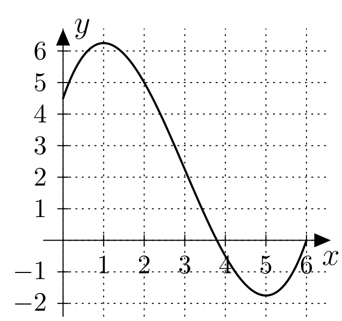
b) Retrouver, parmi les 4 esquisses proposées ci-dessous, celles pouvant correspondre à F.



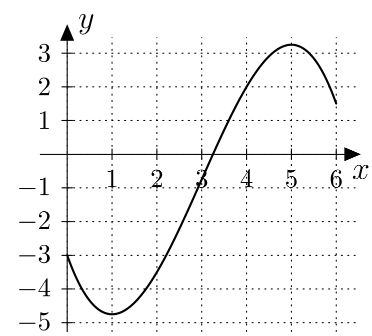
❶



❷



❸



❹

Calculs de primitives: La recherche d'une primitive n'est pas toujours facile, ni toujours possible. **Celles proposées ci-dessous découlent directement des règles de dérivation :**

$\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$

$$\boxed{① \int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x}$$

☞ $\displaystyle\int \frac{x^4}{5} - \frac{3x^3}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^4}{5}\,\mathrm{d}x - \int \frac{3x^3}{2}\,\mathrm{d}x =$ ....

$\big(k \cdot f(x)\big)' = k \cdot f'(x)$

$$\boxed{② \int k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x}$$

☞ $\displaystyle\int 17 \cdot x^{-5}\,\mathrm{d}x = 17 \cdot \int x^{-5}\,\mathrm{d}x =$ ....

$\left((f(x))^n\right)' = n\big(f(x)\big)^{n-1} \cdot \boldsymbol{f'(x)}$

$$\boxed{③ \int \big(f(x)\big)^n \cdot \boldsymbol{f'(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\big(f(x)\big)^{n+1} + c}$$

☞ $\displaystyle\int \left(3x^2 + 5x - 1\right)^3 \cdot (6x+5)\,\mathrm{d}x =$ ....

$\left(\mathrm{e}^{f(x)}\right)' = \mathrm{e}^{f(x)} \cdot \boldsymbol{f'(x)}$

$$\boxed{④ \int \mathrm{e}^{f(x)} \cdot \boldsymbol{f'(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{f(x)} + c}$$

☞ $\displaystyle\int 2x\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x =$ ....

$\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)' = \dfrac{1}{f(x)} \cdot \boldsymbol{f'(x)}$

$$\boxed{⑤ \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|f(x)|) + c}$$

☞ $\displaystyle\int \frac{8}{4x-3}\,\mathrm{d}x =$ ....

$\Big(\sin\big(f(x)\big)\Big)' = \cos\big(f(x)\big) \cdot \boldsymbol{f'(x)}$

$$\boxed{⑥ \int \cos\big(f(x)\big) \cdot \boldsymbol{f'(x)}\,\mathrm{d}x = \sin\big(f(x)\big) + c}$$

☞ $\displaystyle\int x \cdot \cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x =$ ....

$\Big(\cos\big(f(x)\big)\Big)' = -\sin\big(f(x)\big) \cdot \boldsymbol{f'(x)}$

$$\boxed{⑦ \int \sin\big(f(x)\big) \cdot \boldsymbol{f'(x)}\,\mathrm{d}x = -\cos\big(f(x)\big) + c}$$

☞ $\displaystyle\int \sin(-x)\,\mathrm{d}x =$ ....

Exercice 9.8: Déterminer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int 3x^2 + 5x - 3 \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int x(2x-4)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int x(x+3)(x-3)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int (x+3)^3\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int (1-2x)^2\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int \left(3x^2+x\right)^3(6x+1)\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int x\left(4x^2+3\right)^4\,\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int \sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$

k) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+1}\,\mathrm{d}x$

l) $\displaystyle\int 3\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$

m) $\displaystyle\int 2x\,\mathrm{e}^{x^2+x}+\mathrm{e}^{x^2+x}\,\mathrm{d}x$

n) $\displaystyle\int \frac{4x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$

o) $\displaystyle\int 2x\cos\left(3x^2\right)\,\mathrm{d}x$

p) $\displaystyle\int 2\sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 9.9: Déterminer la fonction f sachant que :

a) $f'(x) = 3x^2 - 4$ et $f(5) = 54$

b) $f'(x) = 5 - x$ et $f(-2) = -f(2)$

Exercice 9.10: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\,;3\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x-7}{x^2-2x-3}$$

a) Préciser pourquoi la primitive de f n'est pas directement calculable.

b) Déterminer a et b vérifiant que :

$$f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x-3} + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}$$

c) En déduire une primitive de f.

d) Montrer que $F(x) = \dfrac{9}{4}\ln|x+1| - \dfrac{1}{4}\ln|x-3| + c$ est également une primitive de f.

Définition: On appelle **intégrale indéfinie** de la fonction f et on note $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ toute expression de la forme $F(x)+C$ où F est une primitive de f et C une constante.

Exercice 9.11: On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1+\ln(x)}{x}$$

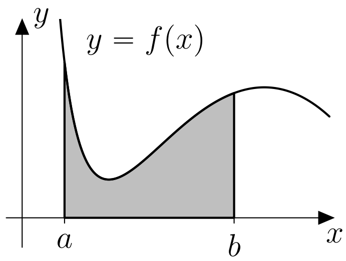
Soit F la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$F(x)=\ln(x)+\frac{1}{2}(\ln(x))^2+c$$

Montrer que F est l'intégrale indéfinie de f.

9.4 L'intégrale définie

Introduction: *Au début du chapitre, nous avons calculé des aires limitées par des segments de droites.*
Le problème n'est pas aussi simple lorsque l'on considère un domaine limité par des courbes.

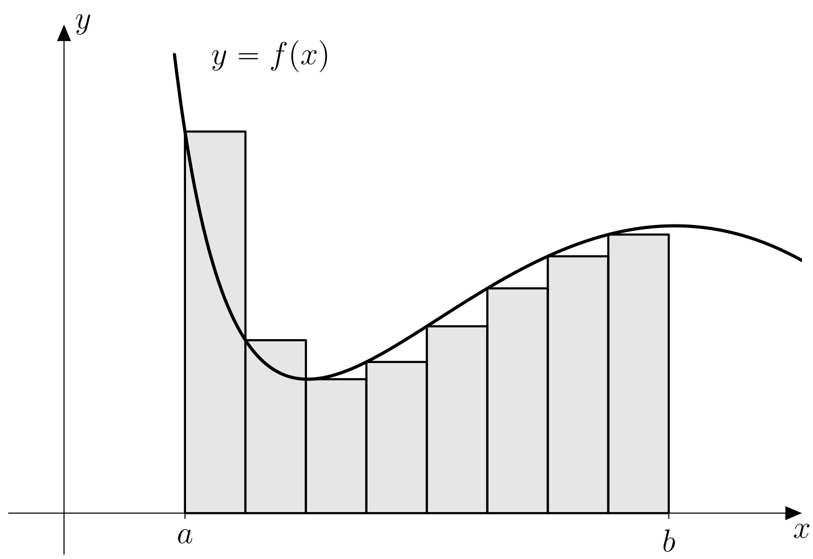


L'idée est de subdiviser l'intervalle $[a\,;b]$ en plusieurs sous-intervalles de même largeur $[x_0\,;x_1],[x_1\,;x_2],\ldots,[x_{n-1};x_n]$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$.

La largeur de chaque sous-intervalle est égale à la largeur de l'intervalle $[a\,;b]$ divisé par le nombre de sous-intervalles, c'est-à-dire :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Pour chaque $i = 0, 1, \ldots, n-1$, on dessine un rectangle ayant comme base le segment $[x_i\,;x_{i+1}]$ et comme hauteur $f(x_i)$



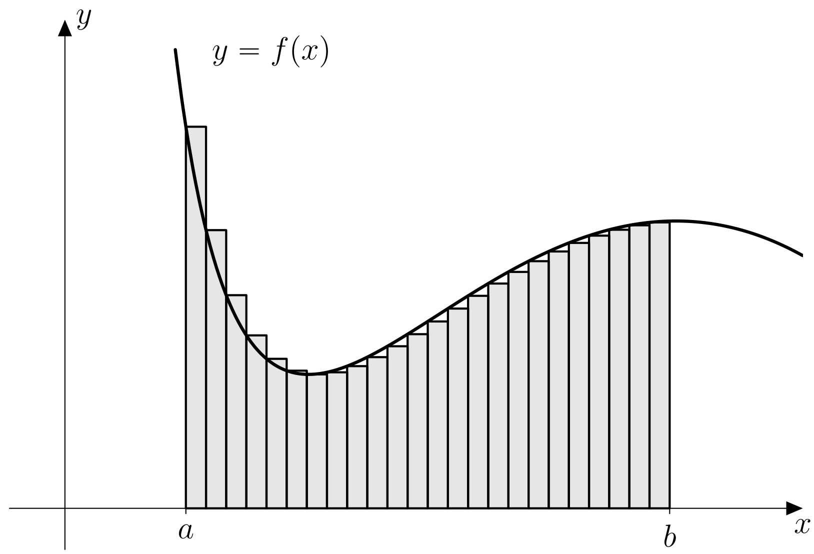
Ainsi l'aire du i^{e} rectangle (hauteur · largeur) vaut

$$\text{Aire } = f\left(x_i\right) \cdot \Delta x$$

Rappel :
$$\sum_{i=0}^{3} x_i = x_0 + x_1 + x_2 + x_3$$

L'aire totale des n rectangles est donc $A(n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\right) \cdot \Delta x$

Lorsque le nombre n de sous-intervalles augmente, la largeur de chaque sous-intervalle diminue et l'approximation de l'aire sous la courbe devient plus précise.



À la limite, nous pouvons "espérer" obtenir la valeur exacte de l'aire A :

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\right) \cdot \Delta x$$

Définition: On appelle **intégrale définie** de la fonction f pour x allant de a à b le calcul de la limite :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\right) \cdot \Delta x$$

que l'on notera :

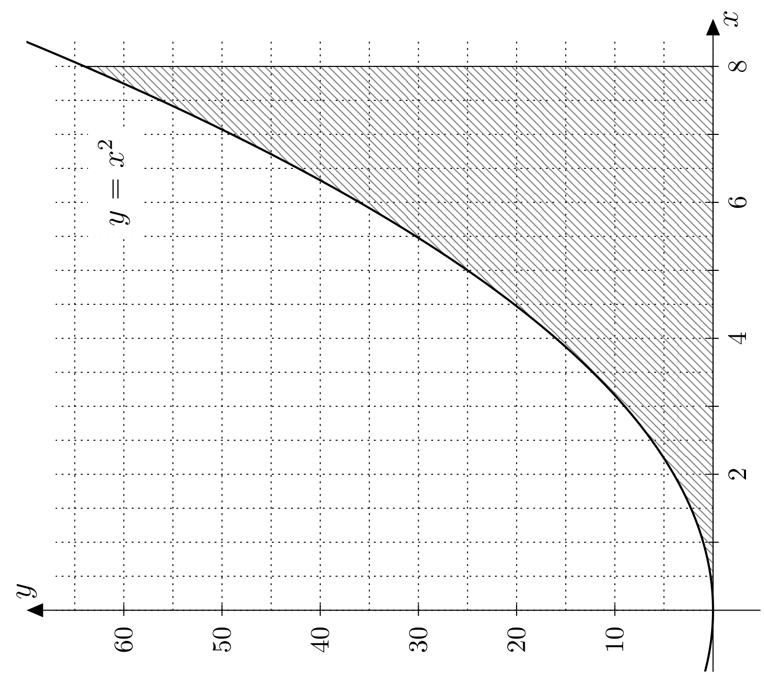
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Les nombres a et b sont appelés **bornes d'intégration** et x **variable d'intégration**.
- $\mathrm{d}x$ est un symbole exprimant que l'on intègre par rapport à x et il correspond au symbole Δx de la somme précédente.

Exercice 9.12: Reproduire la démarche précédente afin d'approximer l'aire sous la parabole à l'aide de rectangles (bordé par la gauche puis par la droite).

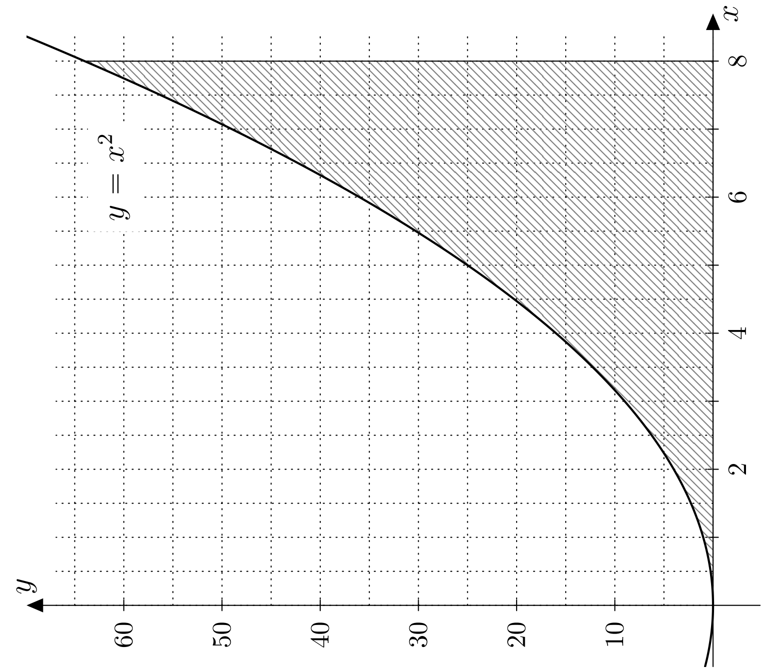
Le but de cet exercice est d'approximer la valeur de l'aire hachurée sous la courbe $y = x^2$ pour $x \in [0\,;8]$

Approximons cette aire pour $\boldsymbol{\Delta x = 1}$



Aire cherchée ≈

Approximons cette aire pour $\boldsymbol{\Delta x = 1/2}$



Aire cherchée ≈

Constatation: L'usage de la définition de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot\Delta x$$

se révèle être très peu pratique, car demandant des calculs très longs. Cependant, pour certaines fonctions (pas toutes), il existe une alternative plus simple, l'utilisation de la primitive donnée par le théorème suivant :

Théorème: **Théorème fondamental du calcul intégral :**

Soit une fonction f continue définie sur l'intervalle $[a\,;b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f.

Exemple 3:

a) $\displaystyle\int_0^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + c\Big|_0^4 = (8+c) - (0+c) = \underline{\underline{8}}$

On voit sur cet exemple que la constante c n'a pas d'influence. On se permettra alors de ne plus l'indiquer.

b) $\displaystyle\int_2^7 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|)\Big|_2^7 = \ln(7) - \ln(2) = \underline{\underline{\ln\left(\frac{7}{2}\right)}}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \;\ldots\ldots\ldots\Big|_0^1 = \;\ldots\ldots\ldots$

Exercice 9.13: Calculer les intégrales définies suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^4 x^2\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^3 3x^2\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_1^5 \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^3}{5}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^2 2x^3 - 3x^2 + x - 3\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{-1}^2 u^2 + 1\,\mathrm{d}u$

g) $\displaystyle\int_{-2}^2 v^3 - 3v\,\mathrm{d}v$

h) $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{3x^2}{5} + 4\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x$

j) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \cos(2x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 9.14: Calculer les intégrales définies suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^2 (1-x)^3\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$

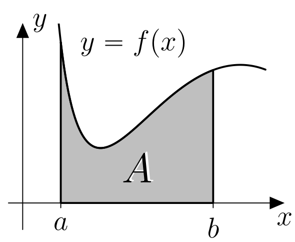
c) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cdot\cos\left(x^2\right)\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_{-3}^2 \mathrm{e}^{-2u}\,\mathrm{d}u$

g) $\displaystyle\int_{-1}^{-5} \frac{1}{3v}\,\mathrm{d}v$ h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x$

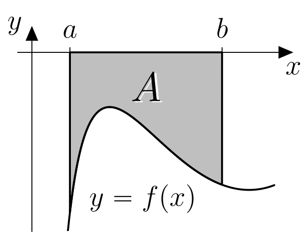
9.5 Le calcul de l'aire géométrique "sous une courbe"

Lorsque l'on calcule une intégrale définie $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on obtient donc une aire. Trois cas de figure vont apparaître :



<u>1er cas :</u> Si $f(x)\geqslant 0$ sur $[a\,;b]$,

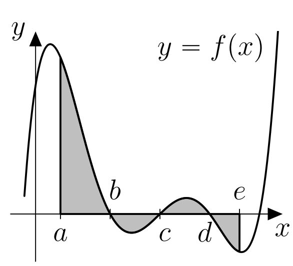
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est un nombre positif qui représente l'aire A sous la courbe.



<u>2e cas :</u> Si $f(x)\leqslant 0$ sur $[a\,;b]$,

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est un nombre négatif. Pour calculer l'aire A sous la courbe, il s'agira donc de proposer un changement de signe :

$$A=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



<u>3e cas :</u> Si f change de signe sur $[a\,;e]$,

l'aire totale est égale à la somme des aires de chaque "morceau" avec les éventuelles corrections de signe. Ainsi :

$$A=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\left(-\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\right)+\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x+\left(-\int_d^e f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

Exemple 4: Calculer l'aire géométrique comprise entre la courbe $y = x^2 - 2x$, l'axe Ox et les droites $x = 0$ et $x = 4$.

Exercice 9.15: Calculer l'aire géométrique comprise entre la courbe $y = -x^2 + x + 6$, l'axe Ox et les droites $x = -5$ et $x = 5$.

Exercice 9.16: Calculer l'aire géométrique du domaine borné compris entre l'axe Ox et le graphe de la fonction f .

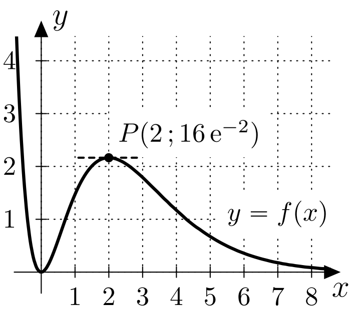
Il est vivement conseillé d'esquisser la fonction f dans chaque cas.

a) $f(x) = -3x^2 + 2x + 5$ **b)** $f(x) = 2x^2 - x^3 - x^4$

c) $f(x) = 6x + x^2 - x^3$

Exercice 9.17: On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{avec } a, b \text{ et } c \in \mathbb{R}\,.$$



a) À l'aide de l'esquisse représentée ci-contre, déterminer les valeurs de a, b et c.

b) Montrer que la fonction F définie ci-dessous est une primitive de f :

$$F(x) = -4\,(x^2 + 2x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$$

c) Calculer l'aire de la région du plan délimitée par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 2$.

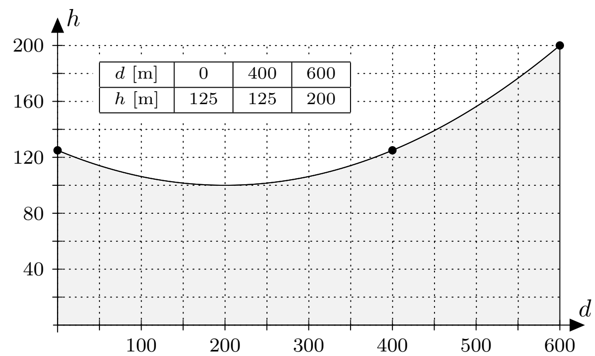
Exercice 9.18: Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Justifier votre réponse.

a) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ si $b \in [a\,;c]$ et $f(x) \geqslant 0$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ si $f(x) \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$

c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ si $f(x) \geqslant g(x)$ sur $[a\,;b]$

Exercice 9.19: On voudrait niveler (à plat) le terrain représenté ci-dessous.



a) À l'aide des 3 pts obtenus par un géomètre, déterminer la fonction du 2$^{\text{e}}$ degré qui modélise au mieux ce terrain.

b) À quelle hauteur faut-il situer le terrain nivelé pour que les remblais équilibrent exactement les déblais ?

Remarque: L'exercice précédent peut se généraliser en un théorème classique d'intégration : **Le Théorème de la moyenne :**

Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a\,;b]$,
il existe un réel c compris entre a et b vérifiant :

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Graphiquement, une interprétation de ce théorème est que l'aire algébrique sous la courbe $y = f(x)$ est égale à celle d'un rectangle de base $[a\,;b]$ et dont la hauteur est l'ordonnée d'un point "moyen" de la courbe.

Dans l'exercice précédent, il existe même 2 valeurs de c vérifiant ce théorème qui sont :

$$c_1 = \ldots\ldots \text{ et } c_2 = \ldots\ldots$$

9.6 Le calcul de l'aire géométrique entre deux courbes

Exemple 5: Calculer l'aire géométrique du domaine borné compris entre les courbes :

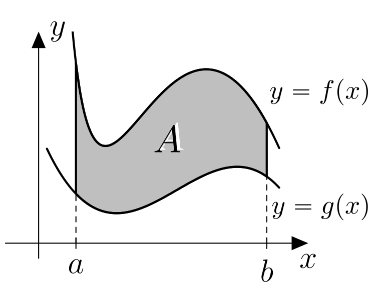
$$y = x^2 \quad \text{et} \quad y = \sqrt{x}$$

Constatation: Dans ce dernier exemple, nous avons calculé l'aire entre deux courbes à l'aide du calcul :

A = « aire de la plus haute » − « aire de la plus basse »

Généralisons ceci dans le théorème suivant :

Théorème: Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$, telle que $f(x) \geqslant g(x)$ sur $[a\,;b]$. Alors l'aire A du domaine borné par les graphes de f et de g entre les droites $x = a$ et $x = b$ vaut :



$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{\int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x}$$

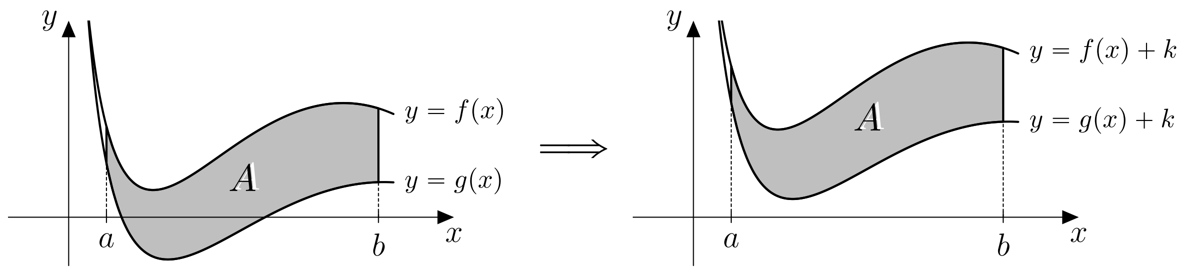
Question: *Cette formule est assez convaincante lorsque les 2 fonctions f et g sont toutes deux situées dans les 2 premiers quadrants.*

Qu'en est-il dans le cas où g et éventuellement f prennent des valeurs négatives ?

Doit-on modifier des signes ?

Réponse: Non, il n'est pas nécessaire de "corriger" la formule.
On peut imaginer translater les graphes de f et g d'une même constante k de telle sorte que $f(x) + k \geqslant 0$ et $g(x) + k \geqslant 0$ pour tout $x \in [a\,;b]$.

Observons ceci sur la figure suivante :



Exercice 9.20: Calculer l'aire géométrique du domaine délimité par les deux courbes

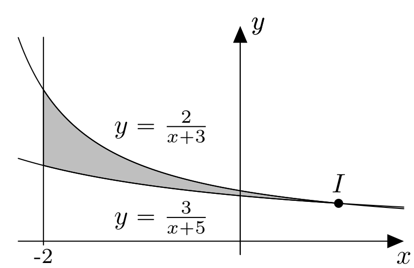
a) $y = x^2 - 4x + 5$ et $y = 5 + 2x - x^2$

b) $y = x^3 - x^4$ et $y = x - x^2$

c) $2x^2 + x + 4y - 3 = 0$ et $x - 4y - 1 = 0$

Exercice 9.21: Calculer l'aire géométrique du domaine compris entre les droites $x = 1$, $x = 2$, l'asymptote oblique et le graphe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$.

Exercice 9.22: Déterminer l'aire de la région grisée.



Exercice 9.23: Calculer l'aire géométrique du domaine compris entre les droites $x = 1$, $x = 2$, $y = 3x$ et la courbe d'équation $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$.

Exercice 9.24: Calculer l'aire géométrique du domaine compris entre la courbe $y = x^3 + 2x^2 + x$ et la parabole d'axe parallèle à Oy, donnée par trois de ses points $A(-2\,;-2)$, $B(-1{,}5\,;0)$, $C(0\,;0)$.

Exercice 9.25: **1re partie : Calcul d'une primitive**

On note g la fonction définie sur $[0\,;2]$ par $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$

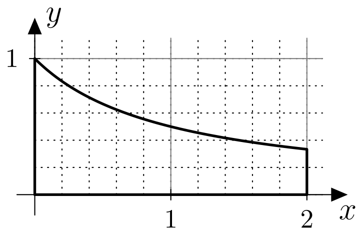
a) Déterminer a et b tels que $g(x) = a + \dfrac{b}{x+1}$.

b) En déduire une primitive de g.

2e partie : Détermination du centre de gravité d'une plaque homogène

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$



On considère une plaque homogène formée par l'ensemble de points $M(x\,;y)$ du plan dont les coordonnées vérifient les relations :

$0 \leqslant x \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ (cf. figure ci-contre).

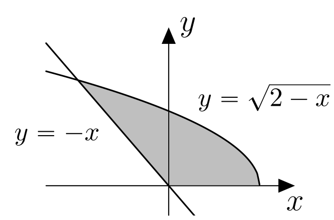
c) Soit A l'aire de la plaque exprimée en unité d'aire. Calculer A.

d) Soit $G(x_G\,;y_G)$ le centre de gravité de la plaque. On admettra que ses coordonnées sont données par les formules suivante :

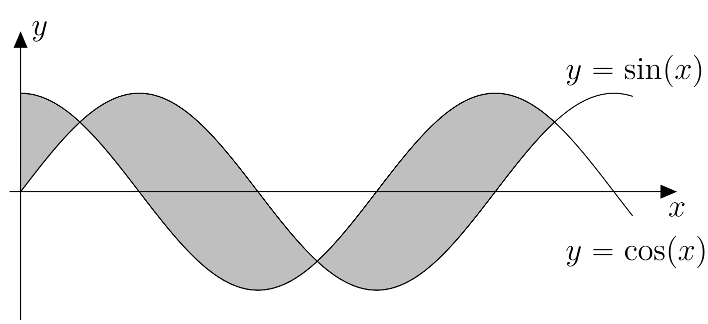
$$x_G = \frac{1}{A}\int_0^2 x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad y_G = \frac{1}{2\cdot A}\int_0^2 \big(f(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$$

Calculer les coordonnées du centre de gravité de la plaque puis représenter G sur la figure ci-contre.

Exercice 9.26: Déterminer l'aire de la région grisée.



Exercice 9.27: Déterminer l'aire de la surface grisée.



9.7 Calcul d'intégrales avec un paramètre

Exemple 6: Calculer les réels $k > 0$ pour lesquels on a $\displaystyle\int_{-1}^{2} kx^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$

Exercice 9.28: Calculer les réels $k > 0$ pour lesquels on a

a) $\displaystyle\int_{4}^{k} x + 9 \,\mathrm{d}x = 28$

b) $\displaystyle\int_{4}^{k} x^2 - 3x + 7 \,\mathrm{d}x = \frac{129}{2}$

c) $\displaystyle\int_{2}^{8} \frac{k}{x} \,\mathrm{d}x = 4\ln(2)$

d) $\displaystyle\int_{0}^{k} x^2 + x + 1 \,\mathrm{d}x = \int_{0}^{k} x^2 + 3 \,\mathrm{d}x$

Exercice 9.29: Pour quelle valeur du paramètre positif a la courbe d'équation

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + ax$$

délimite-t-elle avec l'axe Ox, dans le premier quadrant, un domaine d'aire égale à 6 ?

Exercice 9.30: Calculer le réel $m > 0$ tel que l'aire du domaine limité par les graphes des fonctions f et g soit égale à 9 où

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = mx$$

Exercice 9.31: Soit la fonction f définie sur $\mathrm{E_D} = [0\,;18]$ par $f(x) = 2x - 2$.
Cette fonction bornée délimite avec l'axe Ox un domaine.

Déterminer la valeur de c pour laquelle la droite d'équation $x = c$ coupe ce domaine en deux parties de même aire.

Exercice 9.32: Déterminer $a \in \mathbb{R}_+^*$ pour que l'aire du domaine limité par la courbe d'équation $y = a^2 - \dfrac{x^2}{4}$ et l'axe Ox soit égal à 8.

9

Primitives et intégrales (renf)

Objectif: *L'objectif de cette annexe est de définir plus rigoureusement la notion de fonction intégrable (au sens de Riemann), de donner une preuve du théorème fondamental du calcul intégral et finalement de vous apporter quelques nouvelles démarches pour calculer des intégrales pour des fonctions particulières.*

9.8 Une définition plus rigoureuse de l'intégrale définie : L'intégrale de Riemann

Intégrale de Riemann:

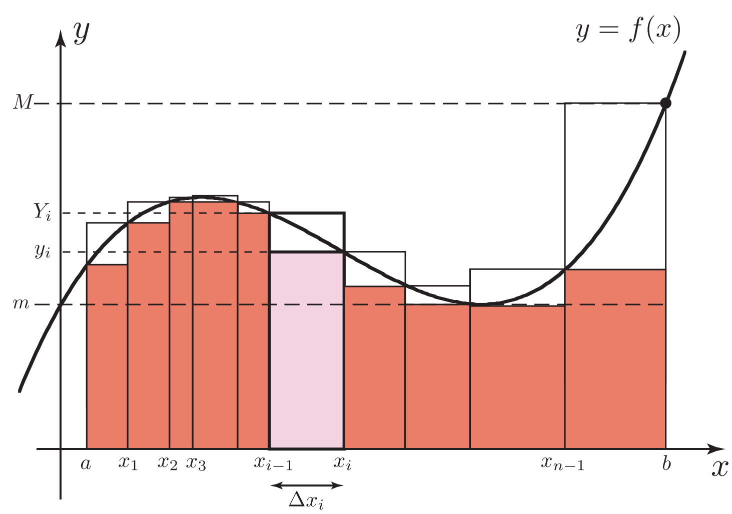
- Considérons une fonction f continue sur $[a\,;b]$ et, pour nous faciliter l'interprétation géométrique, supposons-la positive sur cet intervalle.
- Faisons une partition de l'intervalle $[a\,;b]$, c'est-à-dire divisons l'intervalle en sous-intervalles de longueur Δx_1, Δx_2, Δx_3, …, Δx_n où

  $$\Delta x_1 = x_1 - a,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1,\ \Delta x_3 = x_3 - x_2,\ \ldots,\ \Delta x_n = b - x_{n-1}$$

  avec :

  $$a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant b$$

  Notons que ces sous-intervalles ne sont pas nécessairement de longueur égale.
- Soit M et m respectivement le maximum et le minimum de la fonction sur $[a\,;b]$. En voici une représentation graphique.



- Dans chaque intervalle $[x_{i-1}\,;x_i]$ de longueur Δx_i, appelons y_i, l'ordonnée du point minimum et Y_i, l'ordonnée du point maximum. Considérons la somme :

$$s_n = y_1 \cdot \Delta x_1 + y_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots + y_n \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \Delta x_i$$

  que l'on appelle **somme intégrale inférieure.**

- De la même façon, considérons :

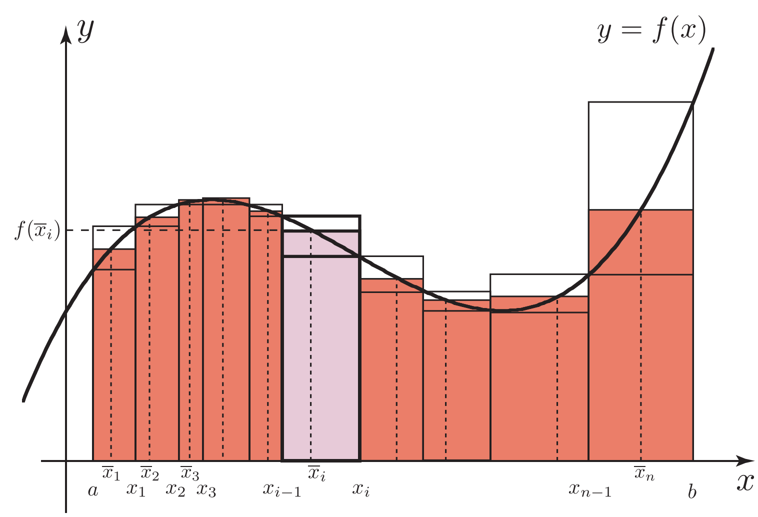
$$S_n = Y_1 \cdot \Delta x_1 + Y_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots + Y_n \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot \Delta x_i$$

  que l'on appelle **somme intégrale supérieure**.
  Géométriquement, c'est la somme des aires des rectangles ombrés auxquels on ajoute les petits rectangles blancs au-dessus. On a

$$m(b-a) \leqslant s_n \leqslant S_n \leqslant M(b-a)$$

- Remarquons que chacune des 4 expressions que l'on trouve dans l'expression précédente représente l'aire d'un ou de plusieurs rectangles. Visualisez-les bien dans la figure précédente.

- Maintenant, dans chacun des sous-intervalles formés, choisissons **un point quelconque** non nécessairement centré $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$, $\ldots$, $\overline{x}_n$.
  En chacun de ces points considérons la valeur de la fonction, c'est-à-dire $f(\overline{x}_1)$, $f(\overline{x}_2)$, $f(\overline{x}_3)$, $\ldots$,$f(\overline{x}_n)$.
  Constatons que pour chaque i, $\qquad y_i \leqslant f(\overline{x}_i) \leqslant Y_i$



- Calculons les aires des n rectangles et formons-en la somme, on obtient :

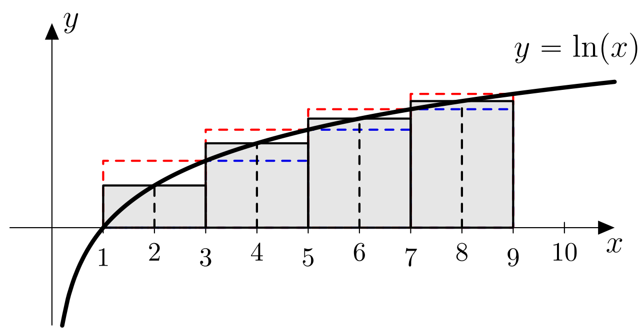
$$S_R = f(\overline{x}_1) \cdot \Delta x_1 + f(\overline{x}_2) \cdot \Delta x_2 + \ldots + f(\overline{x}_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i) \cdot \Delta x_i$$

Bernhard Riemann
(1826 – 1866)

- Une telle somme s'appelle une **somme de Riemann** de f sur $[a\,;b]$ et approxime l'aire sous la courbe entre a et b. Cette approximation s'améliore si l'on divise l'intervalle $[a\,;b]$ plus finement, c'est-à-dire si l'on augmente le nombre n de sous-intervalles et si l'on fait chacun de ces sous-intervalles de plus en plus petits.
- Si $\displaystyle\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i$ existe, on dit que la fonction est intégrable (au sens de Riemann) sur $[a\,;b]$ et cette limite s'appelle l'intégrale définie de f sur $[a\,;b]$ que l'on note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 9.33: Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;9]$ par :

$$f(x) = \ln(x).$$



En subdivisant cet intervalle en quatre sous-intervalles d'égale longueur, trouver la somme intégrale inférieure, la somme intégrale supérieure et la somme de Riemann lorsque l'on utilise le point milieu de chacun des sous-intervalles.

Exercice 9.34: Considérons $\displaystyle\int_1^7 x^3 - 1\,\mathrm{d}x$.

En subdivisant l'intervalle $[1\,;7]$ en six sous-intervalles, calculer

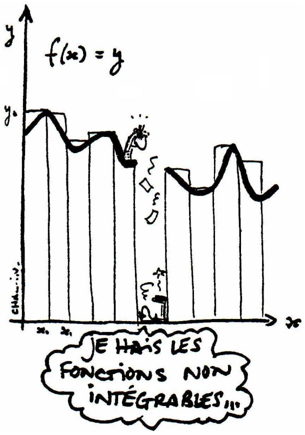
a) la somme intégrale inférieure ;

b) la somme intégrale supérieure ;

c) une somme de Riemann en utilisant les points situés au 1$^{\text{er}}$ quart des sous-intervalles ;

d) l'intégrale définie à l'aide du théorème fondamental du calcul intégral.

À clarifier: Maintenant que nous avons défini cette intégrale, il reste deux questions à clarifier :



a) « Si $\displaystyle\lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i$ existe… », mais dans quelles conditions existe-t-elle ?

b) Cette limite dépend-elle du choix des $\overline{x}_i$ dans chacun des sous-intervalles ?

En réponse à la première question, on peut affirmer que, pour toute fonction f continue sur $[a\,;b]$, une telle limite existe.

La réponse à la deuxième question est non.

- Pour expliquer ces deux réponses, rappelons que
$$y_i \leqslant f(\overline{x}_i) \leqslant Y_i$$
pour tout i et pour toute valeur $\overline{x}_i \in [x_{i-1}\,;x_i]$.
De ceci découlent :
$$\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i) \cdot \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot \Delta x_i$$
et
$$m(b-a) \leqslant s_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i) \cdot \Delta x_i \leqslant S_n \leqslant M(b-a)$$
- Si l'on raffine maintenant la subdivision de l'intervalle $[a\,;b]$, s_n croît tout en demeurant inférieure à $M(b-a)$, ainsi donc :
$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} s_n \text{ existe.}$$
- Par un raisonnement analogue, S_n décroît tout en demeurant supérieure à $m(b-a)$ donc…
$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} S_n \text{ existe.}$$
- Comparons ces deux sommes intégrales en faisant la différence :
$$S_n - s_n = (Y_1 - y_1) \cdot \Delta x_1 + (Y_2 - y_2) \cdot \Delta x_2 + \ldots + (Y_n - y_n) \cdot \Delta x_n$$
Pour simplifier l'expression, appelons w la valeur maximale de tous les $(Y_i - y_i)$, alors
$$S_n - s_n \leqslant w \cdot \Delta x_1 + w \cdot \Delta x_2 + \ldots + w \cdot \Delta x_n$$
De plus, par construction $0 \leqslant S_n - s_n$. On a alors :
$$0 \leqslant S_n - s_n \leqslant w(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n)$$

- Si l'on admet que la fonction $y = f(x)$ est continue, en passant à la limite on aura $w \to 0$

$$0 \leqslant \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} S_n - s_n \leqslant \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} w(b-a)$$

Selon le théorème des 2 gendarmes : $\lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} S_n - s_n = 0$

Donc :

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} S_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} s_n$$

En vertu de l'inégalité

$$s_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i) \cdot \mathrm{d}x_i \leqslant S_n$$

Ainsi en utilisant une deuxième fois le théorème des 2 gendarmes :

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} s_n \leqslant \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i) \cdot \Delta x_i \leqslant \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} S_n$$

Ainsi, la limite du terme central existe quand f est continue et ce indépendamment du choix des $\overline{x}_i \in [x_{i-1}\,; x_i]$.

$\square$

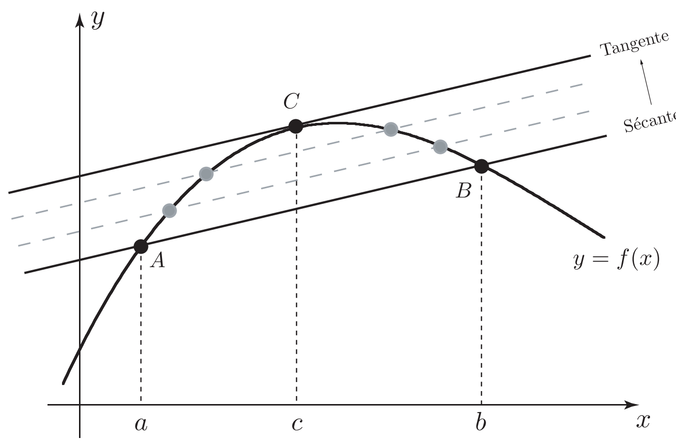
9.9 Théorème de Lagrange

Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813)

Ce théorème est aussi connu sous le nom de théorème des accroissements finis. Il va nous être utile pour la démonstration du théorème fondamental de calcul intégral. Joseph-Louis Lagrange fut considéré comme un enfant prodige. À l'âge de 19 ans, il est nommé, par le duc de Savoie, professeur de l'Académie royale pour la théorie et la pratique de l'artillerie de Turin.

Considérons une fonction f et soit $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$, deux points sur la courbe représentative de f. Supposons, de plus, que la fonction f est continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ et qu'en tout point de l'intervalle $]a\,;b[$ on peut tracer la tangente à cette courbe.
Portons notre attention sur la droite passant par les points A et B. Cette droite, qu'on appelle sécante, a pour pente :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Imaginons maintenant que l'on déplace cette sécante (vers le haut dans le graphique précédent) parallèlement à elle-même. Dans ce cas, les deux points A et B se rapprochent de plus en plus. À un moment donné, ces deux points vont coïncider en un point C et alors la sécante devient tangente à la courbe. Cette tangente au point C dont la pente est $f'(c)$ vérifie donc la relation $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On peut raisonnablement supposer que ce point de tangence C est le point de la courbe où la distance entre la courbe et la sécante est maximale.

Cet argument graphique exposé ici n'est pas une preuve formelle du théorème de Lagrange, mais contient l'idée de cette preuve. Nous nous en contenterons.

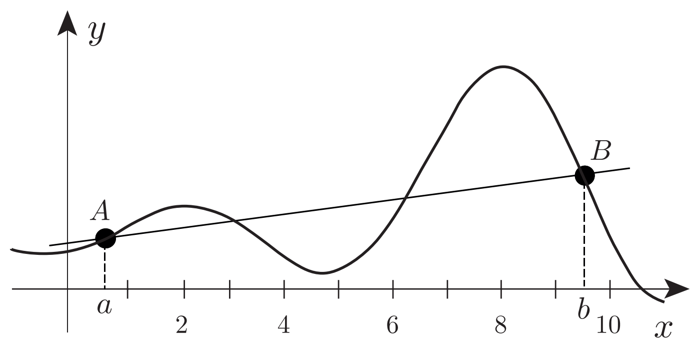
Th. de Lagrange: Soit f une fonction définie sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ et soit :

- f est continue sur $[a\,;b]$;
- f est dérivable sur $]a\,;b[$.

Alors, il existe au moins une valeur c dans l'intervalle $]a\,;b[$ telle que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Exercice 9.35: Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $[a\,;b]$ dont on donne la représentation graphique suivante :



Déterminer graphiquement la ou les valeurs de c vérifiant le théorème de Lagrange.

Exercice 9.36: Déterminer la valeur c prévue par le théorème de Lagrange pour la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;4]$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 1$. Esquisser la situation.

Exercice 9.37: **a)** On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-5\,;-2]$ par :

$$f(x) = \frac{4}{3 + x}.$$

- Déterminer si possible la valeur de c vérifiant

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- Si ce n'est pas possible, expliquer pourquoi.

b) Mêmes questions pour la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;4]$ par $f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$

9.10 Théorème fondamental du calcul intégral

Théorème: Si f est une fonction continue sur $[a\,;b]$ et s'il existe une fonction F telle que $F'(x) = f(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Preuve:

- La fonction f étant continue sur $[a\,;b]$, divisons cet intervalle en n sous-intervalles $[x_{i-1}\,;x_i]$ de longueur Δx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$,
- Soit F, une primitive (donc dérivable) continue de f. F est donc une fonction dérivable sur tout intervalle $]x_{i-1}\,;x_i[$ et continue sur tout intervalle $[x_{i-1}\,;x_i]$.
- Selon le théorème de Lagrange, il existe une valeur $\overline{x}_i \in]x_{i-1}\,;x_i[$ telle que pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(\overline{x}_i) &\iff \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\Delta x_i} = F'(\overline{x}_i) \\ &\iff F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\overline{x}_i) \cdot \Delta x_i \end{aligned}$$

  Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) \\ &= (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + \cdots + \\ &\qquad (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + (F(x_n) - F(x_{n-1})) \\ &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

- En passant à la limite pour $n \to \infty$ et tous les $\Delta x_i \to 0$

  $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i = F(b) - F(a)$ et ainsi donc :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$$

□

9.11 Intégrales impropres

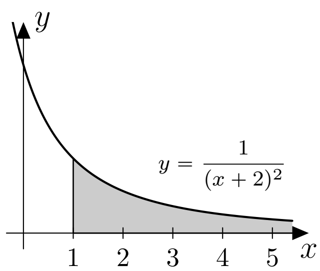
Introduction: Le concept d'intégrale définie a été introduit pour une fonction continue (donc bornée) sur un intervalle fermé $[a\,;b]$.

À l'aide de la notion de limite, nous étendrons cette définition au cas où l'intervalle est infini, c'est-à-dire pour des intervalles $[a\,;\ +\infty[$, $]-\infty\,;b]$ ou encore $]-\infty\,;+\infty[$ et également au cas où la fonction f est continue partout sur un intervalle sauf en un nombre fini de points.

Définition:

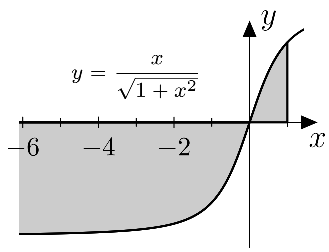
- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\,\to\,-\infty\\ b\,\to\,+\infty}}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Exemple 7: Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2}$

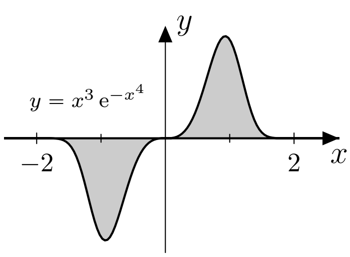


Exercice 9.38: Trouver l'aire sous la courbe $y = \mathrm{e}^{-x}$ dans le premier quadrant.

Exemple 8: Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$



Exemple 9: Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-x^4}\,\mathrm{d}x$



Exercice 9.39: Calculer les intégrales impropres suivantes :

a) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ **b)** $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3}$ **c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(4+x^2)^2}$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$ **e)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ **f)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2x^2 - x + 3\,\mathrm{d}x$

Définition:

- Si une fonction f est continue sur $]a\,;b]$, on définit :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to a^+}\int_\lambda^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Si une fonction f est continue sur $[a\,;b[$, on définit :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to b^-}\int_a^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Si une fonction f est continue sur $[a\,;c[$ puis sur $]c\,;b]$, on définit :

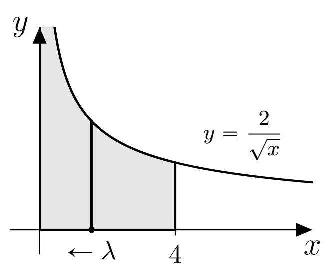
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda_1\to c^-}\int_a^{\lambda_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\lambda_2\to c^+}\int_{\lambda_2}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

☞ Dans ce dernier cas, l'intégrale **existe si et seulement si les deux limites d'intégrales admettent une valeur finie**

Remarque: Si la fonction f est continue sur tout l'intervalle $[a\,;b]$, chacune de ces 3 définitions donne la même valeur que le calcul direct :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple 10: Calculer l'aire dans le premier quadrant sous la courbe $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et à gauche de la verticale $x = 4$.



Exemple 11: Calculer $\displaystyle\int_1^{10} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-2}}$

Exercice 9.40: Calculer les intégrales impropres suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^9 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ **c)** $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-x}}$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ **e)** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{2/3}}$ **f)** $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$

g) $\displaystyle\int_{-4}^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

9.12 Intégration par parties

Introduction: Il est naturel qu'à chaque règle de dérivation corresponde une règle d'intégration. **La règle d'intégration par parties** correspond à la règle de dérivation de la multiplication :

$$(f(x) \cdot g(x))' = (f'(x) \cdot g(x)) + (f(x) \cdot g'(x))$$

Intégrons des 2 côtés du signe « égal » :

Intégration par parties:

$$\boxed{\int f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x}$$

Cette formule porte le nom de formule d'intégration par parties, que l'on utilise également sous la forme d'intégrale définie :

$$\boxed{\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x}$$

Exemple 12: Calculer $\displaystyle\int x \cdot \sin(x) \,\mathrm{d}x$

Question: 2 questions se posent assez naturellement :

- Quand doit-on songer à faire une intégration par parties ?
- Comment choisir, sur la fonction à intégrer, le terme jouant le rôle de f et celui jouant le rôle de g' ?

Éléments de réponse :

Exemple 13: Calculer $\displaystyle\int x \ln(x)\,\mathrm{d}x$

Exemple 14: Calculer $\displaystyle\int (x^2+5)\,\mathrm{e}^x\;\mathrm{d}x$

Exercice 9.41: Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

c) $\int (4x-1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ **d)** $\int 4x\ln(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 9.42: Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ **b)** $\int_1^4 \sqrt{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$ **c)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 9.43: En partant de la formule de dérivation d'une multiplication, retrouver la formule d'intégration par parties.

9.13 Intégration par décomposition en éléments simples

Introduction: Intégrer une fraction de polynômes est chose aisée si le numérateur contient un multiple de la dérivée du dénominateur.
En effet, on sait que :

$$(\ln(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)},\ \text{donc} \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$$

Dans ce paragraphe, nous observerons comment intégrer certaines fractions de polynômes en l'exprimant comme une somme de fractions plus simples, appelées **éléments simples**, dont l'intégration est immédiate.

Pour illustrer cette démarche, observons les **deux** exemples suivants :

Exemple 15:

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2)-1(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Si maintenant, nous lisons de droite à gauche, nous comprenons comment intégrer la fonction du membre de droite de cette chaîne d'égalité :

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + c$$

Mais reprenons le calcul complet "dans le bon sens" :

Exemple 16: Calculer $\displaystyle\int \frac{x^3 + x}{x - 1}\,\mathrm{d}x$

Exercice 9.44: Calculer

a) $\displaystyle\int \frac{4x-1}{(x-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$, en déduire $\displaystyle\int_2^4 \frac{4x-1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$, en déduire $\displaystyle\int_3^7 \frac{1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$, en déduire $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-12x+1}{x^2+x-12}\,\mathrm{d}x$, en déduire $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3+x^2-12x+1}{x^2+x-12}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{6x^2+5x-3}{x^3+2x^2-3x}\,\mathrm{d}x$, en déduire $\displaystyle\int_2^3 \frac{6x^2+5x-3}{x^3+2x^2-3x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 9.45: Un *pot-pourri* d'intégrales à calculer

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_4^6 \frac{1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

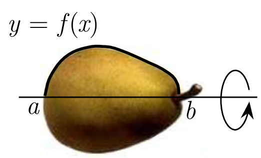
d) $\displaystyle\int_0^2 x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{x^3+1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{5x+3}{5x^2+6x+7}\,\mathrm{d}x$

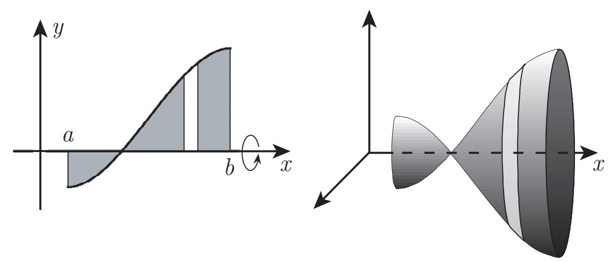
10 Application des intégrales

10.1 Les intégrales pour calculer des volumes de révolution



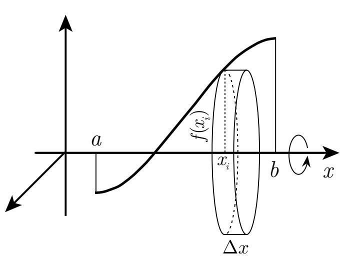
L'objectif de ce chapitre est de vous présenter une (parmi de multiples) application du calcul intégral.

Il s'agira de **calculer le volume** de solides généré par la révolution autour de l'axe Ox d'une portion de courbe $y = f(x)$ comprise entre $x = a$ et $x = b$.



Méthode des disques: L'idée est la même que lorsque l'on cherchait l'aire sous une courbe. On va découper l'intervalle $[a\,;b]$ en n sous-intervalles de largeur identique :

$$[x_0\,;x_1],\ [x_1\,;x_2], \ldots,\ [x_{n-1}\,;x_n], \text{ avec } x_0 = a \text{ et } x_n = b.$$



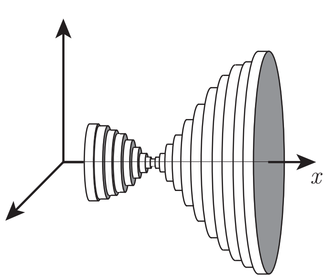
La largeur de chaque sous-intervalle est égale à la largeur de l'intervalle $[a\,;b]$ divisé par le nombre de sous-intervalles, c'est-à-dire :

$$\Delta x = (b-a)/n.$$

Pour chaque $i = 0, 1, ..., n-1$, on dessine un rectangle ayant comme base le segment $[x_i\,;x_{i+1}]$ et comme hauteur $f(x_i)$.

Lorsqu'ils tourneront autour de l'axe Ox, chacun de ces rectangles va définir un cylindre très fin (presque un disque) de volume :

$$\mathcal{V} = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x.$$



Le volume du corps de révolution sera la somme des volumes de tous ces cylindres :

$$\mathcal{V} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f\left(x_i\right)\right]^2 \Delta x$$

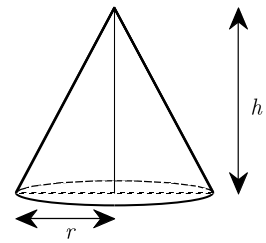
Qui se traduira (passage à la limite) en :

$$\boxed{\mathcal{V} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x}$$

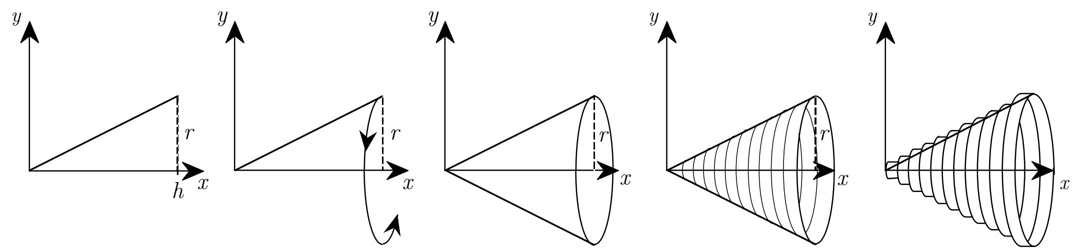
<u>Exemple</u>:

<u>But</u>: retrouver la formule "connue" du volume du cône:

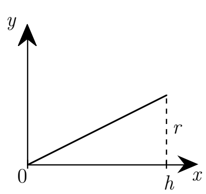
$$\boxed{\text{Volume} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h}$$



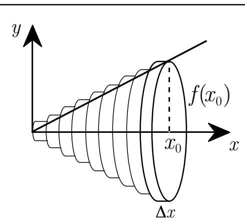
① Démarche générale



② Recherche de la fonction



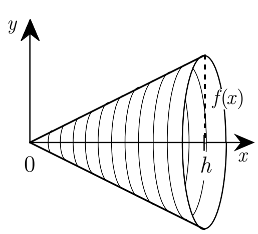
③ Expression du volume "d'une tranche"



Volume =

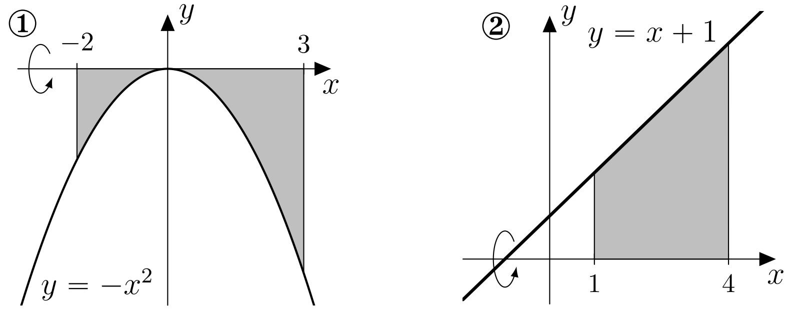
④ Expression du volume du cône:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x}$$

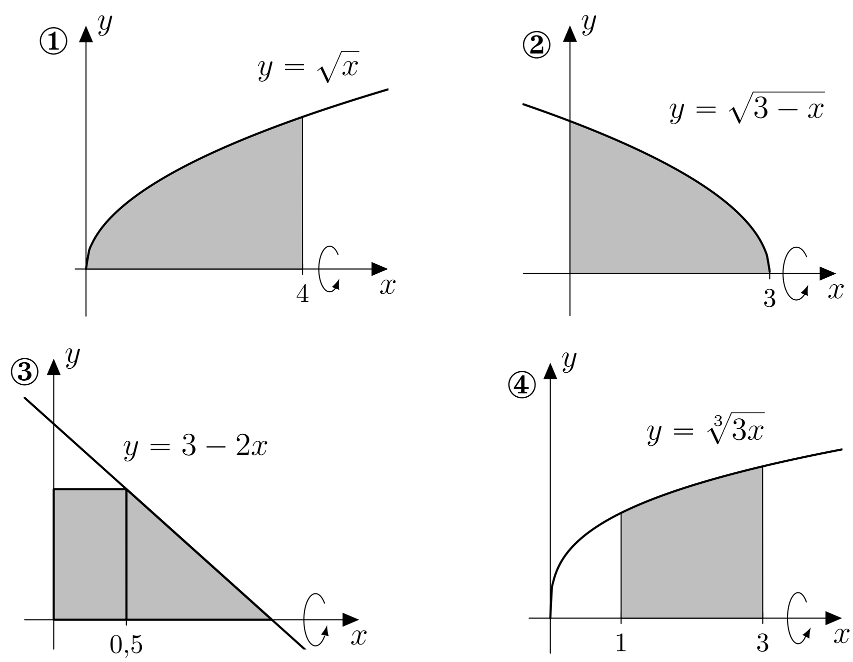


Volume =

Exercice 10.1: Esquisser l'objet obtenu par la révolution de la surface grisée autour de Ox puis calculer son volume :

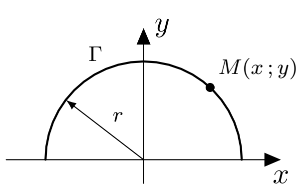


Exercice 10.2: Mêmes consignes



Exercice 10.3: On désire démontrer que le volume de la sphère de rayon r vaut :

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi r^3$$



"Le volume de la sphère
Est égal si l'on sait faire
À quatre tiers pi r trois
Même si la sphère est en bois"

a) Montrer que :

$M(x\,;y) \in$ au **demi-cercle supérieur** Γ centré en O de rayon r

$$\Updownarrow$$

$$y = +\sqrt{r^2 - x^2}$$

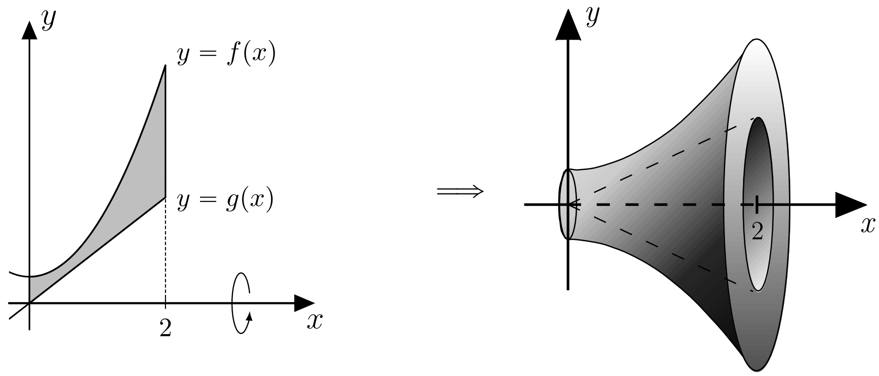
b) En déduire l'expression de la fonction f correspondante à ce demi-cercle ainsi que son ensemble de définition.

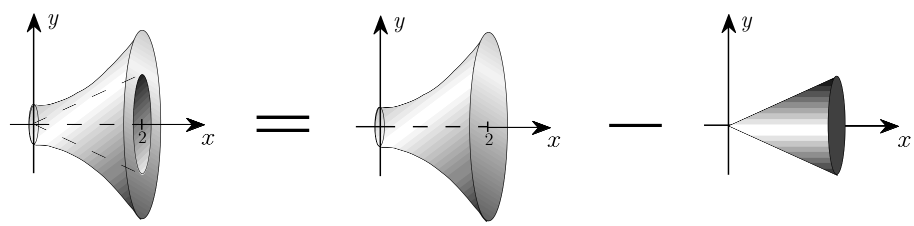
c) Calculer le volume de la sphère engendrée par la rotation de la courbe $y = f(x)$ autour de Ox

10.2 Calcul du volume d'un solide de révolution « creux »

Introduction: Nous allons maintenant calculer le volume engendré par la révolution autour de l'axe Ox de la surface comprise entre les deux courbes :

$$y = x^2 + 1/2 \qquad \text{et} \qquad y = x$$





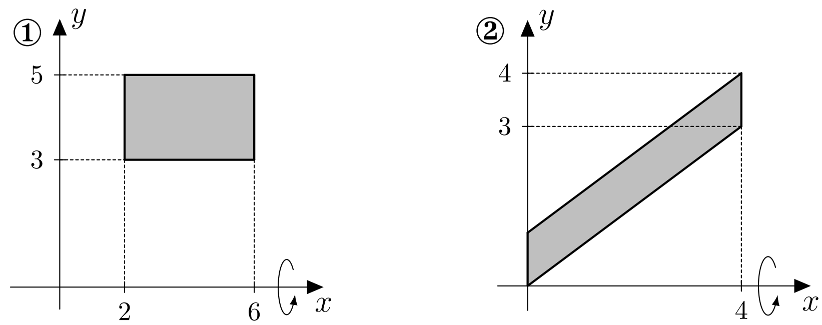
$$\mathcal{V} = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x - \pi \int_0^2 [g(x)]^2 \,\mathrm{d}x$$

Ou plus rapidement

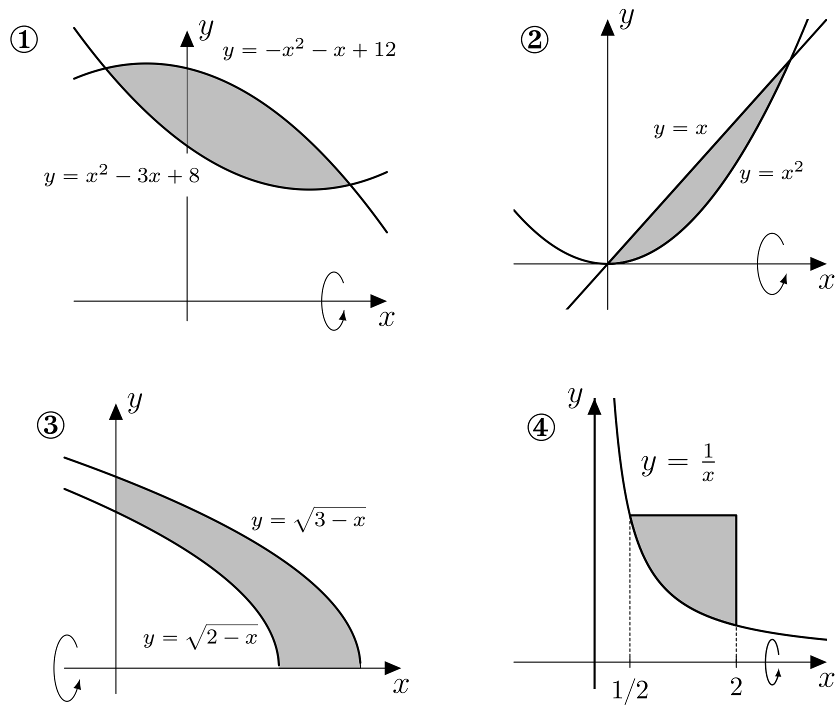
$$\boxed{\mathcal{V} = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \,\mathrm{d}x}$$

Dans notre cas :

Exercice 10.4: Esquisser l'objet obtenu par la révolution de la surface grisée autour de Ox puis calculer son volume :



Exercice 10.5: Mêmes consignes



10

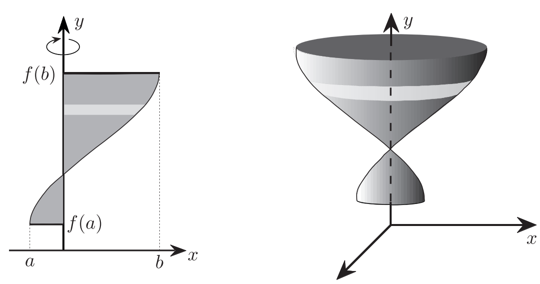
Applications des intégrales (renf)

Objectif: *Après avoir calculé des volumes de solides engendrés par la révolution autour de l'axe Ox d'une portion de courbe $y = f(x)$, nous effectuerons de même autour de l'axe Oy.*
Nous généraliserons la méthode à quelques solides comparables à un "empilement de tranches".

10.3 Calcul d'un volume de révolution autour de l'axe Oy

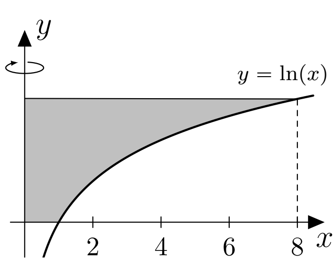
Formule: Le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe Oy du domaine limité par le graphe de $y = f(x)$ et les droites $x = a$ et $x = b$ se calcule à l'aide de :

$$\mathcal{V} = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} \left[\,{}^{r}f(y)\right]^2 \mathrm{d}y$$

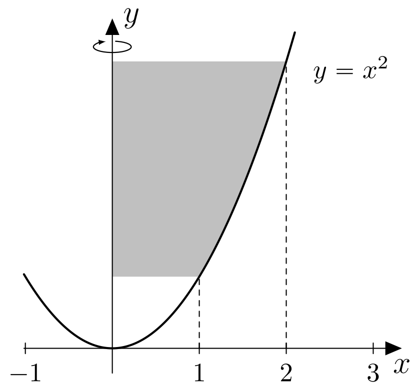


Observons ceci sur un exemple :

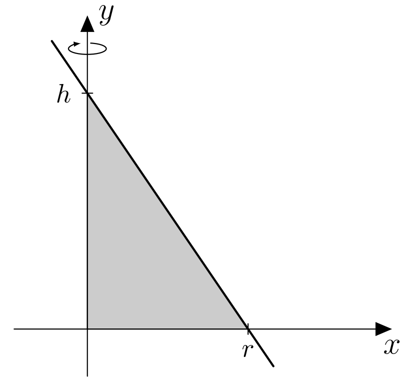
Exemple 1: Représenter puis calculer le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe Oy représenté ci-contre :



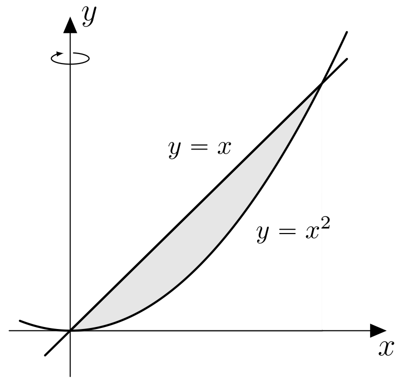
Exercice 10.6: Représenter approximativement l'objet obtenu par la révolution de la surface grisée autour de Oy, puis calculer son volume.



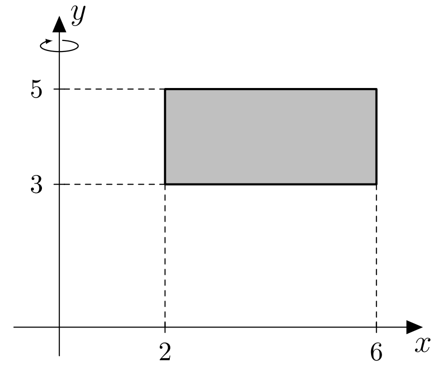
a)



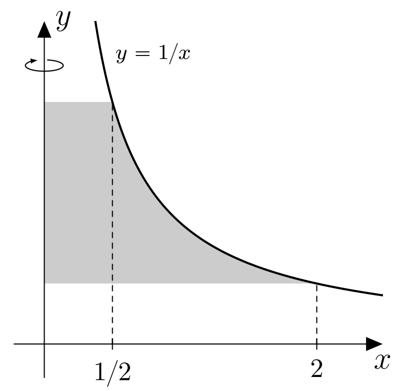
b)



c)

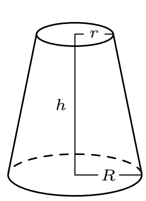


d)



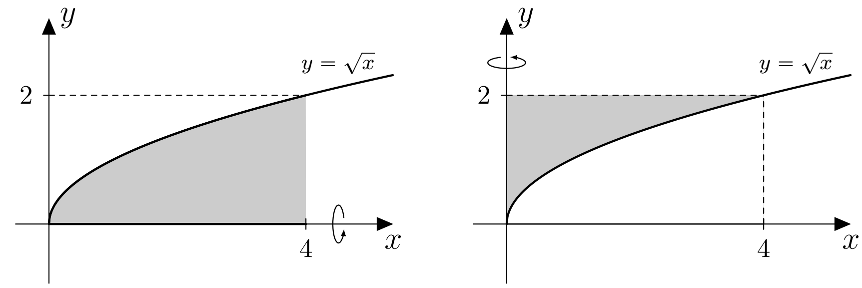
e)

Exercice 10.7: Donner le volume du tronc de cône représenté ci-contre.

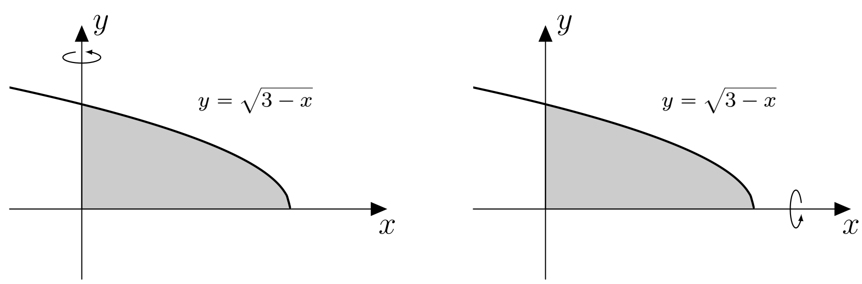


Exercice 10.8:

- Représenter approximativement le volume engendré par la révolution autour de l'axe précisé.
- Lequel des 2 objets comparés admet le plus grand volume ?



a)

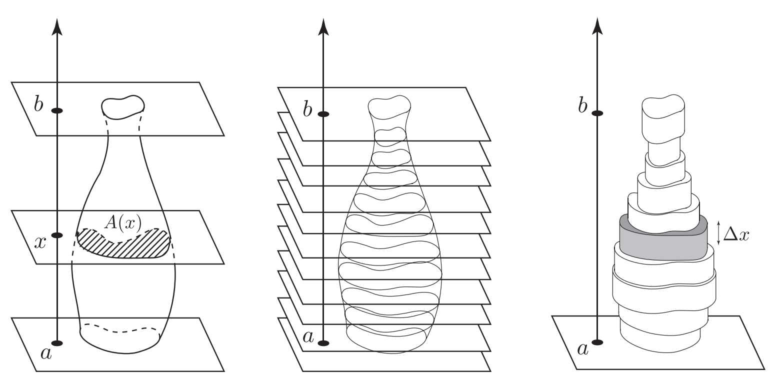


b)

10.4 Calcul d'un volume découpé en tranches

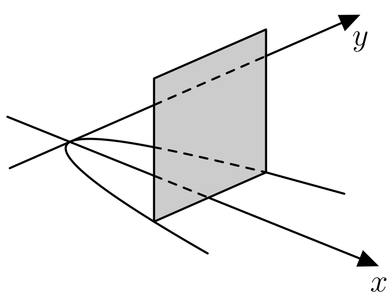
Formule: Soit S un solide compris entre les plans et (qui sont perpendiculaires à l'axe Ox). Pour tout $x \in [a\,;b]$ on désigne par $A(x)$ l'aire de intersection de S et du plan perpendiculaire à l'axe en x.
Si $A(x)$ est continue sur $[a\,;b]$, alors le volume $\mathcal{V}$ du solide S est donné par :

$$\mathcal{V} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\cdot\Delta x \quad \text{ou plutôt} \quad \boxed{\mathcal{V} = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x}$$

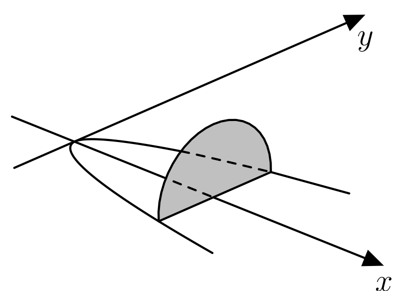


Exemple 2: La base d'un solide est le cercle du plan Oxy d'équation $x^2 + y^2 = r^2$. Chaque section de ce solide par un plan perpendiculaire à l'axe Oy est un demi-cercle dont l'un des côtés est dans la base.
Calculer le volume de ce solide.

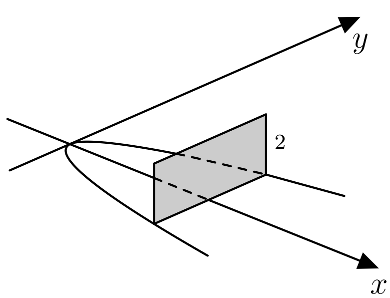
Exercice 10.9: Dans le plan Oxy, on considère la région R délimitée par $x = y^2$ et $x = 9$. Calculer le volume du solide, dont R est la base et dont chaque section par un plan perpendiculaire à Ox a la forme donnée, après avoir esquissé le solide :



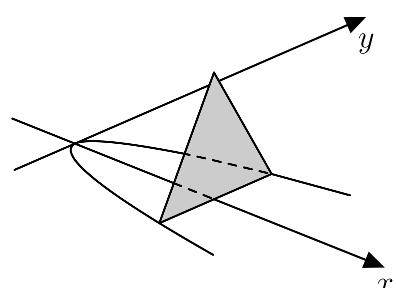
a) un carré



b) un demi-cercle



c) un rectangle de hauteur 2

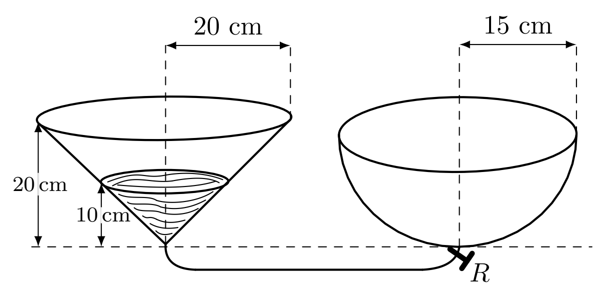


d) un triangle équilatéral

Exercice 10.10: La base d'un solide S est située dans le plan Oxy. Cette base est le domaine borné délimité par $y = x$ et $y = x^2$. Chaque section de S par un plan perpendiculaire à Ox est un carré dont l'un des côtés est dans la base. Esquisser ce solide et calculer son volume.

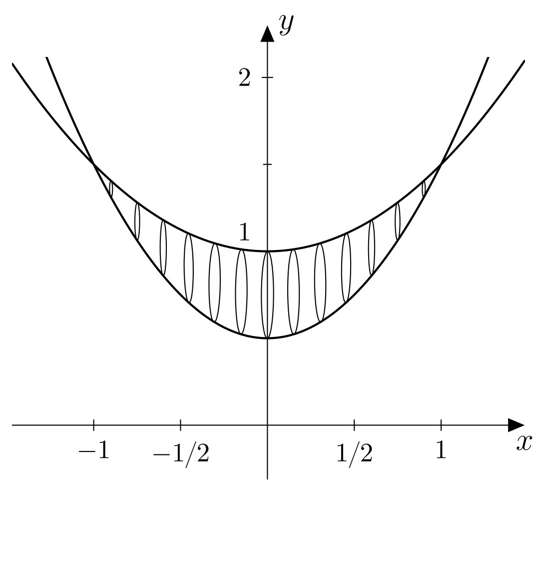
Exercice 10.11: La base d'un solide est le cercle du plan Oxy d'équation $x^2 + y^2 = 4$. Chaque section de ce solide par un plan perpendiculaire à l'axe Oy est un carré dont l'un des côtés est dans la base. Calculer le volume de ce solide.

Exercice 10.12: Déterminer la hauteur atteinte par le liquide dans le cône et la demi-sphère après l'ouverture du robinet R.



Exercice 10.13: Déterminer le volume du croissant de section circulaire et borné par les deux fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1.$$



A

Bibliographie

Bibliographie

1. CRM, *Analyse (1997)*, Édition du Tricorne

2. H. Bovet, *Analyse (1999)*, Polymaths ou sur Payot online

`https://www.payot.ch/Detail/analyse-hubert_bovet-2080002732756`

Site Web

1. Le site companion de ce polycopié : `www.javmath.ch`

Avec une version pdf de ce polycopié et quelques exercices supplémentaires ou animations.

2. Le site *Nymphomath* de Didier Müller :

`http://www.nymphomath.ch/MADIMU2/ANALY/INDEX.HTM`

Support de cours en pdf avec des exercices et leurs solutions

3. Une partie mathématique du site du collège *Sismondi* proposé par Serge Picchione :

`https://www.sismondi.ch/disciplines/mathematiques/espace-perso-profs/serge-picchione`

Support de cours en pdf avec des exercices et leurs solutions

$\mathcal{A}$

Quelques éléments de solutions

1.7 Optimisation

Indices pour obtenir les réponses du Chapitre 7 :

Attention : Ces indices ne sont à utiliser que lorsque vous êtes coincés en cours d'exercice ou que la réponse finale obtenue n'est pas la bonne.

Ne les utilisez pas comme fiche-guide, vous risqueriez de court-circuiter les difficultés et ainsi ne pas acquérir l'autonomie souhaitée par ce type d'exercices.

Exercice 7.1:
- Appeler x le côté des carrés à enlever.
- On obtient $\mathcal{V}(x) = x(18 - 2x)(22 - 2x)$.
- On obtient $\mathcal{V}'(x) = 4(3x^2 - 40x + 99)$ et utiliser la formule du 2e degré.

Exercice 7.2:
- Appeler x le plus petit des deux nombres.
- On obtient $\mathcal{P}(x) = x(x + 12)$.
- $\mathcal{P}'(x) = 2x + 12$.

Exercice 7.3:
- Appeler x la largeur du pâturage perpendiculaire à la route.
- En tenant compte des prix, on obtient $\mathcal{P}(x) = 300\left(x + x + \dfrac{1}{x}\right) + 500 \cdot \dfrac{1}{x}$.
- On obtient $\mathcal{P}'(x) = \dfrac{200(\sqrt{3}x + 2)(\sqrt{3}x - 2)}{x^2}$.

Exercice 7.4:
- Poser $A(x\,;0)$ et $B(x\,;y)$.
- La hauteur $\boldsymbol{y}$ du triangle en fonction de x : $y = \sqrt{9 - x}$.
- On obtient l'aire : $\mathcal{A}(x) = \dfrac{1}{2}x\sqrt{9 - x}$ puis $\mathcal{A}'(x) = \dfrac{3(6 - x)}{4\sqrt{9 - x}}$.

Exercice 7.5:
- Appeler x la 1/2 base du rectangle.
- La hauteur y du rectangle s'obtient en déterminant l'équation de la parabole : $y = -\dfrac{4}{9}(x^2 - 9)$.
- On obtient l'aire : $\mathcal{A}(x) = -\dfrac{8}{9}x^3 + 8x$ puis $\mathcal{A}'(x) = -\dfrac{8}{3}x^2 + 8$.

Exercice 7.6:
- Appeler x la 1$^{\text{re}}$ coordonnée de P. (supposez-la positive)
- La hauteur du rectangle y s'obtient à l'aide de l'équation de AC :
$$y = -2x + 6.$$
- $\mathcal{A}(x) = -4x^2 + 12x$.
- Il s'agit d'une fct du 2$^{\text{e}}$ degré "$\cap$", son max s'obtient rapidement à l'aide de $x = -\frac{b}{2a}$.

Exercice 7.7:
- Appeler x la 1$^{\text{re}}$ coordonnée du point P cherché.
- La distance s'obtient à l'aide de la norme $\|\overrightarrow{OP}\|$ ou th. de Pythagore :
$$d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 9)^2}.$$
- Puis $d'(x) = \dfrac{x(2x + \sqrt{34})(2x - \sqrt{34})}{2\sqrt{x^4 - 17x^2 + 81}}$.

Exercice 7.8:
- Appeler x le rayon du cylindre, la hauteur du cylindre s'obtient à l'aide de la formule du volume du cylindre.
- La quantité de matière est associée à l'aire totale du cylindre :
$$\mathcal{A} = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$
- On obtient $\mathcal{A}(x) = \dfrac{2\pi x^3 + 3{,}5}{x}$ puis $\mathcal{A}'(x) = \dfrac{4\pi x^3 - 3{,}5}{x^2}$.

Exercice 7.9:
- En exprimant les dimensions du parallélogramme en fonction de x, on obtient $MN = \frac{6}{5}x$ et la hauteur du parallélogramme $= \frac{4}{5}(5 - x)$.
- On obtient $\mathcal{A}(x) = -\frac{24}{25}x^2 + \frac{24}{5}x$. Son max s'obtient à l'aide de $x = -\frac{b}{2a}$.

Exercice 7.10:
a) Poser un système d'équations et le résoudre.
b)
- x étant la 1$^{\text{re}}$ coordonnée de P, on obtient : $\mathcal{A}(x) = (x^2 + 1)(2 - x)$.
- Puis $\mathcal{A}'(x) = -3x^2 + 4x - 1$.
- Ne pas oublier de contrôler ce qui se passe au bord de $\mathrm{E_D}$.

Exercice 7.11:
- Appeler x la hauteur de la zone imprimée.
- On obtient $\mathcal{A}(x) = (x + 10)\left(\dfrac{600}{x} + 6\right)$.
- Puis $\mathcal{A}'(x) = 6 - \dfrac{6000}{x^2}$.

Exercice 7.12:
- Appeler x le nbre de poiriers **ajoutés**.
- Rendement : $\mathcal{R}(x) = (60 + x)(480 - 5x)$.
- Il s'agit d'une fct du 2$^{\text{e}}$ degré "$\cap$", son max s'obtient rapidement à l'aide de $x = -\frac{b}{2a}$.

Exercice 7.13:
- Appeler x le rayon du cercle de base, h la hauteur du cône.
- On exprime le volume en fonction de h par : $\mathcal{V}(h) = \frac{1}{3}\pi(100 - h^2) \cdot h$.
- Puis $\mathcal{V}'(h) = \frac{\pi}{3}(100 - 3h^2)$.

Exercice 7.14:
a) Appeler x la base du rectangle, on obtient $\mathcal{V}(x) = \frac{\pi}{4}(30x^2 - x^3)$.
b) Appeler x la base du rectangle, on obtient $\mathcal{A}(x) = \pi(30x - x^2)$.
c) Appeler x la base du rectangle, on obtient $\mathcal{A}(x) = \pi(30x - \frac{1}{2}x^2)$.

Exercice 7.15:
- Appeler x la longueur de la face avant du tiroir, sa hauteur $h = \dfrac{250}{x}$.
- En tenant compte des prix, on obtient $\mathcal{P}(x) = 30 + 1{,}6x + \dfrac{800}{x}$.
- Puis $\mathcal{P}'(x) = \dfrac{1{,}6x^2 - 800}{x^2}$.

Exercice 7.16:
- Appeler x la hauteur la photo, $y - 2$ la largeur de celle-ci.
- On obtient $\mathcal{A}(x) = 10x - x^2$.
- La fct à optimiser est du 2^{e} degré "$\cap$", son max s'obtient en $x = -\frac{b}{2a}$.

Exercice 7.17:
- Prix de revient = coût essence + salaire chauffeur.
$$\mathcal{P}(v) = 15 \cdot \left(\frac{600}{v} + \frac{v}{3}\right) \cdot 2 + 26 \cdot \left(\frac{1500}{v}\right) = \frac{57'000}{v} + 10v.$$
- Puis $\mathcal{P}'(v) = \dfrac{10(v^2 - 5'700)}{v^2}$.

Exercice 7.18:
- $\mathcal{P}'(\alpha) = 0 \iff \dfrac{v_0^2}{g}\,(\sin(2\alpha))' = 0 \iff \dfrac{2v_0^2}{g}\cos(2\alpha) = 0$.

Exercice 7.19:
- $\mathcal{A}(\alpha) = 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \implies A'(\alpha) = 2\big(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\big)$
- $\mathcal{A}'(\alpha) = 0 \iff \sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}$ ou $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}$ (selon la subst).

Exercice 7.20:
$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ base du } \Delta :\ b = 2\sin(\alpha) \\ \bullet \text{ hauteur du } \Delta :\ h = 1 + \cos(\alpha) \end{array}\right\} \implies \mathcal{A}(\alpha) = \sin(\alpha) \cdot \big(1 + \cos(\alpha)\big)$$
- $\mathcal{A}'(\alpha) = 0 \iff \cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ ou $\cos(\alpha) = -1$

Exercice 7.21:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ temps pour } AP: \; t_{AP} = \dfrac{\text{dist.}}{\text{vit.}} = \dfrac{9}{4\cos(\alpha)} \\ \bullet \text{ temps pour } PB: \; t_{PB} = \dfrac{\text{dist.}}{\text{vit.}} = \dfrac{15-9\tan(\alpha)}{5} \end{array}\right\} \Longrightarrow \dots$$

$$\Longrightarrow t(\alpha) = \frac{9}{4\cos(\alpha)} + \frac{15-9\tan(\alpha)}{5}$$

- $t'(\alpha) = \frac{9}{4}\big((\cos(\alpha))^{-1}\big)' + \frac{1}{5}\big(15-9\tan(\alpha)\big)' = \dfrac{9(5\sin(\alpha)-4)}{20\cos^2(\alpha)}$

Exercice 7.22:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ temps pour } AB: \; t_{AB} = \dfrac{\text{dist.}}{\text{vit.}} = \dfrac{4\cos(\alpha)}{2} \\ \bullet \text{ temps pour } BC: \; t_{BC} = \dfrac{\text{dist.}}{\text{vit.}} = \dfrac{4\alpha}{4} \end{array}\right\} \Longrightarrow t(\alpha) = 2\cos(\alpha) + \alpha$$

- $t'(\alpha) = 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{6}$ (s'agit-il vraiment d'un min ??)

Exercice 7.23: Pour la partie **a)**, substituez ci-dessous a par 10.

- Volume $= 2a^3\cos(\alpha)$
- Volume $= a^3\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)$
- $\mathcal{V}'(\alpha) = a^3\big(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) - 2\sin(\alpha)\big)$
- $\mathcal{V}'(\alpha) = 0 \iff 2\sin^2(\alpha) + 2\sin(\alpha) - 1 = 0$ (à résoudre avec la formule)

Réponses finales du Chapitre 7

Exercice 7.1: Les carrés doivent avoir un côté d'env. 3,28 cm.

Exercice 7.2: Le produit minimum vaut -36.

Exercice 7.3: Les dimensions sont $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ km et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ km.

Exercice 7.4: $A(6\,;0)$ pour une aire max de $3\sqrt{3}\,u^2$.

Exercice 7.5: Les dimensions sont $2\sqrt{3}$ et $8/3$.

Exercice 7.6: On obtient les points $P(3/2\,;0)$ et $P(-3/2\,;0)$, les abscisses sont donc $x = \pm 3/2$.

Exercice 7.7: Les points cherchés sont $P\Big(-\frac{\sqrt{34}}{2}\,;-\frac{1}{2}\Big)$ ou $P\Big(\frac{\sqrt{34}}{2}\,;-\frac{1}{2}\Big)$.

Exercice 7.8: Le rayon vaut env. 6,53 cm et la hauteur vaut env. 13,06 cm.

Exercice 7.9: **a)** L'aire est maximum pour $x = 5/2$.
b) Le parallélogramme est un losange pour $x = 25/11$.
(PS. Comparez les deux valeurs obtenues ! !)

Exercice 7.10: **a)** $y = x^2 + 1$.
b) $P(1\,;2)$ et l'aire max vaut $\mathcal{A} = 2\,u^2$.
$P(0\,;1)$ et l'aire max vaut $\mathcal{A} = 2\,u^2$. **(au bord du domaine ! !)**

Exercice 7.11: Les dimensions sont $6\sqrt{10} + 6$ cm et $10\sqrt{10} + 10$ cm.

Exercice 7.12: Il devra planter 18 nouveaux poiriers.

Exercice 7.13: La hauteur $h \approx 5{,}77$ cm.

Exercice 7.14: **a)** le plus grand volume pour $x = 20$ cm et $y = 10$ cm.
b) la plus grande aire latérale pour $x = 15$ cm et $y = 15$ cm.
c) la plus grande aire totale pour $x = 30$ cm et $y = 0$ cm.
En fait comme $x = 30$ cm, le rectangle se réduit à un segment.

Exercice 7.15: Les dimensions sont $10\sqrt{5}$ cm, $5\sqrt{5}$ cm et 40 cm.

Exercice 7.16: La planche devra être découpée en quatre morceaux :
deux de 5 cm et deux de 7 cm.

Exercice 7.17: **b)** La vitesse moyenne est d'environ 75,5 km/h.

Exercice 7.18: La portée est maximale pour un angle $\alpha = \pi/4$.

Exercice 7.19: Le rectangle est d'aire maximale pour un angle $\alpha = \pi/4$.

Exercice 7.20: Le triangle est d'aire maximale pour un angle $\alpha = \pi/3$.
Mais est-ce vraiment une surprise ?

Exercice 7.21: L'angle $\alpha = \sin^{-1}(4/5) \approx 0{,}93$ ou env. $53{,}13°$).
Le point d'accostage est situé à env. 3 km de B

Exercice 7.22: L'angle $\alpha = \pi/6$ correspond à un **maximum** de la fonction $t(\alpha)$.
Le min doit donc se trouver au bord de $\mathrm{E_D}$. Il s'agira de $\alpha = \pi/2$.

Exercice 7.23: **a)** Le volume est maximal pour $\alpha = \sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \approx 0{,}37$
(ou env. $21{,}47°$).
b) Réponse identique.

1.8 Les fonctions exponentielle et logarithme naturelles

Exercice 8.1:

a)	$\mathrm{E_D} = \mathbb{R}_+^*$	$\mathrm{S} = \{\mathrm{e}\}$
b)	$\mathrm{E_D} = \mathbb{R}$	$\mathrm{S} = \{\ln(5) - 3\}$
c)	$\mathrm{E_D} =]\,4\,;+\infty\,[$	$\mathrm{S} = \{\mathrm{e}^4 + 4\}$
d)	$\mathrm{E_D} = \mathbb{R}$	$\mathrm{S} = \varnothing$
e)	$\mathrm{E_D} = \mathbb{R}$	$\mathrm{S} = \{10\ln(7)\}$
f)	$\mathrm{E_D} = \mathbb{R}_+^*$	$\mathrm{S} = \{1\}$
g)	$\mathrm{E_D} = \mathbb{R}^*$	$\mathrm{S} = \{\pm 1\}$
h)	$\mathrm{E_D} =]\,8/5\,;+\infty\,[$	$\mathrm{S} = \{8/3\}$
i)	$\mathrm{E_D} =]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]8/5\,;+\infty[$	$\mathrm{S} = \{8/3\}$
j)	$\mathrm{E_D} = \mathbb{R}$	$\mathrm{S} = \{\pm\sqrt{\ln(4)}\}$

Exercice 8.2:

$\mathbf{E_D}$	**Zéros**	**Tableau de signes**
a) $]-\infty\,;1/2[$	en $x = 1/4$	$1/4$; $1/2$ — $f(x)$: $+$ 0 $-$ $\vert$
b) $]\,0\,;+\infty[-\{1\}$	aucun	0 ; 1 — $f(x)$: $\vert$ $-$ $\Vert$ $+$
c) $]-2\,;1[$	en $x = -1/2$	-2 ; $-1/2$; 1 — $f(x)$: $\vert$ $-$ 0 $+$ $\vert$
d) $]\,0\,;+\infty[-\{\mathrm{e}^2\}$	en $x = \mathrm{e}^{-3}$	0 ; e^{-3} ; e^2 — $f(x)$: $\vert$ $+$ 0 $-$ $\Vert$ $+$
e) $\mathbb{R}$	en $x = \pm 1$	-1 ; 1 — $f(x)$: $+$ 0 $-$ 0 $+$
f) $]-\infty\,;-1] \cup [0\,;+\infty[$	aucun	-1 ; 0 — $f(x)$: $+$ $+$
g) $\mathbb{R}^*$	en $x = -3$	-3 ; 0 — $f(x)$: $-$ 0 $+$ $\Vert$ $+$
h) $\mathbb{R} - \{-3\}$	aucun	-3 — $f(x)$: $+$ $\Vert$ $+$

Exercice 8.3: Si $f(x) = \mathrm{e}^x$ alors $f'(x) = \mathrm{e}^x$

D'ailleurs, à une constante près, c'est la seule fonction qui admet elle-même ***pour propre dérivée****.*

Exercice 8.4: Si $f(x) = \ln(x)$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Exercice 8.5:

$\mathbf{E_D}$	**Zéros**	$\boldsymbol{f'(x)}$
a) $\mathbb{R}$	aucun	$5\,\mathrm{e}^{5x}$
b) $\mathbb{R}$	aucun	$2x\,\mathrm{e}^{x^2}$
c) $\mathbb{R}^*$	aucun	$-\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{1/x}$
d) $]-\infty\,;5/4[$	en $x = 1$	$\dfrac{4}{4x-5}$
e) $]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty[$	en $x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$	$\dfrac{2x-1}{x(x-1)}$
f) $\mathbb{R}^*$	aucun	$(2x-1)\,\mathrm{e}^{1/x}$
g) $]\,0\,;+\infty\,[$	en $x = \mathrm{e}$	$\ln(x)$
h) $]\,0\,;\mathrm{e}\,[\,\cup\,]\,\mathrm{e}\,;+\infty[$	en $x = \mathrm{e}^2$	$\dfrac{1}{x(\ln(x)-1)^2}$
i) $\mathbb{R}$	en $x = \ln(2)$ ou $x = 0$	$(2\,\mathrm{e}^x - 3)\,\mathrm{e}^x$

Exercice 8.6: **a)** $P(1\,;\mathrm{e})$ $\quad y = \mathrm{e}\cdot x$ $\qquad$ **b)** $P(\mathrm{e}\,;1)$ $\quad y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\cdot x$

Exercice 8.7: **a)** $C(10) \cong 3{,}33\,;\ C(20) \cong 5{,}48\,;\ C(30) \cong 5{,}14\,;\ C(70) \cong 3{,}53$

b) $C'(t) = \dfrac{110(3-\ln(t))}{t^2}$

La capacité max. de 5,48 litres est atteinte à l'âge de 20,09 ans

Exercice 8.8:

a) $\lim\limits_{x\to\text{ nbre}} f(x)\cdot g(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\text{ nbre}} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ **indeterminé**

b) $\lim\limits_{x\to\text{ nbre}} f(x)\cdot g(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\text{ nbre}} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ **indeterminé**

c) $\lim\limits_{x\to\text{ nbre}} f(x)\cdot g(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\text{ nbre}} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ **indeterminé**

d) $\lim\limits_{x\to\text{ nbre}} f(x)\cdot g(x) = 0^+$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\text{ nbre}} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ **indeterminé**

e) $\lim\limits_{x\to\text{ nbre}} f(x)\cdot g(x) = 0^+$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\text{ nbre}} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ **indeterminé**

f) $\lim\limits_{x\to\text{ nbre}} f(x)\cdot g(x) = 0^-$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\text{ nbre}} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ **indeterminé**

g) $\lim\limits_{x\to\text{ nbre}} f(x)\cdot g(x) =$ **indeterminé** $\qquad \lim\limits_{x\to\text{ nbre}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

h) $\lim\limits_{x\to\text{ nbre}} f(x)\cdot g(x) =$ **indeterminé** $\qquad \lim\limits_{x\to\text{ nbre}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Exercice 8.9: Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0^+$

Exercice 8.10: Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0_+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\ln(x)} = +\infty$

Exercice 8.11: **a)** indéterminé du type $"\dfrac{+\infty}{+\infty}"$.

x	10	100	230	...
$\mathrm{e}^x / \ln(x)$	~ 9566	$\sim 5{,}8\cdot 10^{42}$	$\sim 1{,}4\cdot 10^{99}$	...

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln(x)} = +\infty$

b) indéterminé du type $"0_+\cdot(-\infty)"$. Tableau de valeurs, on obtient 0^-

c) indéterminé du type $"(+\infty)\cdot 0_+"$. Tableau de valeurs, on obtient 0^+

d) indéterminé du type $"(+\infty)\cdot 0_+"$. Tableau de valeurs, on obtient 0^+

Exercice 8.12: **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^{2x}} = "\dfrac{\ln(+\infty)}{\mathrm{e}^{+\infty}}" = "\dfrac{+\infty}{+\infty}"$ **ind.** mais podium.

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathbf{0^+}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln\left(x^3\right) = "\mathrm{e}^{-\infty}\cdot\ln(+\infty)" = "0^+\cdot(+\infty)"$ **ind** mais podium

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln\left(x^3\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^3\right)}{\mathrm{e}^x} = "\frac{\ln(+\infty)}{\mathrm{e}^{+\infty}}" = \mathbf{0^+}$$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}\,x = "\mathrm{e}^{+\infty}\cdot(-\infty)" = "(+\infty)\cdot(-\infty)" = \boldsymbol{-\infty}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x}\ln(-x) = "\mathrm{e}^{-\infty}\cdot\ln(+\infty)" = "0^+\cdot(+\infty)"$ **ind.**

posons $\boldsymbol{t=-x}$ (donc $x=-t$)

$$= \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{\mathrm{e}^t} = "\frac{\ln(+\infty)}{\mathrm{e}^{+\infty}}"$$

$$\overset{\text{podium}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x}\ln(-x) = \mathbf{0^+}$$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\,\mathrm{e}^{3x-5} = \text{"}(-\infty)^3\cdot\mathrm{e}^{-\infty}\text{"} = \text{"}(-\infty)\cdot 0^+\text{"}$ **indeterminé**

posons $\boldsymbol{t=-x}$ (donc $x=-t$)

$$= \lim_{t\to+\infty}(-t)^3\,\mathrm{e}^{-3t-5} = \lim_{t\to+\infty}\frac{-t^3}{\mathrm{e}^{3t+5}} = \text{"}\frac{-\infty^3}{\mathrm{e}^{+\infty}}\text{"}$$

$$\overset{\text{podium}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} x^3\,\mathrm{e}^{3x-5} = \mathbf{0^-}$$

f) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2} = \text{"}\dfrac{\mathrm{e}^{+\infty}}{0^+}\text{"} = \boldsymbol{+\infty}$

g) $\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{1/x}\,x^2 = \text{"}\mathrm{e}^{+\infty}\cdot 0^+\text{"} = \text{"}(+\infty)\cdot\ 0^+\text{"}$ **indeterminé**

posons $\boldsymbol{t=1/x}$ (donc $x=1/t$)

$$= \lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^t\cdot\frac{1}{t^2} = \text{"}\frac{\mathrm{e}^{+\infty}}{(+\infty)^2}\text{"} \overset{\text{podium}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to0^+}\mathrm{e}^{1/x}\,x^2 = \boldsymbol{+\infty}$$

h) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x} = \text{"}\dfrac{\mathrm{e}^{-\infty}}{0^+}\text{"} = \text{"}\dfrac{0^+}{0^+}\text{"}$ **indeterminé**

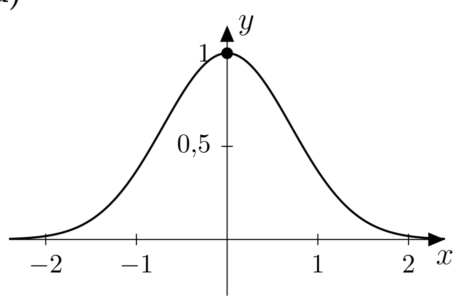
posons $\boldsymbol{t=1/x}$ (donc $x=1/t$)

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1/t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^t} = \text{"}\frac{+\infty}{\mathrm{e}^{+\infty}}\text{"} \overset{\text{podium}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{-1/x}}{x} = \mathbf{0^+}$$

Exercice 8.13: **a)** 0 **b)** $\mathrm{e}^{1/2}$ **c)** 1
d) 0 **e)** $\ln(3)$ **f)** $-\infty$

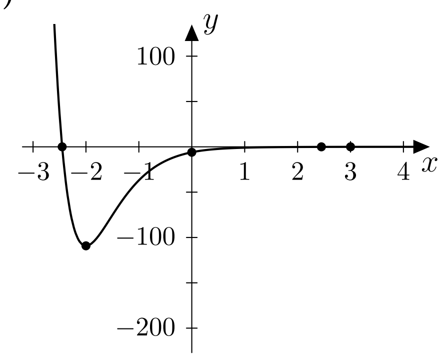
Exercice 8.14: Des éléments de réponses pourront être vus ensemble à votre demande.

Exercice 8.15: **a)**



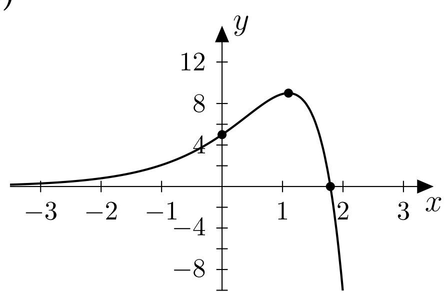
- $\mathrm{E_D} = \mathbb{R}$
- pas de zéro
- AH en $y=0$
- $f'(x) = -2x\cdot\mathrm{e}^{-x^2}$
- Max $(0\,;1)$
- Ord. origine en $y=1$

b)



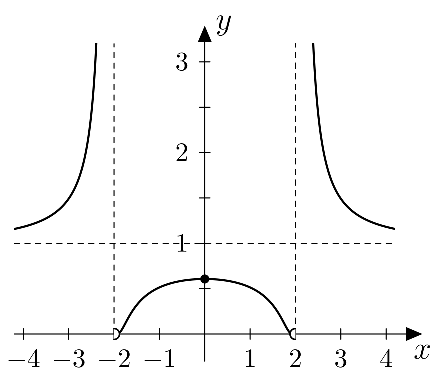
- $\mathrm{E_D} = \mathbb{R}$
- zéros en $x = \pm\sqrt{6}$
- AHD en $y = 0$
- $f'(x) = -2(x-3)(x+2)\cdot \mathrm{e}^{-2x}$
- Min $(-2\,;-2\,\mathrm{e}^4)$
- Max $(3\,;3\,\mathrm{e}^{-6})$
- Ord. origine en $y = -6$

c)



- $\mathrm{E_D} = \mathbb{R}$
- zéros en $x = \ln(6)$
- AHG en $y = 0$
- $f'(x) = -2\,\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 3)$
- Max $(\ln(3)\,;9)$
- Ord. origine en $y = 5$

d)



- $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} - \{-2\,;2\}$
- pas de zéro
- AV en $x = -2^-$ et $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0^+$ (pt limite $(-2^+;0^+)$)
- AV en $x = 2^+$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0^+$ (pt limite $(2^-;0^+)$)
- AH en $y = 1$
- $f'(x) = \dfrac{-4x}{\left(x^2-4\right)^2}\cdot \mathrm{e}^{2/(x^2-4)}$
- Max $(0\,;\mathrm{e}^{-1/2})$ et Ord. origine

Exercice 8.16: Pas de réponse proposée

Exercice 8.17:

a) $5/7$	**b)** 1	**c)** e^2	**d)** -1	**e)** 1
f) $1/\mathrm{e}$	**g)** 1	**h)** $-\infty$	**i)** 4	**j)** 0
k) $+\infty$	**l)** $+\infty$	**m)** $-\infty$		

Exercice 8.18:

a) B - H $\to 0^+$

b) $-\infty$ (!! ce n'est pas un cas pour B - H !!)

c) $-\infty$ (!! ce n'est pas un cas pour B - H !!)

d) B - H $\to 0+$

Exercice 8.19: Pas de réponse proposée

Exercice 8.20:

a) pas d'AV, AO en $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$

b) points limites en $(-1^- ; 0^+)$ et en $(3^+ ; 0^+)$,
AOG en $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$ et AOD en $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$

c) pas d'AV, AOG en $y = -x$ et AHD en $y = 0$

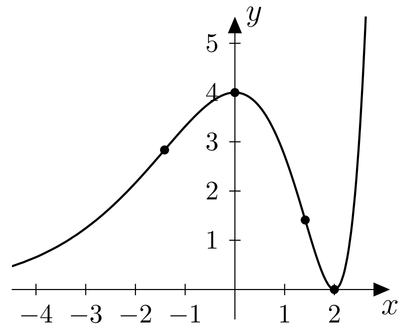
d) AV en $x = 0^+$, pas d'AOD ou d'AHD

e) point limite en $(0^+ ; 0^+)$, AV en $x = -1$, AO en $y = x - \frac{1}{2}$

f) points limites en $(-1^-; -1^+)$ et en $(1^+ ; 1^+)$, AHG en $y = 0$ et AOD en $y = 2x$

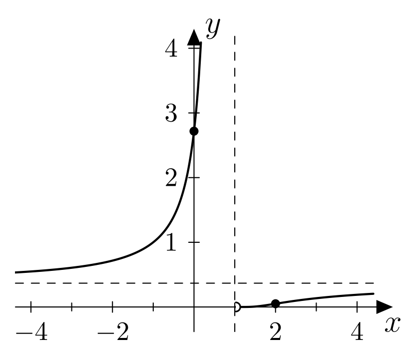
Exercice 8.21:

a)



- $\mathrm{E_D} = \mathbb{R}$
- zéro en $x = 2$
- AHG en $y = 0$
- $f'(x) = x(x-2)\,\mathrm{e}^x$
- Max $(0 ; 4)$, Min $(2 ; 0)$
- $f''(x) = (x^2 - 2)\,\mathrm{e}^x$
- $I_1(-\sqrt{2} ; 2{,}83)$, $I_2(\sqrt{2} ; 1{,}41)$

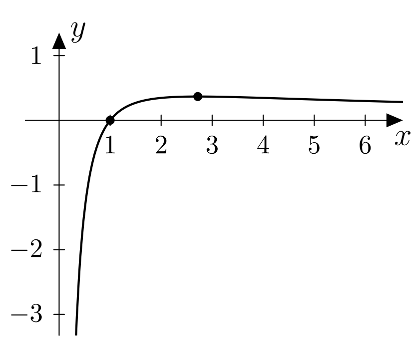
b)



- $\mathrm{E_D} = \mathbb{R} - \{1\}$
- pas de zéro
- AV en $x = 1^-$,
pt limite $(1^+ ; 0^+)$
- AH en $y = 1/\mathrm{e}$
- $f'(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1+x}{1-x}} > 0$
- $f''(x) = \dfrac{-4(x-2)}{(x-1)^4} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1+x}{1-x}}$
- $I(2 ; \mathrm{e}^{-3})$

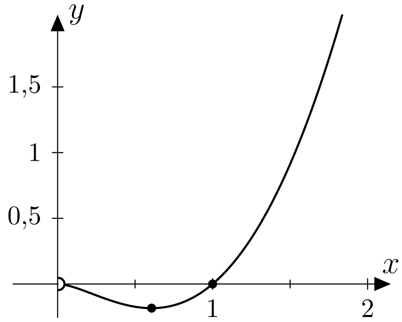
Exercice 8.22:

a)



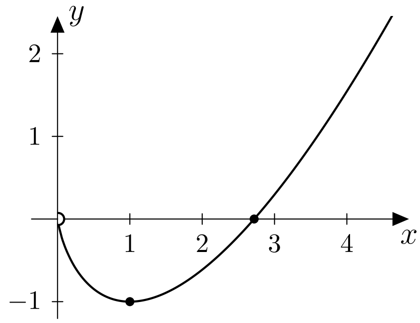
- $\mathrm{E_D} =]0 ; +\infty[$
- zéro en $x = 1$
- AV en $x = 0$
- AHD en $y = 0$
- $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$
- $\mathrm{Max}(\mathrm{e} ; 1/\mathrm{e})$
- Ord. origine non définie

b)



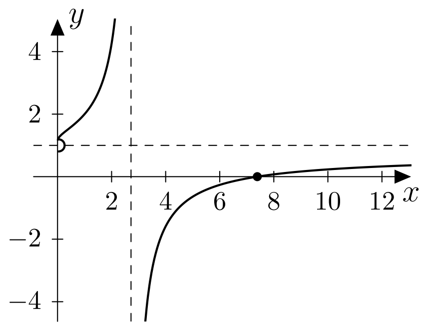
- $\mathrm{E_D} =]0\,;+\infty[$
- zéro en $x = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^-$ pt limite $(0^+;0^-)$
- $f'(x) = x\,(2\ln(x) + 1)$
- $\mathrm{Min}(\mathrm{e}^{-0,5}\,;-\frac{1}{2\,\mathrm{e}})$

c)



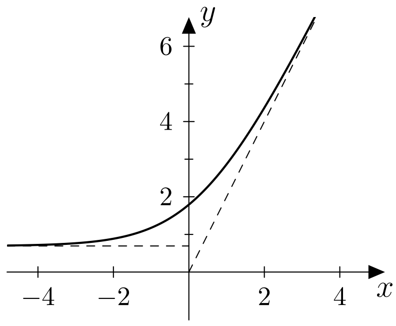
- $\mathrm{E_D} =]0\,;+\infty[$
- zéro en $x = \mathrm{e}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0^-$ pt limite $(0^+;0^-)$
- $f'(x) = \ln(x)$
- $\mathrm{Min}(1\,;-1)$

d)



- $\mathrm{E_D} =]0\,;\mathrm{e}[\,\cup\,]\,\mathrm{e}\,;+\infty[$
- zéro en $x = \mathrm{e}^2$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1^+$ pt limite $(0^+;1^+)$
- AV en $x = \mathrm{e}$
- AHD en $y = 1$
- $f'(x) = \dfrac{1}{x\,(\ln(x) - 1)^2}$
- ni min, ni max

e)



- $\mathrm{E_D} = \mathbb{R}$
- pas de zéro
- AHG en $y = \ln(2)$
- AOD en $y = 2x$
- $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\,(2\,\mathrm{e}^x + 3)}{(\mathrm{e}^x + 2)(\mathrm{e}^x + 1)} > 0$
- $f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(3\,\mathrm{e}^{2x} + 8\,\mathrm{e}^x + 6)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2\,(\mathrm{e}^x + 2)^2} > 0$

1.9 Primitives et intégrales

Exercice 9.1: **a)** $\mathcal{A} = 100$ **b)** $\mathcal{A} = 400$ **c)** $\mathcal{A} = 300$

Exercice 9.2: **a)** $\mathcal{A} = 12$ **b)** $\mathcal{A} = 48$ **c)** $\mathcal{A} = 60$

Exercice 9.3: **a)** $\mathcal{A} = 4$ **b)** $\mathcal{A} = 16$ **c)** $\mathcal{A} = 20$

Exercice 9.4: **a)** $A(x) = 4x + c$ **b)** $A(x) = 3x^2 + c$ **c)** $A(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + c$

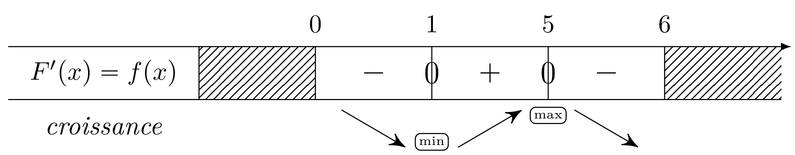
d) $A(x) = \mathrm{e}^x + c$ **e)** $A(x) = \sqrt{x} + c$ **f)** $A(x) = -\dfrac{1}{x} + c$

g) $A(x) = \dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + c$ **h)** $A(x) = \dfrac{15}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$ **i)** $A(x) = 2x^4 + c$

Exercice 9.5: Oui, F' est bien égale à G'

Exercice 9.6: **a)** $f(x) = 10x - 3$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 9.7: **a)** Tableau de croissance :



b) Les 2 graphiques n°❶ et n°❹ correspondent.

Exercice 9.8: **a)** $F(x) = x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 - 3x + c$ **b)** $F(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 + c$

c) $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{9}{2}x^2 + c$ **d)** $F(x) = \dfrac{1}{4}(x+3)^4 + c$

e) $F(x) = -\dfrac{1}{6}(1-2x)^3 + c$ **f)** $F(x) = \dfrac{1}{4}\left(3x^2+x\right)^4 + c$

g) $F(x) = \dfrac{1}{40}\left(4x^2+3\right)^5 + c$ **h)** $F(x) = \dfrac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3} + c$

i) $F(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1} + c$ **j)** $F(x) = 2\ln(|x|) + c$

k) $F(x) = \dfrac{1}{3}\ln(|3x+1|) + c$ **l)** $F(x) = \mathrm{e}^{3x} + c$

m) $F(x) = \mathrm{e}^{x^2+x} + c$ **n)** $F(x) = 2\ln\left(|x^2+x+1|\right) + c$

o) $F(x) = \dfrac{1}{3}\sin\left(3x^2\right) + c$ **p)** $F(x) = \big(\sin(x)\big)^2 + c$

Exercice 9.9: **a)** $f(x) = x^3 - 4x - 51$ **b)** $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 5x + 2$

Exercice 9.10: **a)** La fonction f n'est pas du type $f = \dfrac{g'}{g}$ mais presque !!

b) $a = 5/4$ et $b = -5/4$

c) $F(x) = \ln\left|x^2 - 2x - 3\right| + \dfrac{5}{4}\ln|x+1| - \dfrac{5}{4}\ln|x-3| + c$

d) Montrer, par exemple, que $f(x) = \dfrac{9/4}{x+1} + \dfrac{-1/4}{x-3}$

Exercice 9.11: Il suffit de vérifier que $F'(x) = f(x)$

Exercice 9.12:
- Si $\Delta x = 1$ alors $140 \leqslant \text{Aire} \leqslant 204$
- Si $\Delta x = 1/2$ alors $155 \leqslant \text{Aire} \leqslant 187$

En fait, cette aire vaut en réalité $\displaystyle\int_0^8 x^2\,\mathrm{d}x = 170{,}\bar{6}$

Exercice 9.13: **a)** $\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_1^4 = 21$ **b)** $\left.x^3\right|_0^3 = 27$

c) $\left.\dfrac{x^3}{6}\right|_1^5 = \dfrac{62}{3}$ **d)** $\left.\dfrac{3x^4}{20}\right|_0^1 = \dfrac{3}{20}$

e) $\left.\dfrac{x^4}{2} - x^3 + \dfrac{x^2}{2} - 3x\right|_0^2 = -4$ **f)** $\left.\dfrac{u^3}{3} + u\right|_{-1}^2 = 6$

g) $\left.\dfrac{v^4}{4} - \dfrac{3v^2}{2}\right|_{-2}^2 = 0$ **h)** $\left.\dfrac{x^3}{5} + 4x\right|_{-3}^3 = \dfrac{174}{5}$

i) $\left.-\cos(x)\right|_0^\pi = 2$ **j)** $\left.\dfrac{1}{2}\sin(2x)\right|_{-\pi}^\pi = 0$

Exercice 9.14: **a)** $\left.\dfrac{-(1-x)^4}{4}\right|_0^2 = 0$ **b)** $\left.\dfrac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3}\right|_0^3 = \dfrac{14}{3}$

c) $\left.-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2}\right|_1^3 = \dfrac{2}{9}$ **d)** $\left.\dfrac{1}{2}\sin\left(x^2\right)\right|_0^{2\pi} = \dfrac{1}{2}\sin\left(4\pi^2\right)$

e) $\left.\dfrac{-\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}{3}\right|_0^1 = \dfrac{1}{3}$ **f)** $\left.\dfrac{-\,\mathrm{e}^{-2u}}{2}\right|_{-3}^2 = \dfrac{\mathrm{e}^6}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-4}}{2}$

g) $\dfrac{\ln(5)}{3}$ **h)** $\left.\dfrac{-3}{4\left(x^2+1\right)^2}\right|_0^1 = \dfrac{9}{16}$

*La donnée du **g)** "cache" une nouvelle propriété du calcul intégral. L'avez-vous repéré ?*

Exercice 9.15: $\mathcal{A} = 65$

Exercice 9.16: **a)** $\mathcal{A} = \dfrac{256}{27}$ **b)** $\mathcal{A} = \dfrac{63}{20}$ **c)** $\mathcal{A} = \dfrac{253}{12}$

Exercice 9.17: **a)** $a = 4,\ b = 0,\ c = 0.$

b) Il s'agit de vérifier que : $F'(x) = \big(-4\,(x^2 + 2x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}\big)' = f(x)$

c) $\mathcal{A} = 8 - 40\,\mathrm{e}^{-2}$

Exercice 9.18: Elles sont les trois vraies. On peut les justifier par des esquisses de fonctions et leur surface sous la courbe.

Exercice 9.19: **a)** $h(d) = \dfrac{1}{1600}d^2 - \dfrac{1}{4}d + 125$

b) $h = \dfrac{1}{600}\displaystyle\int_0^{600}\left[\frac{1}{1600}d^2 - \frac{1}{4}d + 125\right]\mathrm{d}d = 125 \text{ m}$

Exercice 9.20: **a)** $\mathcal{A} = 9$ **b)** $\mathcal{A} = 1/2$ **c)** $\mathcal{A} = 9/4$

Exercice 9.21: $\mathcal{A} = 1/2$

Exercice 9.22: $\mathcal{A} = \ln(2)$

Exercice 9.23: $\mathcal{A} = 3/8$

Exercice 9.24: Parabole : $y = -2x^2 - 3x$ et $\mathcal{A} = 4/3$

Exercice 9.25: **a)** $a = 1$ et $b = -1$

b) $\displaystyle\int 1 - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = x - \ln(|x+1|) + c$

c) $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln(|x+1|)\,\Big|_0^2 = \ln(3)$

d) $$x_G = \frac{1}{\mathcal{A}}\int_0^2 \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(3)}\int_0^2 1 - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\ln(3)}\Big[x - \ln(|x+1|)\Big]_0^2 = \frac{2 - \ln(3)}{\ln(3)}$$

e) $$y_G = \frac{1}{2\mathcal{A}}\int_0^2 \left(\frac{1}{x+1}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2\ln(3)}\int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\ln(3)}\int_0^2 (x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\ln(3)}\left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^2 = \frac{1}{3\ln(3)}$$

Ainsi : $G(0{,}82\,;0{,}30)$

Exercice 9.26: $\mathcal{A} = 10/3$

Exercice 9.27: $\mathcal{A} = 5\sqrt{2} - 1 \cong 6{,}07$

Exercice 9.28: **a)** $k = 6$ **b)** $k = 7$ **c)** $k = 2$ **d)** $k = 4$

Exercice 9.29: $a = 2\sqrt{2}$

Exercice 9.30: $m = 3/2$

Exercice 9.31: $c = 13$

Exercice 9.32: $a = \sqrt[3]{3}$

Exercice 9.33: $s_4 \cong 9{,}308$ $S_4 \cong 13{,}702$ $S_R \cong 11{,}901$

PS : montrer que l'aire exacte vaut environ 11,775

Exercice 9.34: **a)** $s_6 = 435$ **b)** $S_6 = 777$ **c)** $S_R \cong 507{,}281$ **d)** 594

Exercice 9.35: En trois points $c_1 \cong 1{,}8$; $c_2 \cong 4{,}8$ et $c_3 \cong 8$

Exercice 9.36: $c = 5/2$

Exercice 9.37: Dans les 2 cas, c n'existe pas car les fcts ne vérifient pas toutes les hypothèses :

a) La fonction f n'est pas continue en $x = -3$ sur $[-5\,;-2]$.

b) La fonction g est continue, mais non dérivable au point $x = 2$ sur l'intervalle $[1\,;4]$.

Exercice 9.38: Aire $= 1$

Exercice 9.39: **a)** $1/2$ **b)** $1/2$ **c)** $-1/8$ **d)** $1/3$ **e)** 0 **f)** $+\infty$

Exercice 9.40: **a)** 6 **b)** $+\infty$ **c)** $2\sqrt{3}$ **d)** 1 **e)** 6

f) Si vous n'avez pas remarqué que $x = 1$ est une AV, et en prenant un calcul d'intégral ordinaire, on obtiendrait :

$$\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \ln|x-1|\Big|_0^3 = \ln(2)$$

*Mais cette réponse est **fausse**. Il faut décomposer cette intégrale en deux limites d'intégrales qui ici ne donnent pas un nombre fini.*

Donc l'intégrale **n'est pas définie**

g) $\displaystyle\int_{-4}^{4} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ est non définie car les 2 limites d'intégrales ne sont pas finies.

Exercice 9.41: **a)** poser $f(x) = x$ et $g'(x) = \cos(x)$ ainsi :

$$\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x = x\sin(x) + \cos(x) + c$$

b) poser $f(x) = x^2$ et $g'(x) = \mathrm{e}^x$ puis faire une deuxième intégration par partie ainsi :

$$\int x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^x + c$$

c) $\displaystyle\int (4x-1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (4x-5)\,\mathrm{e}^x + c$

d) $\displaystyle\int 4x\ln(x)\,\mathrm{d}x = x^2(\ln(x^2) - 1) + c$

Exercice 9.42: **a)** $1 - 2/\mathrm{e}$ **b)** $\frac{16}{3}\ln(4) - \frac{28}{9}$ ou encore $\frac{32}{3}\ln(2) - \frac{28}{9}$
c) $-1/2$

Exercice 9.43: Pas de réponse proposée

Exercice 9.44: **a)** $\dfrac{4x-1}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{x+2}$ donc

$$\int \frac{4x-1}{(x-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1| + 3\ln|x+2| + c$$

$$\int_2^4 \frac{4x-1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = [\ln(3) + 3\ln(6)] - [\ln(1) + 3\ln(4)] = \ln\left(\frac{81}{8}\right)$$

b) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{1/3}{x-2} - \dfrac{1/3}{x+1}$ donc

$$\int \frac{1}{(x+1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + c$$

$$\int_3^7 \frac{1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[(\ln(5) - \ln(8)) - (\ln(1) - \ln(4))\right] = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

c) $\dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ donc $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c$

$$\int_2^4 \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{5}{3}\right) + 4$$

d) $\dfrac{x^3+x^2-12x+1}{x^2+x-12} = x + \dfrac{1/7}{x-3} - \dfrac{1/7}{x+4}$ donc

$$\int \frac{x^3+x^2-12x+1}{x^2+x-12}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{7}\ln|x-3| - \frac{1}{7}\ln|x+4| + c$$

$$\int_0^2 \frac{x^3+x^2-12x+1}{x^2+x-12}\,\mathrm{d}x = 2 + \frac{1}{7}\ln\left(\frac{2}{9}\right)$$

e) $\dfrac{6x^2+5x-3}{x^3+2x^2-3x} = \dfrac{3}{x+3} + \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{x}$ donc

$$\int \frac{6x^2+5x-3}{x^3+2x^2-3x\,\mathrm{d}x} = 3\ln|x+3| + 2\ln|x-1| + \ln|x| + c,$$

$$\int_2^3 \frac{6x^2+5x-3}{x^3+2x^2-3x}\,\mathrm{d}x = 4\ln(6) - 3\ln(5) = \ln\left(\frac{6^4}{5^3}\right)$$

Exercice 9.45: **a)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin^3(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$ *Méthode directe*

b) $\displaystyle\int_4^6 \frac{1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x = \int_4^6 \frac{1/3}{x-2} - \frac{1/3}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln(\frac{10}{7})$

Décomp. éléments simples

c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{x}\Big|_2^b = \frac{1}{2}$ *Intégrale impropre*

d) $\displaystyle\int_0^2 x^2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\,\mathrm{e}^x\Big|_0^2 - 2\left[x\,\mathrm{e}^x\,\big|_0^2 - \int_0^2 \mathrm{e}^x dx\right] =$

$\displaystyle\Big[\mathrm{e}^x(x^2-2x+2)\Big]_0^2 = 2(\mathrm{e}-1)(\mathrm{e}+1)$ *Intégration par partie (2x)*

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{x^3+1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{-2} 1 + \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} x - \frac{1}{2x^2}\Big|_a^{-2} = +\infty$

Éléments simples + impropre

f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{5x+3}{5x^2+6x+7}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|5x^2+6x+7|\Big|_1^2 = \frac{\ln(\frac{13}{6})}{2}$ *Méthode directe*

1.10 Application des intégrales

Exercice 10.1: ① $\mathcal{V} = 55\pi$ ② $\mathcal{V} = 39\pi$

Exercice 10.2: ① $\mathcal{V} = 8\pi$ ② $\mathcal{V} = \dfrac{9}{2}\pi$ ③ $\mathcal{V} = \dfrac{10}{3}\pi$ ④ $\mathcal{V} \cong 20{,}55$

Exercice 10.3: **a)** Par Pythagore (ou norme d'un vecteur)

b) $f(x) = +\sqrt{r^2 - x^2}$ avec $\mathrm{E_D} = [-r\,;r]$

c) $\mathcal{V} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Exercice 10.4: ① $\mathcal{V} = 64\pi$ ② $\mathcal{V} = 16\pi$

Exercice 10.5: ① $\mathcal{V} = 162\pi$ ② $\mathcal{V} = \dfrac{2}{15}\pi$ ③ $\mathcal{V} = \dfrac{5}{2}\pi$ ④ $\mathcal{V} = \dfrac{9}{2}\pi$

Exercice 10.6: **a)** $\mathcal{V} = 15\pi/2$ **b)** $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ **c)** $\mathcal{V} = \pi/6$

d) $\mathcal{V} = 64\pi$ **e)** $\mathcal{V} = 3\pi/2$

Exercice 10.7: $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$

Exercice 10.8: **a)** $\mathcal{V}_x = 8\pi$ puis $\mathcal{V}_y = 32\pi/5$ **b)** $\mathcal{V}_y = \frac{24}{5}\sqrt{3}\pi$ puis $\mathcal{V}_x = 9\pi/2$

Exercice 10.9: **a)** $\mathcal{V} = 162$ **b)** $\mathcal{V} = \dfrac{81\pi}{4}$ **c)** $\mathcal{V} = 72$ **d)** $\mathcal{V} = \dfrac{81\sqrt{3}}{2}$

Exercice 10.10: $\mathcal{V} = 1/30$

Exercice 10.11: $\mathcal{V} = 128/3$

Exercice 10.12: $h = \dfrac{10\sqrt{2}}{3}$ cm

Exercice 10.13: $\mathcal{V} = \pi/15$

Si vous souhaitez commander ou utiliser ce polycopié dans vos classes, merci de prendre contact avec son auteur en passant par son site web :

`www.javmath.ch`