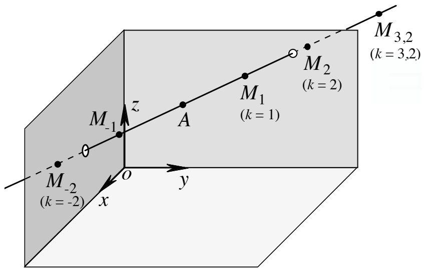
Chapitre 4: Géométrie analytique dans l'espace

Prérequis: Géom. vectorielle dans V_3, géom. analytique dans le plan ***Requis pour***: Algèbre linéaire, examen de maturité.

§ 4.1 Équation paramétrique de la droite dans l'espace

Convention Dans tout ce chapitre de géométrie analytique dans l'espace, nous travaillerons dans l'espace V_3, muni d'un repère orthonormé direct.

Définition Une droite est définie par un de ses points et par **un vecteur directeur** donnant la direction de la droite.
On trouve tous les points de la droite en faisant varier le paramètre $k \in]-\infty ; +\infty[$.



- Soit la droite d passant par le point $A(a_1 ; a_2 ; a_3)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Alors

$$M(x ; y ; z) \in d \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{v} \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{v} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Équation paramétrique d'une droite dans l'espace

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Système d'équations paramétriques d'une droite dans l'espace

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a_1 + k \cdot v_1 \\ y = a_2 + k \cdot v_2 \\ z = a_3 + k \cdot v_3 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Exemple Soit la droite (d): $\begin{cases} x = 3k + 1 \\ y = 2k \\ z = -5k + 2 \end{cases}$

Donner deux équations paramétriques différentes de cette droite d.

Exercice 4.1 : Soit le point $A(2 ; 0 ; 3)$. Donner un système d'équations paramétriques des droites suivantes:

a) d_1 passant par A et $B(1 ; 4 ; 5)$.

b) d_2 passant par A et parallèle à la droite (g): $\begin{cases} x = 2k - 1 \\ y = 3k \\ z = 5k + 2 \end{cases}$

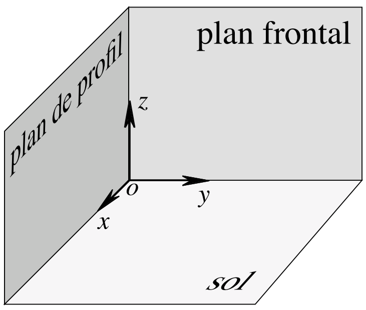
c) d_3 passant par A et parallèle à l'axe Oy.

Exercice 4.2 : Une droite d est définie par un point $A(2 ; 4 ; 5)$ et un vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Le point $P(5 ; -8 ; 12)$ appartient-il à la droite d ?

b) Le point $Q(x ; y ; \lambda)$ appartient à d. Compléter les 2 premières coordonnées de Q en fonction de λ.

Exercice 4.3 : Préciser la position particulière des droites d ci-dessous :



a) d passe par $A(2 ; 1 ; 3)$ et $B(0 ; -1 ; 3)$

b) d passe par $A(2 ; 3 ; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) d passe par $A(0 ; 0 ; 1)$ et $B(0 ; 1 ; -2)$

d) d passe par $A(1 ; -2 ; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exemple Calculer le point d'intersection des 2 droites suivantes :

$$(d): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (e): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

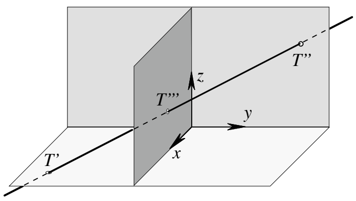
Exercice 4.4 : Calculer le point d'intersection des deux droites sécantes suivantes:

a) (d): $\begin{cases} x = 13 + 5k \\ y = -3 - 2k \\ z = 5 + 3k \end{cases}$ $\quad$ (e): $\begin{cases} x = n \\ y = -2n + 7 \\ z = -1 \end{cases}$

b) La droite d passant par $A(1 ; 2 ; -3)$ et $B(-2 ; 3 ; -1)$ et la droite e passant par $C(-3 ; 0 ; -15)$ et $D(-1 ; -4 ; -31)$.

c) (d): $\begin{cases} x = 5 - k \\ y = 7k \\ z = -1 + 2k \end{cases}$ $\quad$ (e): $\begin{cases} x = 4 + n \\ y = 7 - 3n \\ z = 2 + n \end{cases}$

Définition On appelle **traces d'une droite** les points d'intersection de cette droite avec les plans de référence Oxy, Oxz et Oyz.



La plupart du temps, la trace est un point, mais cela peut aussi être une droite.

$$T'(\ldots ; \ldots ; 0) \quad , \quad T''(0 ; \ldots ; \ldots) \quad , \quad T'''(\ldots ; 0 ; \ldots)$$

Il peut aussi ne pas y avoir de trace sur un plan de référence.

Exercice 4.5 : Déterminer les traces T', T'' et T''' des droites suivantes:

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad$ **b)** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9/2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dans chaque cas, **représentez la situation** dans un système d'axes.

Exercice 4.6 : Soit la droite d passant par les points $A(6 ; 2 ; 1)$

et $B(-3 ; 8 ; -2)$.

a) Déterminer les trois traces de d.

b) Représenter la situation dans un système d'axes.

c) Construire sur votre figure les projections de d sur les trois plans.

§ 4.2 Équations cartésiennes de la droite dans l'espace

Définition Dans le cas où les composantes v_1, v_2 et v_3 du vecteur directeur $\vec{v}$ sont toutes trois non nulles, la droite d peut être caractérisée par ***la double égalité*** :

$$(d)\colon \frac{x-a_1}{v_1}=\frac{y-a_2}{v_2}=\frac{z-a_3}{v_3} \qquad v_1\cdot v_2\cdot v_3\neq 0$$

Appelées **équations cartésiennes** de d.

Exemple Déterminer les équations cartésiennes de la droite:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\3\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$$

Exercice 4.7 : Déterminer les équations cartésiennes des droites suivantes:

a) $\begin{cases} x=4-3k\\ y=6k\\ z=8-5k\end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x=3+2k\\ y=5-2k\\ z=1+k\end{cases}$

c) $\begin{cases} x-2y=-13\\ x+z=2\end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x+2y-z=4\\ x-y+z=2\end{cases}$

Exercice 4.8 : Donner une équation paramétrique de la droite :

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-3}{2}$$

Exercice 4.9 : Montrer que les systèmes d'équations suivants déterminent la même droite.

a) $(d)\colon\begin{cases} x=3+2k \\ y=5-2k \\ z=1+k \end{cases}$ $(g)\colon\begin{cases} x=5+2r \\ y=3-2r \\ z=2+r \end{cases}$ $(h)\colon\begin{cases} x=-1+s \\ y=9-s \\ z=-1+0{,}5s \end{cases}$

b) $(d)\colon\begin{cases} 16x-2y-11z=0 \\ 14x-\ \ y-10z=3 \end{cases}$ $(g)\colon\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z-2}{4}$

Exercice 4.10 : ***Souvenirs, souvenirs… de 1ère année :***

Dans chacun des cas suivants, les droites AB et CD sont-elles gauches, strictement parallèles, confondues ou sécantes ?
Si elles sont sécantes, déterminer leur point d'intersection.

a) $A(6\,;4\,;-4)$ $B(4\,;0\,;-2)$
$C(7\,;0\,;-2)$ $D(11\,;-4\,;0)$

b) $A(-4\,;2\,;1)$ $B(-1\,;1\,;3)$
$C(0\,;5\,;-2)$ $D(9\,;2\,;4)$

c) $A(8\,;0\,;3)$ $B(-2\,;4\,;1)$
$C(8\,;3\,;-2)$ $D(0\,;0\,;5)$

d) $A(2\,;-3\,;1)$ $B(3\,;-2\,;3)$
$C(0\,;-5\,;-3)$ $D(5\,;0\,;7)$

Exercice 4.11 : On considère la droite d_1, passant par le point $A(2\,;1\,;1)$, de vecteur directeur $\vec{v}$ ainsi que la droite d_2 passant par le point $B(-5\,;2\,;-7)$, de vecteur $\vec{w}$, où

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\m\\m-1\end{pmatrix} \text{ et } \vec{w}=\begin{pmatrix}2-m\\-3\\-2\end{pmatrix},\ m\in\mathbb{R}.$$

Étudier, selon les valeurs de m, les positions des droites d_1 et d_2.

Exercice 4.12 : On donne deux droites g et h par leur représentation paramétrique:

$$(g)\colon\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} \text{ et } (h)\colon\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+n\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

a) Soit P un point variable de la droite g et Q un point variable de la droite h. Quelle condition les paramètres réels k et n doivent-ils vérifier pour que la droite PQ soit parallèle au plan d'équation $z=0$.

b) Cette condition étant vérifiée, quel est le lieu géométrique des milieux des segments PQ ?

Remarques

1) Contrairement à ce que l'on a vu dans le cas du plan, la représentation en équations cartésiennes d'une droite dans l'espace est moins pratique à manipuler que sous sa forme de systèmes d'équations paramétriques.

2) Une équation cartésienne d'une droite dans le plan était donnée sous la forme:

$$ax + by + c = 0$$

Question

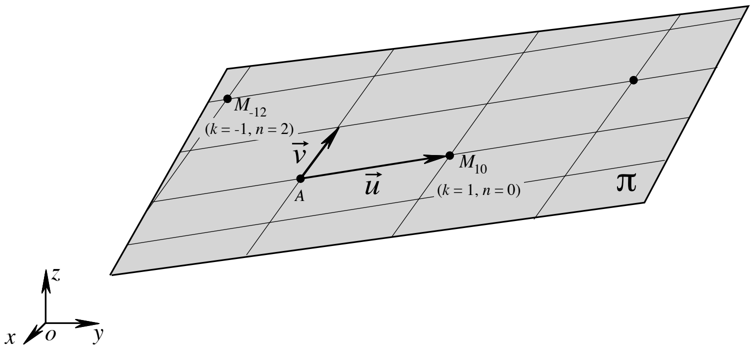
Pourquoi ne peut-on pas généraliser ceci dans l'espace et obtenir une équation cartésienne sous la forme:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad ?$$

§ 4.3 Équation du plan dans l'espace

Rappel: Un plan peut être déterminé par:

- trois points non alignés
- deux droites sécantes
- deux droites parallèles distinctes
- une droite et un point n'appartenant pas à cette droite



Soit le plan π passant par le point $A(a_1\ ;\ a_2\ ;\ a_3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \pi \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} = k \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v} \qquad k, n \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v} \qquad k, n \in \mathbb{R}$$

Équations paramétriques d'un plan dans l'espace

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Système d'équations paramétriques d'un plan dans l'espace

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a_1 + k \cdot u_1 + n \cdot v_1 \\ y = a_2 + k \cdot u_2 + n \cdot v_2 \\ z = a_3 + k \cdot u_3 + n \cdot v_3 \end{cases} \qquad k, n \in \mathbb{R}$$

Exemple: Déterminer une équation paramétrique du plan α passant par les points $A(2 ; 3 ; 5)$, $B(1 ; 0 ; 5)$ et $C(6 ; 5 ; 6)$.

Exercice 4.13 : Déterminer une équation paramétrique des plans suivants:

a) α contenant le point $A(1 ; 2 ; 5)$ et la droite d définie par $B(6 ; 0 ; 0)$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) α contenant les deux droites :

d passant par $A(2 ; 0 ; 3)$ de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

g passant par $B(4 ; 0 ; 0)$ de vecteur directeur $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.14 : On donne le plan α par son équation paramétrique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Les points ci-dessous appartiennent-ils au plan α ?

a) $A(-2 ; 7 ; 8)$ **b)** $B(4 ; 4 ; 3)$ **c)** $C(11/6 ; -29/6 ; 15)$

Rappels de 1ère

3 vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

$$\Updownarrow$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Exemple Les 3 vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 4.15 : Montrer que les quatre points $A(-4 ; 0 ; 3)$, $B(-2 ; 3 ; 0)$, $C(0 ; 2 ; 1)$ et $D(2 ; 1 ; 2)$ sont coplanaires.

a) En montrant qu'un des points vérifie l'équation du plan formé par les trois autres.

b) Par un critère de coplanarité de 3 vecteurs.

Exercice 4.16 : On donne les points $A(1 ; -3 ; -1)$, $B(0 ; 1 ; 1)$, $C(-1 ; -4 ; 0)$ définissant un plan α. On considère encore un point $M(x ; y ; z)$ appartenant à α.

a) Que pouvez-vous affirmer au sujet des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Exprimer le $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et en déduire une équation du plan α.

Équation cartésienne d'un plan

Soit le plan π passant par le point $A(a_1 ; a_2 ; a_3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M(x ; y ; z) \in \pi \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v} \text{ coplanaires} \\ &\Leftrightarrow \quad \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x - a_1 & u_1 & v_1 \\ y - a_2 & u_2 & v_2 \\ z - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

En développant ce déterminant, on obtient **une équation cartésienne** du plan du type:

$$ax + by + cz + d = 0$$

où a, b et c non tous nuls.

Exemple: Déterminer une équation cartésienne du plan α passant par les points $A(2\ ;\ 3\ ;\ 5)$, $B(1\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et $C(6\ ;\ 5\ ;\ 6)$.

Exercice 4.17 : Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans suivants:

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} x = 2 + k - 3n \\ y = 5 - k + 2n \\ z = 1 + k - n \end{cases}$

Exercice 4.18 : Déterminer une équation cartésienne du plan passant par les points $A(a\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ b\ ;\ 0)$ et $C(0\ ;\ 0\ ;\ c)$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 4.19 : Déterminer une équation cartésienne du plan α passant par le point $P(4\ ;\ 2\ ;\ 1)$ et contenant la droite (d) : $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 - 3k \\ z = 3 + k \end{cases}$

Exercice 4.20 : Déterminer une équation cartésienne des plans α et β tels que α est perpendiculaire au plan Oxy, β passe par le point $B(2\ ;\ -3\ ;\ 1)$ et $\alpha \cap \beta$ est la droite d'équations paramétriques:

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = 1 + 3k \end{cases}$$

Exercice 4.21 : **a)** Déterminer une équation cartésienne du plan α passant par le point $P(2\ ;\ -5\ ;\ 3)$ et parallèle au plan :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Même question avec le point $P(2\ ;\ 2\ ;\ -2)$ et le plan

$$x - 2y - 3z = 0$$

Exercice 4.22 : **a)** Déterminer un vecteur perpendiculaire au plan formé par les points $A(2\ ;\ 3\ ;\ 5)$, $B(1\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et $C(6\ ;\ -2\ ;\ 5)$.

Indication : Comment est défini le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ *?*

b) Déterminer $\vec{n}$ un vecteur perpendiculaire au plan

$$2x + 3y - z + 3 = 0$$

Définition On appelle **vecteur normal** à un plan π tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan.

Formule Le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ admet le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Preuve : *La preuve sera vue plus loin après des rappels sur le produit scalaire.*

Exemple Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan $2x - y + 3z + 5 = 0$.

Application

- Si deux plans sont parallèles, alors les vecteurs normaux sont colinéaires et donc les coefficients a, b et c de leur équation cartésienne sont proportionnels.

  $$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z + 4 = 0 \\ -x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z - 19 = 0 \end{array}\right\}$$ sont deux plans parallèles.

- Les deux plans seront strictement parallèles (et donc non confondus) si le coefficient d de leur équation cartésienne n'admet pas le même facteur de proportionnalité que les autres coefficients.

Exemple Déterminer une équation cartésienne du plan β parallèle au plan (α): $3x + 5y - 2z + 5 = 0$ passant par le point $P(2 ; 3 ; -1)$.

Exercice 4.23 : Déterminer une équation cartésienne du plan :

a) passant par $P(-2\ ;\ 6\ ;\ 7)$ et admettant le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal;

b) passant par $P(-6\ ;\ 10\ ;\ 16)$ et étant perpendiculaire à la droite (d) : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

c) passant par $P(3\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et étant perpendiculaire à la droite AB où $A(1\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et $B(3\ ;\ -3\ ;\ 2)$.

Exercice 4.24 : On donne les six points $A(1\ ;\ 4\ ;\ 1)$, $B(-2\ ;\ -8\ ;\ 3)$, $C(-5\ ;\ -11\ ;\ 5)$, $P(3\ ;\ 5\ ;\ -1)$, $Q(3\ ;\ -11\ ;\ -1)$ et $R(0\ ;\ -3\ ;\ 1)$.

Montrer que les plans ABC et PQR sont parallèles.

Exercice 4.25 : Déterminer une équation cartésienne d'un plan parallèle au …

a) plan $2x - 5y + z - 3 = 0$ et passant par l'origine.

b) plan $2x - 5y + z - 3 = 0$ et passant par $A(2\ ;\ -1\ ;\ 4)$.

Exercice 4.26 : On donne les équations de deux plans. Déterminer si ces plans sont sécants, strictement parallèles ou confondus.

a) $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ et $3x + 2y + 5z - 4 = 0$

b) $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ et $6x - 4y + 10z - 7 = 0$

c) $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ et $-15x + 10y - 25z + 20 = 0$

d) $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ et $\begin{cases} x = 4 + 2k + 5n \\ y = 2 + 3k \\ z = -3n \end{cases}$

e) $3x - 2y + 5z - 4 = 0$ et $\begin{cases} x = 2 + k - n \\ y = 1 + 3k - 2n \\ z = -k + n \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = 1 + 3k - 2n \\ y = 1 - k + n \\ z = 3 + k - n \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 2 + p + 5q \\ y = 2 - 2q \\ z = 2 + 2q \end{cases}$

Exemple **Position d'une droite par rapport à un plan**

On considère la droite d et le plan α définis par:

$$(d) : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 5 - k \\ z = 1 + 3k \end{cases} \quad \text{et} \quad (\alpha) : 3x - 2y - z = 3$$

a) Calculer $\vec{v}_d \bullet \vec{n}_\alpha$. Qu'en déduisez-vous ?

b) Déterminer le point d'intersection de la droite d et du plan α.

Exercice 4.27 : On donne une droite d et un plan α. La droite d est-elle strictement parallèle au plan α, incluse dans α ou coupe-t-elle α ?
Le cas échéant, calculer les coordonnées du point I d'intersection.

a) $(d) : \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 5 - 2k \\ z = 3 + 2k \end{cases}$ et $(\alpha) : 2x + y - z = 0$

b) $(d) : \begin{cases} x - 2y + z = 4 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$ et $(\alpha) : 3x - 2y + 4z = 19$

c) $(d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $(\alpha) : 4x + y - 11z = 0$

d) $(d) : \begin{cases} x + y - 3z = -5 \\ x - y - z = -19 \end{cases}$ et $(\alpha) : \begin{cases} x = 5 - k + 2n \\ y = 10 + k - 3n \\ z = 5 + k - n \end{cases}$

Exercice 4.28 : On donne les points $A(3 ; 4 ; 0)$, $B(-3 ; 8 ; 1)$, $C(1 ; 2 ; -3)$, $D(11 ; 1 ; 1)$, $E(3 ; 3 ; -1)$, $F(8 ; 3 ; 1)$, $G(0 ; 5 ; -1)$ $P(-5 ; -2 ; -5)$ et $Q(0 ; 4 ; -3)$.

a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite PQ et du plan ABC.

b) Montrer que la droite DE est incluse dans le plan ABC.

c) Montrer que la droite FG est strictement parallèle au plan ABC.

Exercice 4.29 : Pour quelle valeur du paramètre m la droite

$(d) : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{m} = \dfrac{z+3}{-2}$ est-elle parallèle au plan

$(\alpha) : x - 3y + 6z + 7 = 0$

Exercice 4.30 : Déterminer les coordonnées du point d'intersection des 3 plans α, β et γ :

a) $(\alpha) : 3x + 4y - z - 5 = 0$ $(\beta) : 2x - y + 2z - 5 = 0$
$(\gamma) : x + y - 3z + 4 = 0$.

b) $(\alpha) : x + 2y - 3z - 6 = 0$ $(\beta) : 2x + 4y - z - 18 = 0$
$(\gamma) : 3x - 2y + z - 2 = 0$.

Exercice 4.31 : On appelle **trace d'un plan** les droites d'intersection de ce plan avec les plans de référence Oxy, Oxz et Oyz.

Soit le plan $3x - 4y - 2z + 12 = 0$.

a) Déterminer les équations de ses traces.

b) Calculer l'intersection de ce plan avec chacun des axes de coordonnées.

c) Représenter cette situation sur une représentation graphique.

Exercice 4.32 : Montrer que les plans d'équations $3x - y + 9z + 4 = 0$, $x + y - z = 0$ et $x + 2y - 4z - 1 = 0$ ont une infinité de points communs.

Déterminer une équation paramétrique de leur droite commune.

Exemple **Droite d'intersection de deux plans**

Déterminer une équation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans α et β:

$$(\alpha) : x + y - 3z - 1 = 0 \qquad (\beta) : 2x - y - 9z - 2 = 0$$

Exercice 4.33 : Déterminer une équation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans α et β dans les cas suivants :

a) $(\alpha) : x - 3y + 2z + 6 = 0 \qquad (\beta) : 2x + 5y - z - 9 = 0$

b) $(\alpha) : \begin{cases} x = 3 + k \\ y = 1 + n \\ z = 2 + n \end{cases} \qquad (\beta) : \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 + 2p \\ z = -p + q \end{cases}$

Exercice 4.34 : Montrer que les plans d'équations respectives :

$$x - 2y + 1 = 0 \ , \ 7y - z - 4 = 0 \ \text{ et } \ 7x - 2z + 6 = 0$$

sont parallèles à une même droite dont on donnera un vecteur directeur $\vec{d}$.

Exercice 4.35 : On donne le point $P(0\ ;\ -1\ ;\ 2)$ et deux droites d_1 et d_2:

$$(d_1):\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad(d_2):\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+n\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite d qui passe par P et qui coupe chacune des deux droites d_1 et d_2.
b) Déterminer également les points d'intersection de cette droite avec d_1 et d_2.

Exercice 4.36 : Soit les points $B(4\ ;\ 3\ ;\ -3)$, $C(1\ ;\ 0\ ;\ 6)$ et $P(-1\ ;\ 7\ ;\ -8)$, le plan α d'équation $x - 10y - 3z + 17 = 0$ et la droite d donnée par le système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 2+k \\ y = 2 \\ z = 3+2k \end{cases}$

Vérifier que les points B et C appartiennent au plan α, puis déterminer les sommets non donnés du parallélépipède $ABCDEFGH$ sachant que :

- le plan α est le plan de la face $ABCD$,
- le plan β de la face $EFGH$ passe par P,
- le support de la diagonale AG est la droite d.

§ 4.4 Applications du produit scalaire

Rappels **Le produit scalaire dans l'espace**

- Le résultat d'un produit scalaire est un **nombre**

- **Expression analytique** :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\\ \vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow\ \vec{u}\bullet\vec{v}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

- **Expression trigonométrique** :

$$\vec{u}\bullet\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\alpha)$$

- **Orthogonalité** :

$$\vec{u}\text{ et }\vec{v}\text{ sont orthogonaux}\iff\vec{u}\bullet\vec{v}=0$$

THÉORÈME 1 Si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$, alors $\vec{u}$ est orthogonal à toute combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 4.37 :

a) Représenter la situation du théorème sur une figure d'étude.

b) Démontrer ce théorème.

THÉORÈME 2 Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points C de l'espace tel que $\overrightarrow{AC}$ orthogonal à $\vec{u}$ forme un plan.

Exercice 4.38 : Déterminer deux vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ non nuls orthogonaux au vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. En déduire, par le calcul d'un déterminant l'équation cartésienne d'un plan passant par l'origine et perpendiculaire à $\vec{u}$.

THÉORÈME 3 Un plan est entièrement défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}$.

Exercice 4.39 : On considère le plan (α) : $ax + by + cz + d = 0$ $(a \cdot b \cdot c \cdot d \neq 0)$

Le but de cet exercice sera de montrer que le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal au plan α.

a) Que peut-on affirmer au sujet du point $A(-d/a\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

b) À l'aide d'une démarche comparable, déterminer deux autres points B et C contenu dans α.

c) Calculer $\overrightarrow{AB} \bullet \vec{n}$ et $\overrightarrow{AC} \bullet \vec{n}$. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 4.40 : Déterminer l'équation cartésienne de la droite d passant par $A(2\ ;\ 3\ ;\ 5)$ et $\perp$ au plan (α) : $3x - 2y + z + 5 = 0$.

Exercice 4.41 : Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ au plan ABC où $A(2\ ;\ 1\ ;\ 3)$ $B(-1\ ;\ 4\ ;\ 2)$ et $C(3\ ;\ -4\ ;\ -2)$

a) en utilisant le produit vectoriel (cf. 1ère année)

b) en calculant l'équation cartésienne du plan ABC.

Exercice 4.42 : Déterminer l'équation cartésienne du plan α passant par le point $A(2 ; 3 ; 5)$ et ⊥ à la droite $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-5}{3}$.

Exercice 4.43 : Déterminer l'équation cartésienne du plan α passant par l'origine et par le point $A(1 ; 1 ; 1)$ et ⊥ au plan : $x-y+z+2=0$.

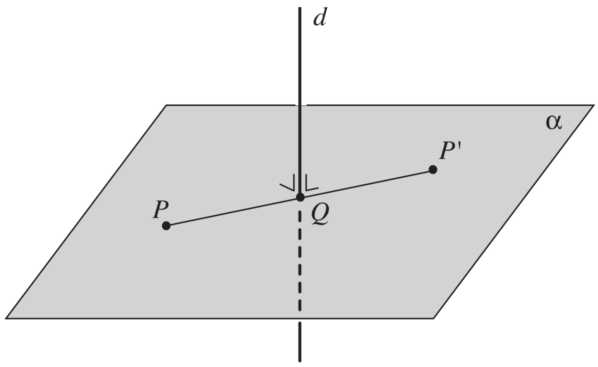
Exercice 4.44 : Déterminer une équation paramétrique de la droite n passant par le point $P(8 ; -4 ; 4)$ et perpendiculaire à la droite d d'équations paramétriques:

$$\begin{cases} x=1+k \\ y=1-k \\ z=1+2k \end{cases}$$

§ 4.5 Projections, distances et angles dans l'espace

Projection d'un point sur une droite et distance

- Soit P un point et d une droite. On **appelle projection orthogonale de** P **sur** d le point d'intersection Q de d et du plan α perpendiculaire à d passant par P.
- La norme du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ correspond alors à $\delta(P;d)$, **distance du point** P **à la droite** d.



Symétrique d'un point par rapport à une droite

- Le point P' pour lequel Q est le milieu du segment PP' s'appelle **le symétrique de** P **par rapport à** d.

Exercice 4.45 : On considère le point $P(3 ; 5 ; 10)$ et la droite d d'équation:

$$\frac{x-7}{6}=\frac{y+4}{-6}=z-5$$

a) Calculer la projection orthogonale Q du point P sur la droite d.
b) Calculer la distance du point P à la droite d.
c) Calculer les coordonnées du point P', symétrique du point P par rapport à la droite d.

Dans votre formulaire, page ……, on trouve:

On note P un point et d une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{d}$

Projection de *P* sur la droite *d*

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AP} \bullet \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\,\vec{d}$$

Distance de *P* à la droite *d*

$$\delta(P;d) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

Symétrique de *P* par rapport à *d*

$$\overrightarrow{OP'} = 2 \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \frac{\overrightarrow{AP} \bullet \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\,\vec{d}$$

Exercice 4.46 : Retrouver les réponses de l'exercice précédent en appliquant ces dernières formules.

Construction **la perpendiculaire commune à 2 droites gauches**

Exercice 4.47 : On donne deux droites gauches a et b. Déterminer les coordonnées du point A de a et du point B de b tels que la droite AB soit la perpendiculaire commune à a et à b . En déduire la plus courte distance δ entre les droites a et b dans les cas suivants:

a) $(a): \begin{cases} x = 6 - 4k \\ y = -4 + k \\ z = 1 + k \end{cases}$ $\quad (b): \begin{cases} x = 3 - 6n \\ y = -1 + n \\ z = 4 + 2n \end{cases}$

b) $(a): \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -k \\ z = 2 + k \end{cases}$ $\quad (b): \begin{cases} x = 2 + n \\ y = 1 + 2n \\ z = 2 + n \end{cases}$

Dans votre formulaire, page ……, on trouve:

On note d_1 *une droite passant par* A_1 *et de vecteur directeur* $\vec{d}_1$ *et*
d_2 *une droite passant par* A_2 *et de vecteur directeur* $\vec{d}_2$

Distance de deux droites

$$\delta(d_1;d_2) = \frac{\left|(\vec{d}_1 \times \vec{d}_2) \bullet \overrightarrow{A_1A_2}\right|}{\| \vec{d}_1 \times \vec{d}_2 \|}$$

Exercice 4.48 : Retrouver les distances obtenues de l'exercice précédent en appliquant cette dernière formule.

Angle entre deux droites de l'espace (gauches ou non)

De $\vec{u} \bullet \vec{v} = \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \| \cdot \cos(\alpha)$, on en déduit que

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \|}\right)$$

où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs directeurs de ces droites.

Exemple : Déterminer l'angle aigu entre les droites :

$$(d) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (e) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.49 :

a) En reprenant les vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'exemple précédent, calculer $\gamma = \sin^{-1}\left(\frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}\right)$

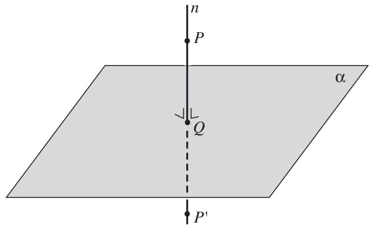
b) Que remarquez-vous ? Et comment l'expliquez-vous ?

Projection de P sur le plan α

- Soit P un point et α un plan. On appelle **projection orthogonale de P sur α** le point d'intersection Q du plan α et de la normale n à α par P.

Distance de P au plan α

- La norme du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ correspond alors à $\delta(P;\alpha)$, **distance du point P au plan α**.



Symétrique d'un point par rapport à un plan

- Le point P' pour lequel Q est le milieu du segment PP' s'appelle le **symétrique de P par rapport à α**.

Exercice 4.50 : Trouver les coordonnées de Q, projection orthogonale du point $P(3 ; 1 ; -1)$ sur le plan α d'équation cartésienne:

$$x + 2y + 3z - 30 = 0.$$

Exercice 4.51 : Trouver une représentation paramétrique de la projection orthogonale de la droite d d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + k \\ z = 6 - 5k \end{cases}$$

sur le plan d'équation $x - 2y + z - 1 = 0$

Exercice 4.52 : Un rayon lumineux issu du point $P(4 ; 5 ; -1)$ se réfléchit sur un miroir plan α dont l'équation est $x + 3y - 2z - 7 = 0$. Le rayon réfléchi passe par le point $Q(-7 ; 8 ; -9)$.

Trouver les coordonnées du point d'incidence M.

Rappel de 2ème année **La distance d'un point à une droite (dans le plan)**

$$\delta(P,d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

où $P(x_0 ; y_0)$ et $(d) : ax + by + c = 0$.

La distance d'un point à un plan

La distance d'un point P à un plan α est la distance du point P à sa projection orthogonale Q sur α.

Soit α le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, la distance du point $P(x_0 ; y_0 ; z_0)$ au plan α est donné par :

$$\delta(P,\alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Preuve : Cf. exercice 4.56

Exemple : Vérifier d'abord que les deux plans d'équation:
$(\alpha) : 3x + 12y - 4z = 0$ et $(\beta) : 3x + 12y - 4z + 73 = 0$
sont parallèles, puis calculer leur distance.

Exercice 4.53 : Montrer que la distance du point $P(15 ; -2 ; 5)$ au plan $(\alpha) : 3x - 2y + z = 12$ vaut $3\sqrt{14}$.

Exercice 4.54 : Déterminer les équations cartésiennes des plans α et α' situés à une distance 6 du plan d'équation $9x + 2y - 6z = 0$.

Exercice 4.55 : On donne le tétraèdre de sommets $A(2 ; 4 ; 6)$, $B(-4 ; -4 ; 4)$, $C(5 ; 0 ; 3)$ et $D(-1 ; 7 ; 5)$.

a) Calculer la longueur de la hauteur, issue de A de ce tétraèdre.

b) Rappeler ici la formule vectorielle pour calculer l'aire d'un triangle donné par ses 3 sommets B, C et D.

c) En déduire le volume de ce tétraèdre.

d) Utiliser la formule d'un volume d'un tétraèdre développé en 1ère année.

Exercice 4.56: Adapter les outils introduits et la preuve de la distance d'un point à une droite (cf. Chapitre 2) à la distance d'un point à un plan dans l'espace.

Dans votre formulaire, page ……, on trouve en plus:

On note P un point, π un plan contenant un point A et n un vecteur normal à π

Projection de *P* sur le plan π

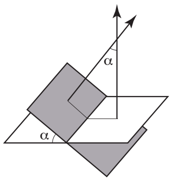
$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - \frac{\overrightarrow{AP} \bullet \vec{n}}{\| \vec{n} \|^2}\vec{n}$$

Symétrique de *P* par rapport à π

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - 2 \cdot \frac{\overrightarrow{AP} \bullet \vec{n}}{\| \vec{n} \|^2}\vec{n}$$

Angle entre deux plans

On appelle angle (aigu ou obtus) de deux plans **l'angle entre les deux vecteurs normaux** à ces deux plans.



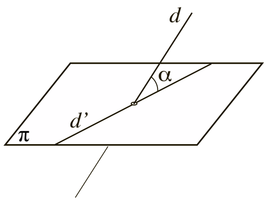
Exercice 4.57 : Calculer, de 2 manières différentes, l'angle aigu entre les deux plans sécants :

$$(\alpha) : x + 2y - z = 0 \quad \text{et} \quad (\beta) : 2x - 3y + 4z - 8 = 0.$$

Angle entre une droite et un plan

On appelle angle (aigu ou obtus) d'une droite *d* et un plan π l'angle α que forme *d* avec sa projection *d'* sur π.

Marche à suivre :



Exercice 4.58 : Soit la droite *d* passant par $A(1 ; 2 ; 3)$ et $B(2 ; 1 ; 5)$.
On donne encore le plan $(\alpha) : 3x + 2y - 5z = 0$.

Calculer l'angle formé par *d* et α.

Exercice 4.59 : Soit *ABCD* un tétraèdre de sommets $A(2 ; 3 ; 1)$, $B(4 ; 1 ; -2)$, $C(6 ; 3 ; 7)$, $D(-5 ; -4 ; 8)$, calculer :

a) la longueur de la hauteur du tétraèdre issue de *D ;*

b) le volume du tétraèdre ;

c) l'angle aigu que forment les faces *ABC* et *ABD ;*

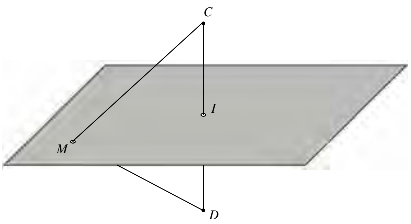
d) l'angle aigu que forme l'arête *AD* avec la face *ABC*.

§ 4.6 Plan médiateur, plan bissecteur

Exercice 4.60 : On donne les sommets $B(5 ; 1 ; -3)$ et $C(-1 ; -3 ; 3)$ du triangle isocèle *ABC* de base *BC*.

Déterminer les coordonnées du sommet *A* sachant qu'il appartient à la droite (*d*) : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Définition On appelle **plan médiateur** du segment *CD*, l'ensemble des points *M* équidistants de *C* et de *D*.



Le plan médiateur du segment CD est le plan orthogonal à la droite CD et qui passe par le milieu I dudit segment.

Exemple Déterminer l'équation du plan médiateur du segment *AB* où $A(1 ; 1 ; 2)$ et $B(0 ; 3 ; 3)$.

Exercice 4.61 : On considère les quatre points $A(3 ; -1 ; -2)$, $B(-2 ; 0 ; 3)$, $C(1 ; 1 ; 2)$ et $D(0 ; 3 ; 3)$. Trouver les coordonnées du point *M* équidistant des points *C* et *D* et dont la projection orthogonale sur le plan (*ABC*) est le centre de gravité du triangle *ABC*.

Définition On appelle **plans bissecteurs** de 2 plans α et β sécants, l'ensemble des points M équidistants aux 2 plans.

Les plans sécants $(\alpha) : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et
$(\beta) : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

ont pour plans bissecteurs les deux plans d'équations:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Exercice 4.62 : Déterminer les équations cartésiennes des plans bissecteurs des plans α et β dans les cas suivants:

a) $(\alpha) : x + 2y - 2z - 1 = 0$ et $(\beta) : 2x - y + 2z + 1 = 0$

b) $(\alpha) : 3x + y - z + 25 = 0$ et $(\beta) : x - 7y - 7z + 13 = 0$

Exercice 4.63 : On donne les trois plans α, β et γ d'équations cartésiennes respectives $x - 2y + 2z + 4 = 0$, $2x + 3y - 6z - 5 = 0$ et $12x + 2y + 5z = 0$. Déterminer les coordonnées des points situés sur la perpendiculaire n issue du point $P(13 ; 4 ; 9)$ au plan γ et équidistants des plans α et β.

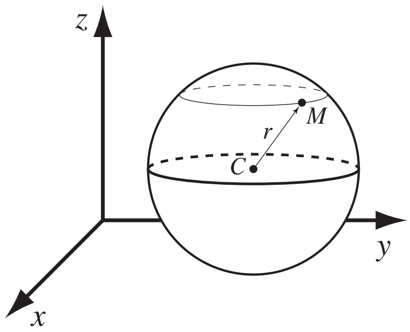
Exercice 4.64 : Montrer que les droites d_1, et d_2 données ci-dessous sont concourantes en un point P et déterminer des représentations paramétriques de leurs bissectrices b_1 et b_2.

$$(d_1) : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 + 3k \\ z = -1 + 2k \end{cases} \qquad (d_2) : \begin{cases} x = 2n \\ y = 4 - n \\ z = 2 - 3n \end{cases}$$

Exercice 4.65 : On considère les points $A(5 ; -1 ; -1)$, $B(3 ; -2 ; 1)$ et $C(1 ; 1 ; 7)$. Déterminer une représentation paramétrique de la bissectrice intérieure du triangle ABC issue du sommet B.

§ 4.7 Sphère

Définition On appelle **sphère** Σ de centre $C(\alpha\ ;\ \beta\ ;\ \gamma)$ et de rayon r l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de l'espace situés à la distance r du centre C.



On a donc $M \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \|\overrightarrow{CM}\| = r$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \\ z-\gamma \end{pmatrix} \right\| = r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2} = r$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2}$$

Cette dernière relation s'appelle **équation cartésienne** de la sphère **(centre-rayon).**

En la développant, on obtient l'équation **développée** :

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0}$$

Exemple Déterminer le centre et le rayon de la sphère suivante :

$$(\Sigma) : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 10y - 2z - 51 = 0$$

Exercice 4.66 : Donner les équations des sphères suivantes sous la forme développée :

a) sphère centrée en $O(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et passant par $M(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$

b) sphère centrée en $C(1\ ;\ -2\ ;\ 4)$ et passant par $M(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$

c) sphère de diamètre AB, où $A(-1\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et $B(7\ ;\ 4\ ;\ -7)$

Exercice 4.67 : Les équations suivantes représentent-elles des sphères ? Si oui, déterminer leur centre et leur rayon.

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 10y - 4z + 22 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y + 6z + 56 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 8y + 2z - 87 = 0$

Exercice 4.68 : Déterminer l'équation de la sphère passant par les deux points $A(4\ ;\ 2\ ;\ -3)$, $B(-1\ ;\ 3\ ;\ 1)$ et ayant son centre sur la droite CD connaissant $C(2\ ;\ 3\ ;\ 7)$ et $D(1\ ;\ 5\ ;\ 9)$.

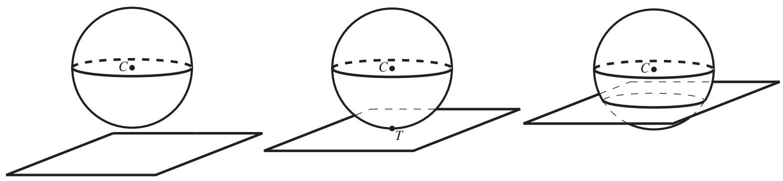
Exercice 4.69 : Dans l'espace, on considère :

- les points $A(-2 ; 1 ; 0)$, $B(0 ; 2 ; 1)$ et $C(3 ; 0 ; -1)$;
- le plan $(\beta) : x - 4y + z + 9 = 0$;
- la droite (t) : $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$

Déterminer l'équation de la sphère Γ centrée sur t et qui est tangente aux plans (ABC) et β.

Intersection d'une sphère et d'un plan

Trois cas possibles :



Attention ! Dans l'espace, un cercle n'a pas d'équation cartésienne. On ne peut le définir qu'en précisant son centre, son rayon et le plan qui le contient.

Quelques remarques pratiques pour les exercices

a) Un plan est **tangent à une sphère** si la distance du centre au plan (cf. formule) est égale au rayon de la sphère

b) $P(x ; y ; z)$ appartient au plan tangent à une sphère dont le point de tangence est T

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{CT} \bullet \overrightarrow{TP} = 0$$

Exemples

a) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère Σ de centre $C(1 ; 0 ; 0)$ et tangent à $(\alpha) : 4y + 3z - 25 = 0$

b) Déterminer l'équation du plan β tangent à Σ en $T(1 ; 3 ; 4)$:

Exercice 4.70 : Soit la sphère $(\Sigma) : (x-1)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = 62$.
Soit le plan $(\alpha) : 3x - 7y + 2z + 100 = 0$.

Le plan α est-il tangent à la sphère Σ ?

Exercice 4.71 : Soit la sphère $(\Sigma) : (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$.
Soit le plan $(\alpha) : 2x - 2y - z + 9 = 0$.

a) Prouver que le plan α coupe la sphère Σ.
b) L'intersection de α et Σ est un cercle. Déterminer son centre et son rayon.

Exercice 4.72 : Soit la sphère $(\Sigma) : x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 30y - 4z + 13 = 0$ et le point $T(7 ; 4 ; 4)$.

a) Vérifier que le point T est sur la sphère.
b) Déterminer l'équation du plan tangent à Σ en T.

Exercice 4.73 : Soit T un point de la sphère Σ de centre C et de rayon r. Soit α le plan tangent à Σ au point T. Soit encore P un point de l'espace. Démontrer l'affirmation suivante :

$$\boxed{P \in \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CT} \bullet \overrightarrow{CP} = r^2}$$

Exercice 4.74 : Soit la sphère $(\Sigma) : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 159 = 0$.
Soit le plan $(\alpha) : 12x + 4y + 3z - 12 = 0$.

Déterminer les équations des plans parallèles au plan α et tangents à la sphère Σ.

Exercice 4.75 : Soit les 2 sphères $(\Sigma_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 6z + 45 = 0$ et $(\Sigma_2) : x^2 + y^2 + z^2 = 81$.

a) Montrer que les deux sphères sont tangentes.
b) Déterminer l'équation du plan tangent aux deux sphères.

Exercice 4.76 : Soit les 2 sphères $(\Sigma_1) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y - 2z - 57 = 0$ et $(\Sigma_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 10y - 8z - 27 = 0$.

Prouver que ces deux sphères se coupent, puis déterminer ensuite leur intersection. Représenter la situation sur une bonne figure.

Exercice 4.77 : On donne la sphère $(\Sigma) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 3 = 0$

et la droite $(d) : \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 6 - 2k \\ z = -4 + k \end{cases}$

Calculer les coordonnées des points d'intersection de Σ et d.

Exercice 4.78 : Soit la sphère (Σ) : $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y - 2z + 17 = 0$ et le point $A(-2 ; 2 ; 3)$.

a) Vérifier que A est sur la sphère Σ.

b) Déterminer l'équation d'une droite d tangente en A à Σ.

c) Déterminer l'équation d'une droite g tangente en A à Σ et coupant l'axe Oz.