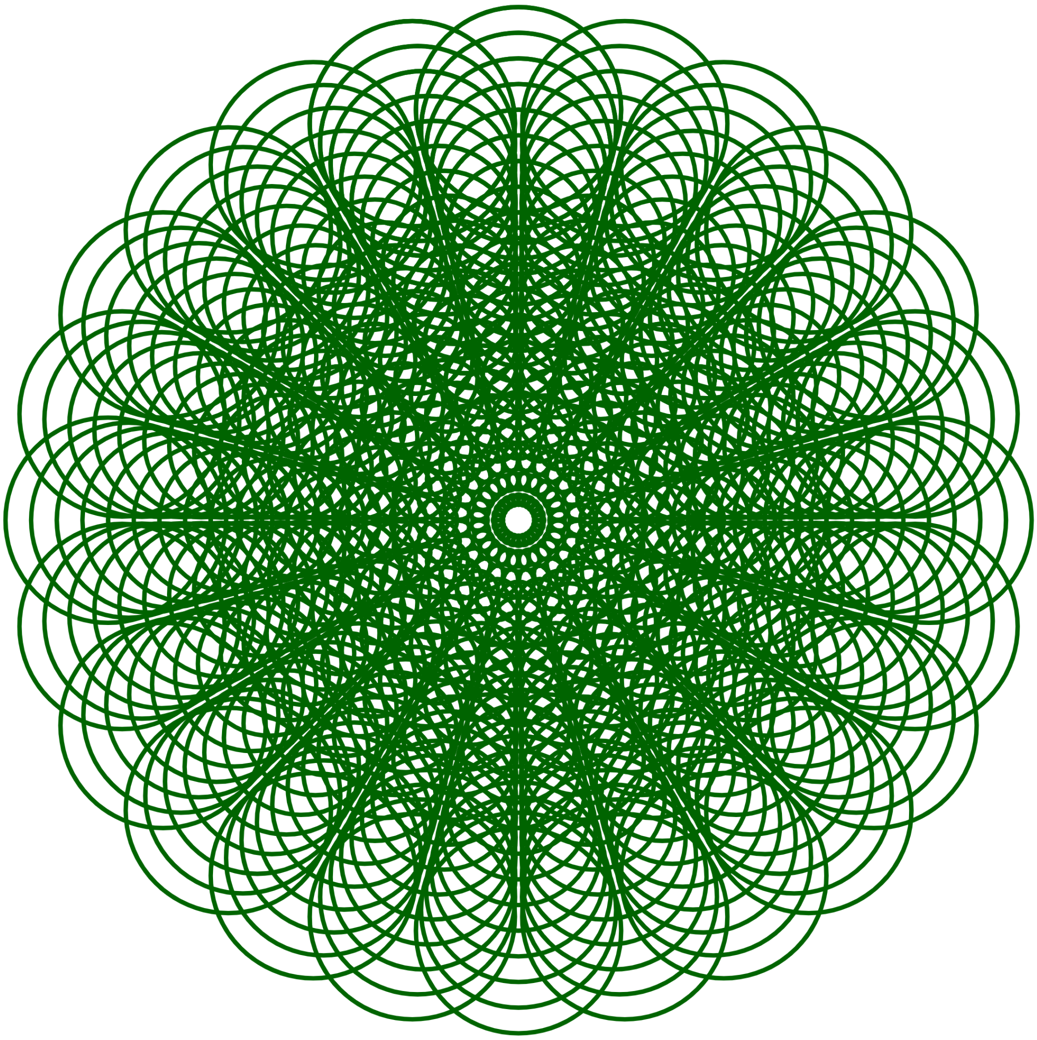
Analysis 2M

Carole Engelberger

28. März 2024



Inhaltsverzeichnis

Herzlichen Dank an Jean-Philippe Javet, Steven Gasser und Michaela Baumgärtner, deren Dokumente und Korrekturen mir sehr geholfen haben, um dieses Skript zu erstellen.

Kontakt : carole.engelberger@eduvaud.ch

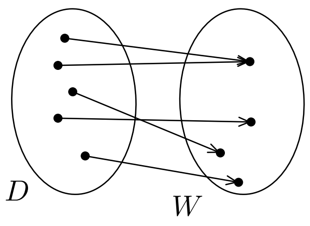
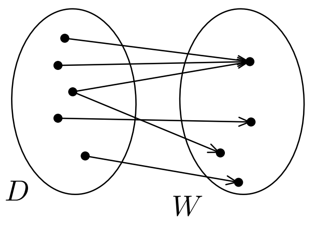
1 Funktionen I

Die Analysis ist ein Teilgebiet der Mathematik. Sie findet jedoch auch Anwendung in der Informatik, in der Chemie, in der Biologie, in der Wirtschaft, usw. Als Analysis bezeichnet man im Allgemeinen den Teil der Mathematik, der die Methoden der Infinitesimalrechnung benutzt. Die wichtigsten Teilbereiche der Analysis sind: Infinitesimalrechnung, Theorie der Differentialrechnung, Integralrechnung, Funktionstheorie. Der Ausdruck „Funktion“ wird seit Ende des XVII Jahrhundert gebraucht, als die Mathematiker Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz die Infinitesimalrechnung unabhängig voneinander entwickelten. Danach hat sich die Analysis auch dank Leonhard Euler (schweizer Mathematiker) weiter entwickelt.

1.1 Funktionen

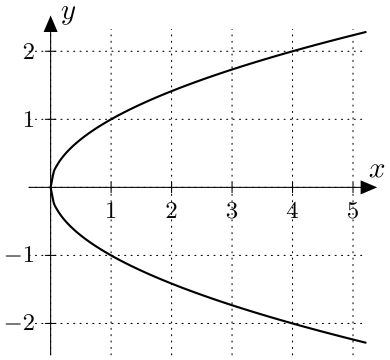
Definitionen. Eine Funktion f ordnet jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y einer Zielmenge Z zu (eindeutige Zuordnung).

Bemerkung. Die Umkehrung dieses Satzes gilt im Allgemeinen nicht ! Das heisst, ein Element y aus der Wertemenge W kann durchaus mehreren verschiedenen Elementen aus der Definitionsmenge D zugeordnet worden sein.

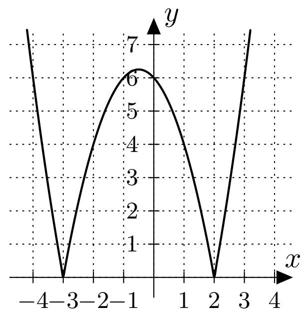
Diagramm	**Schreibweisen**	**Sprechweisen**
	$f; g; A;...$	
	$f(x)$	
Funktion 	D_f	
	W_f	
	$f : x \to x^2$	
Keine Funktion 	$f(x) = 2x - 1$	
	$y = 2x - 1$	
	N_f	
	G_f	

Aufgabe 1.1. Kann der Graph zu einer Funktion gehören ? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

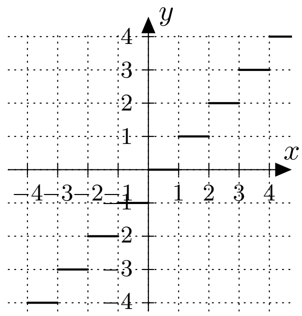
a)



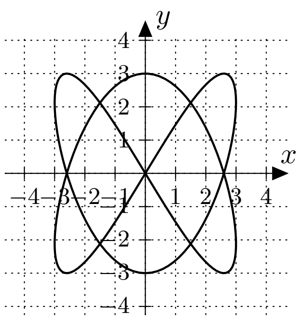
b)



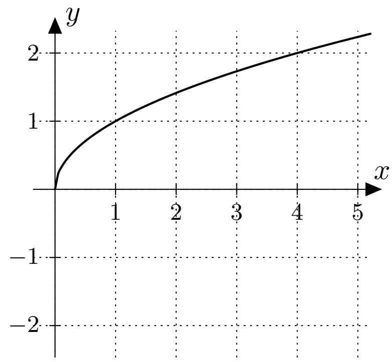
c)



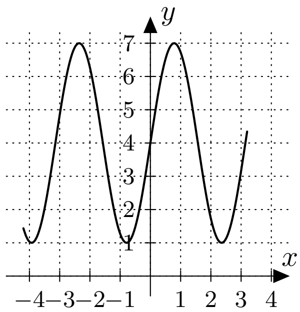
d)



e)



f)



Aufgabe 1.2. Drücken Sie die Aussage in mathematischer Kurzschrift aus.

a) Durch die Funktion f wird der Zahl 3 die Zahl 10 zugeordnet.

b) Die Funktion g nimmt an der Stelle 5 den Funktionswert 12 an.

c) Die Zahl 3 gehört nicht zur Definitionsmenge der Funktion f.

d) Die Funktionen g und f nehmen für $x = 2$ denselben Funktionswert an.

e) Alle Funktionswerte der Funktion g sind positiv.

Aufgabe 1.3. Richtig oder falsch ? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) Eine Parallele zur x-Achse kann nicht Graph einer Funktion sein.

b) Eine Parallele zur y-Achse kann nicht Graph einer Funktion sein.

c) Jede Parallele zur x-Achse hat mit dem Graphen einer beliebigen Funktion höchstens einen Punkt gemeinsam.

d) Jede Parallele zur y-Achse hat mit dem Graphen einer beliebigen Funktion höchstens einen Punkt gemeinsam.

Aufgabe 1.4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3\sqrt{4 - x^2}$.

a) Geben Sie die Funktionswerte an den Stellen -1 und $\sqrt{3}$ an.

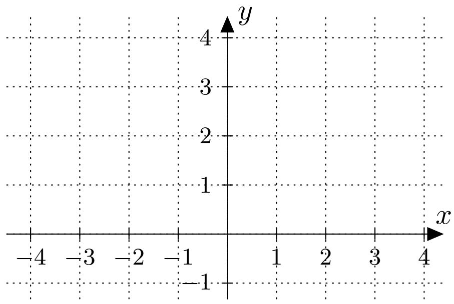
b) Berechnen Sie $f(0)$, $f(2)$ und $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

1.2 Einige wichtige Funktionen und ihre Schaubilder

Konstante Funktionen $f(x) = k$

Die Graphen dieser Funktionen sind horizontale Geraden durch den Punkt $P(0; k)$.

Beispiel: $f(x) = 3$

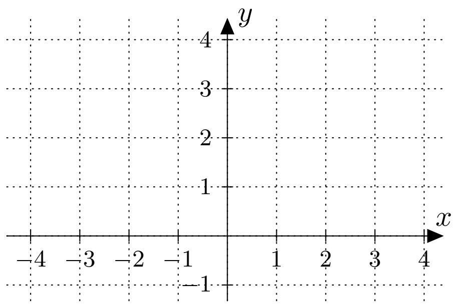


Lineare Funktionen $f(x) = m \cdot x + h$

Ihr Graph ist eine Gerade mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt h.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Längendifferenz}}$$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

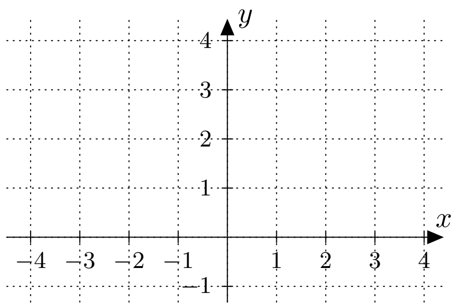


Sonderfälle von linearen Funktionen

$$f(x) = m \cdot x$$

Ihr Graph ist eine Gerade durch den Ursprung mit der Steigung m. (Ursprungsgerade)

Beispiel: $f(x) = -2x$

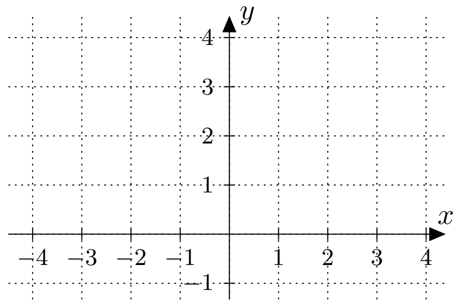


Quadratische Funktionen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Ihr Graph ist eine **Parabel**.
Die Schnittpunkte mit der x-Achse erhält man durch das Lösen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.

Beispiel: $f(x) = x^2 - 1$

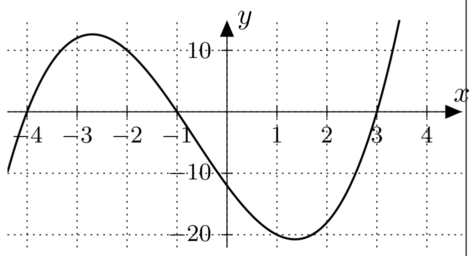


Funktion dritten Grades

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Ihr Graph ist eine Kurve mit höchstens 2 „Krümmungen“ und höchstens 3 Nullstellen.

$f(x) = (x+4)(x+1)(x-3)$

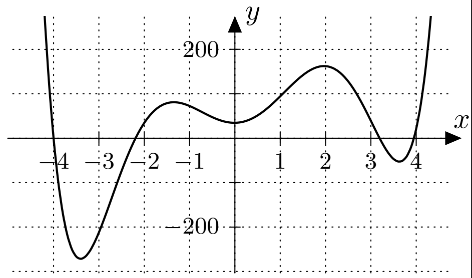


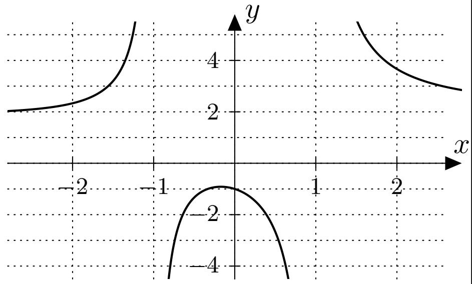
Polynomfunktion n-ten Grades

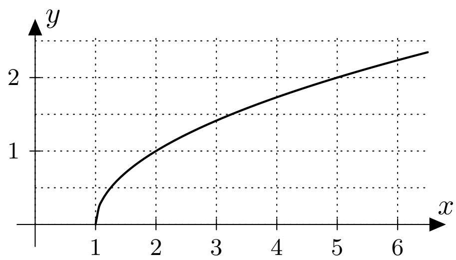
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

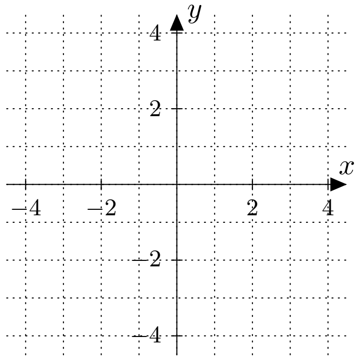
- Ihr Graph ist eine Kurve mit höchstens $n-1$ „Krümmungen“ und höchstens n Nullstellen.
- Um ihren Graphen zu skizzieren muss man eine Faktorzerlegung und eine Vorzeichentabelle machen

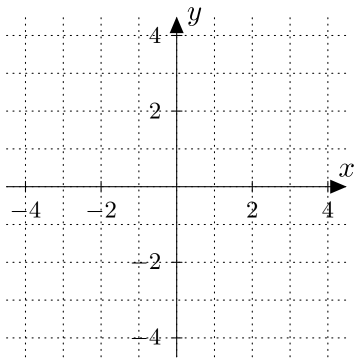
Funktion 6-ten Grades



Rationale Funktionen $f(x) = \dfrac{\text{Polynom } P(x)}{\text{Polynom } Q(x)}$	Beispiel: $f(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{(x+1)(x-1)}$
Es handelt sich um den Quotienten zweier ganzrationaler Polynome $P(x)$ und $Q(x)$.	

Wurzelfunktionen $f(x) = \sqrt{P(x)}$	Beispiel: $f(x) = \sqrt{x-1}$
• Bei diesen Funktionen steht unter dem Wurzelzeichen ein Polynom • Vorsicht bei der Definitionsmenge: Der Radikand muss grösser oder gleich Null sein ($P(x) \geq 0$).	

Die Betragsfunktion $f(x) = \lvert x \rvert$	Beispiel: $f(x) = \lvert x \rvert$
$f(x) = \lvert x \rvert = \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$ Dies ist eine wichtige **abschnittsweise definierte lineare Funktion.**	

Spezielle Potenzfunktionen $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$	Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x}$
Der Graph dieser Funktion heisst **Hyperbel**.	

Aufgabe 1.5. Bestimmen Sie (rechnerisch) jeweils die Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen folgender Funktionen.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 - 2x$

c) $f(x) = \sqrt{x+2}$

d) $f(x) = \lvert x \rvert + 1$

1.3 Definitionsmenge und Vorzeichentabelle

Definitionen. Die **Definitionsmenge** von f, geschrieben D_f, ist die Menge aller x-Werte, auf die f angewendet werden soll. Mit anderen Worten: D_f bestimmen heisst, die Menge aller x-Werte suchen, für die $f(x)$ existiert.

Bemerkung. Wir kennen drei verbotene Rechenoperationen:

1.

2.

3.

Definitionen. Die **Vorzeichentabelle** ist eine Methode, eine Ungleichung zu lösen oder die Vorzeichen (+ bzw. −) einer Funktion zu ermitteln und tabellarisch darzustellen.

Beispiele. Machen Sie eine Vorzeichentabelle folgender Funktionen:

a) $f(x) = 3x - 6$

b) $f(x) = -5x - 3$

c) $f(x) = x^2 + 5x + 6$ und $g(x) = -x^2 - 5x - 6$

d) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

e) $f(x) = x^3 + 4x$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ **g)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2 - 5x - 14}$

Aufgabe 1.6. Bestimmen Sie bei den folgenden Funktionen jeweils die Definitionsmenge und machen Sie eine Vorzeichentabelle.

a) $f(x) = 2x - 8$

b) $f(x) = -x + 3$

c) $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$

d) $f(x) = -3x^2 - 27$

e) $f(x) = \sqrt{-3x + 6}$

f) $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{-x+5}}$

g) $f(x) = \dfrac{x-3}{(7x+1)^2}$

h) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 12x}{x^2 + 3x - 5}$

i) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 17x - 15}{-x^2 + 64}$

j) $f(x) = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{-x+8}$

k) $f(x) = \log(-2x + 4)$

l) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 - 17x - 15}$

m) $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x - 21}\right)$ **n)** $f(x) = \sqrt{\log(x+1)}$ **o)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 - x}{x^2 - 64}}$

1.4 Trigonometrie

1.4.1 Winkel

Die Winkel kann man in Gradmass oder in Bogenmass berechnen.

Was ist ein Bogenmass ?

Aufgabe 1.7. **a)** Geben Sie den Wert der folgenden Winkel im Gradmass an:

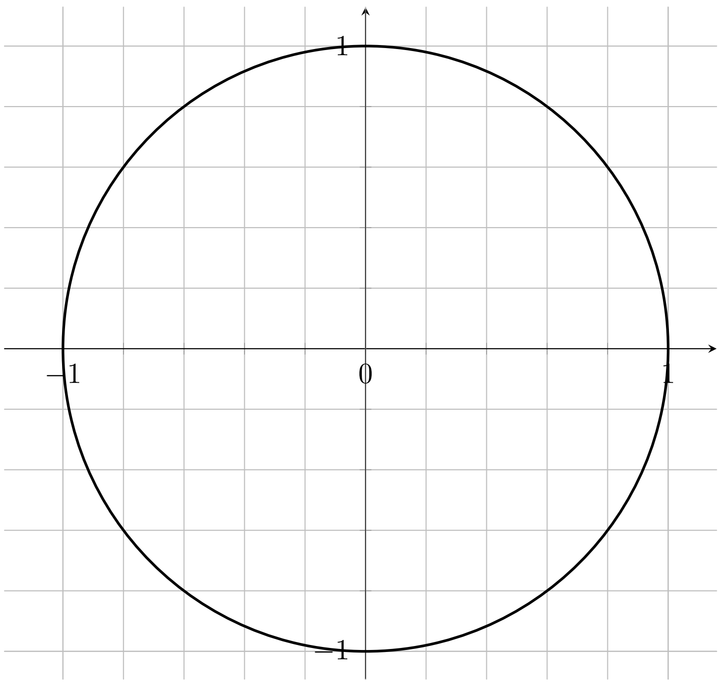
1) π **2)** $-\dfrac{\pi}{6}$ **3)** $\dfrac{2\pi}{3}$

b) Geben Sie den Wert der folgenden Winkel im Bogenmass an:

4) $45°$ **5)** $-120°$ **6)** $720°$ **7)** $15°$ **8)** $210°$ **9)** $-270°$

1.4.2 Der Einheitskreis

Der Einheitskreis ist ein Kreis mit Radius $1LE$ (Längeneinheit).



Aufgabe 1.8. Zeichnen Sie in Ihrem Heft einen Einheitskreis (ein Häuschen in Ihrem Heft soll gleich $0.1 LE$ sein). Schätzen Sie dann (ohne Taschenrechner !) die Werte von:

α (Gradmass)	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$27°$			
$135°$			
$200°$			

Aufgabe 1.9. Gibt es einen Winkel $\alpha \neq 32°$, für den gilt:

a) $\sin(\alpha) = \sin(32°)$?

b) $\cos(\alpha) = \cos(32°)$?

c) $\tan(\alpha) = \tan(32°)$?

1.4.3 Wichtige Winkelwerte

α (Gradmass)	α (Bogenmass)	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$0°$				
$30°$				
$45°$				
$60°$				
$90°$				
$180°$				

1.4.4 Trigonometrische Gleichungen

Beispiel. Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $3\tan(x) = \sqrt{3}$

c) $\sin(2x + 30°) = \dfrac{1}{2}$

Aufgabe 1.10. Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$

c) $4\sin(x) = -2$

d) $\tan(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

e) $\sin(2x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

f) $3\cos(4x) = -\dfrac{3}{2}$

g) $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{11}}{2}$

h) $\tan(2x + 20°) = -1$

i) $\cos(4x - 45°) - 1 = 0$

---

2 Funktionen II

2.1 Bild und Urbild

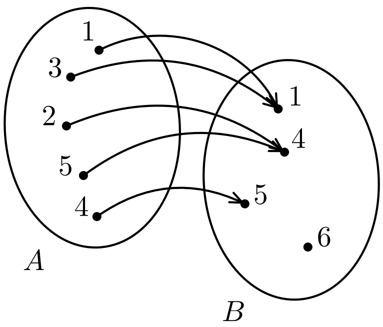
Definitionen.

• Ist $f : A \to B$ eine Abbildung (Funktion) und gilt $f(a) = b$ ($a \in A$ und $b \in B$), so heisst b das **Bild** von a und a heisst **Urbild** von b unter der Abbildung f.

• Die Urbildmenge von b besteht aus allen $a \in A$ mit $f(a) = b$. Man bezeichnet sie mit $f^{-1}(b)$ und nennt sie auch kurz das Urbild von b.

• Unter der Bildmenge $f(A)$ versteht man die Menge $f(A) := \{b \in B|$ es gibt ein $a \in A$ mit $f(a) = b\}$. Es gilt $f(A) \subseteq B$.

Beispiele. Hier ist eine Funktion durch ein Mengendiagramm dargestellt. Füllen Sie die Lücken aus:



$f(1) = \ldots\ldots$

$f^{-1}(1) = \ldots\ldots$

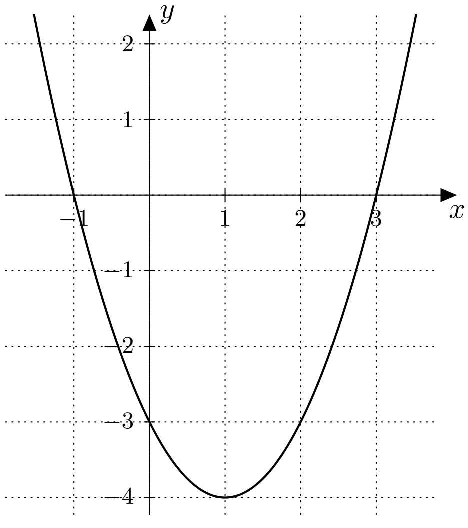
$f(\{1\,;2\,;3\}) = \ldots\ldots$

$f^{-1}(\{1\,;4\}) = \ldots\ldots$

$f^{-1}(6) = \ldots\ldots$

$f(A) = \ldots\ldots$

Der Graph der Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ist gegeben. Füllen Sie die Lücken aus:



$f(1) = \ldots\ldots$

$f^{-1}(0) = \ldots\ldots$

$f([0\,;3]) = \ldots\ldots$

$f^{-1}([-4\,;0]) = \ldots\ldots$

$f^{-1}(-5) = \ldots\ldots$

$f(A) = \ldots\ldots$

Beispiel. Die Funktion $f(x) = x^2 + 3x - 18$ ist gegeben. Berechnen Sie:

$f(2)$

$f^{-1}(10)$

$f(A)$

$f^{-1}([-8; 36])$

Aufgabe 2.1. Die dargestellte Kurve ist der Graph einer Funktion f:

a) Bestimmen Sie durch Ablesen am gegebenen Graphen die Bilder von -1 und 0 der Funktion f.

b) Bestimmen Sie durch Ablesen $f(2)$.

c) Bestimmen Sie durch Ablesen die Urbilder von -2, von 1 und von 3 der Funktion f.

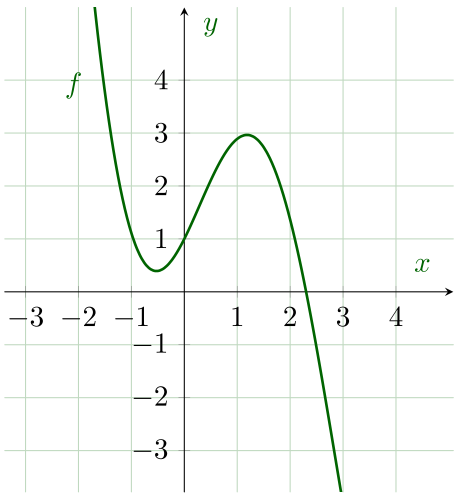
d) Lösen Sie die Gleichung $f(x) = 2$ graphisch.

e) Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$.

f) Wie lautet die zweite Koordinate des Punktes, dessen erste Koordinate 1 ist ?

g) Für welche positive Zahl x ist der Funktionswert 1 ?

h) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes der Kurve, bei dem beide Koordinaten identisch sind.



Aufgabe 2.2. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 3x^2 + x - 5$ und $g(x) = 2x + 3$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und g.

b) Bestimmen Sie die Bilder von 2 und -3 der Funktion f.

c) Bestimmen Sie die Urbilder von 5 und -6 der Funktion g.

d) Bestimmen Sie die Urbilder von 5 und -6 der Funktion f.

e) Bestimmen Sie $g^{-1}([-1; 4])$.

f) Bestimmen Sie $f(A)$.

Aufgabe 2.3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$. Bestimmen Sie:

a) $f(4)$	**b)** $f(3)$	**c)** $4f(x)$	**d)** $f(4x)$
e) $f(x+4)$	**f)** $f(4) + f(x)$	**g)** $f(-x)$	**h)** $-f(x)$

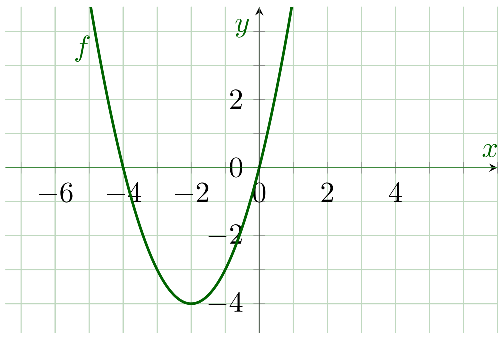
2.2 Lage- und Formänderungen von Funktionsgraphen

Beispiel.

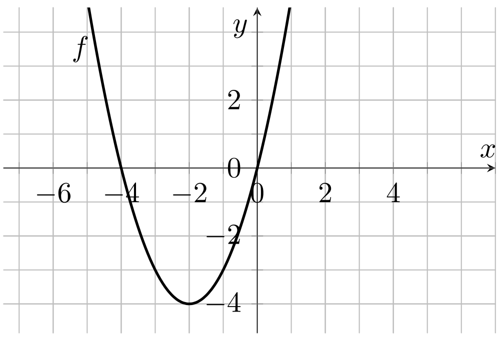
Wie kann man den Graphen einer Funktion g aus dem gegebenen Graphen einer anderen Funktion f ohne Rechnung herleiten ?

Sei die Funktion f gegeben durch:
$f(x) = x^2 + 4x$.

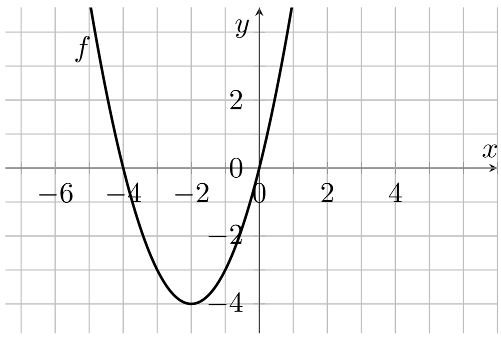
x	$f(x)$
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	



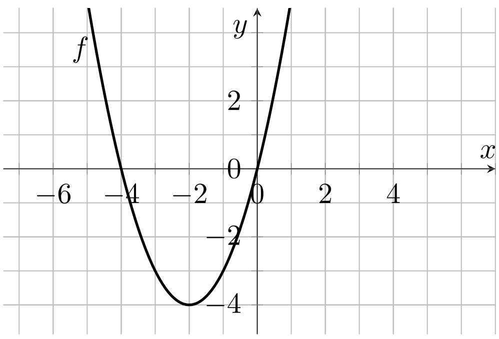
a) $g(x) = -f(x)$



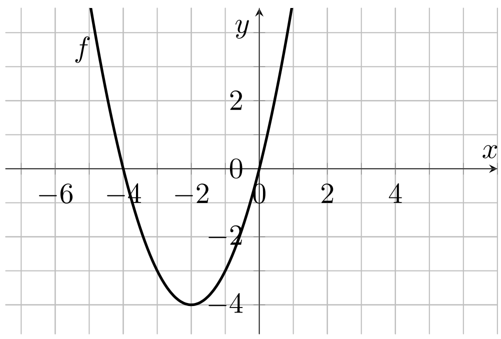
b) $g(x) = f(-x)$



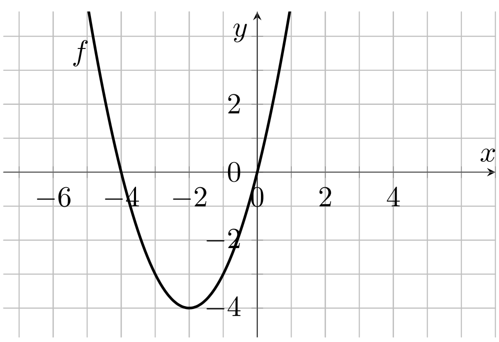
c) $g(x) = f(x) + k$ (im Beispiel sei $k = 3$)



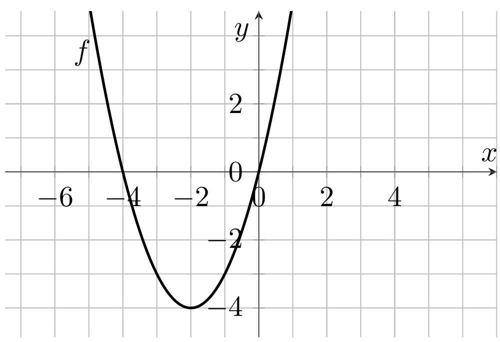
d) $g(x) = f(x+k)$ (im Beispiel sei $k = -5$)



e) $g(x) = k \cdot f(x)$ (im Beispiel sei $k = \frac{1}{2}$)

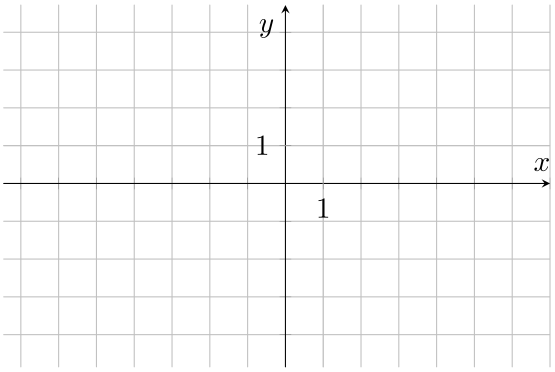


f) $g(x) = |f(-x)|$

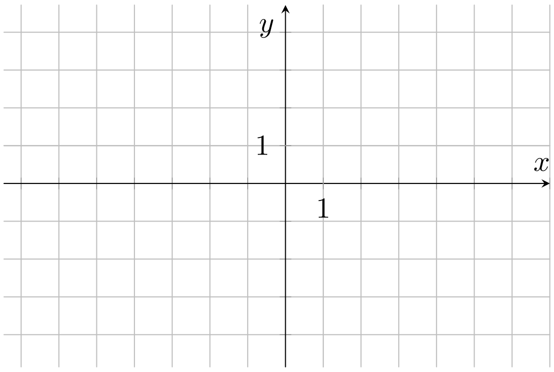


Aufgabe 2.4. Skizzieren Sie ausgehend vom Graphen der jeweiligen Elementarfunktion den ungefähren Verlauf der Graphen der folgenden Funktionen:

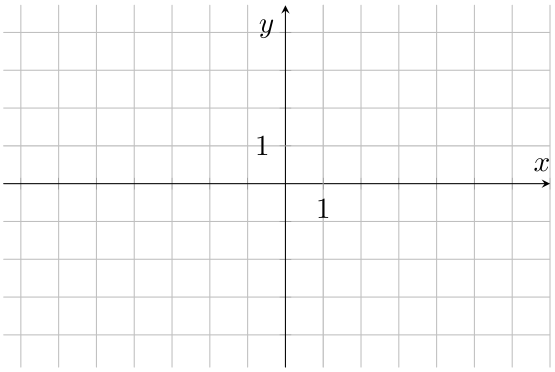
a) $f(x) = x^2 - 2$



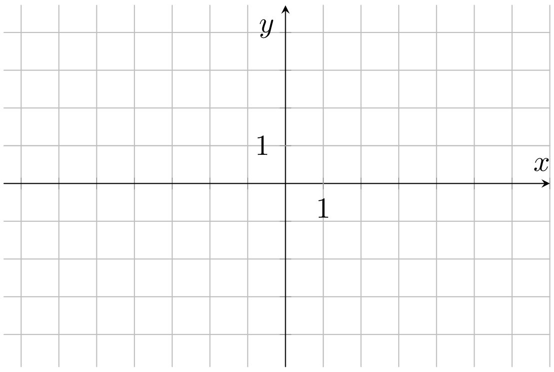
b) $f(x) = (x-3)^2$



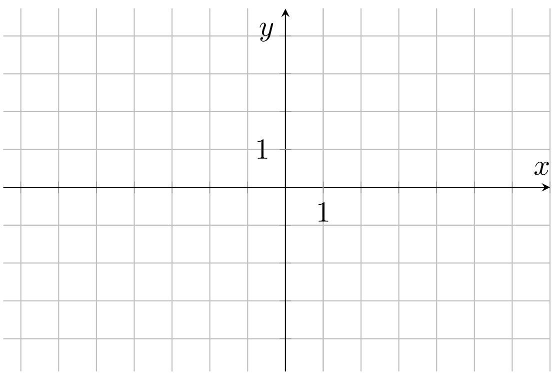
c) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$



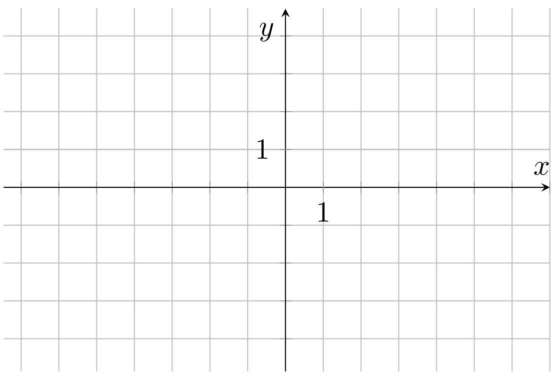
d) $f(x) = 2\sqrt{-x}$



e) $f(x) = -|x-3|$

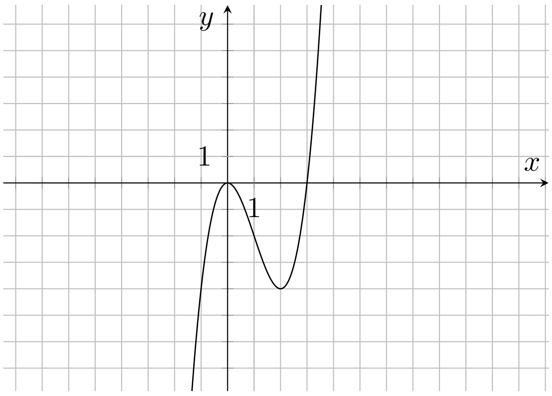


f) $f(x) = |x+2| - 3$

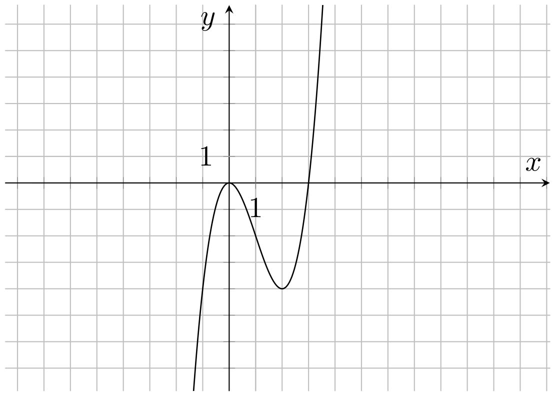


Aufgabe 2.5. In allen folgenden Koordinatensystemen ist die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2$ abgebildet. Zeichnen Sie in diese Koordinatensysteme die Graphen der folgenden Funktionen:

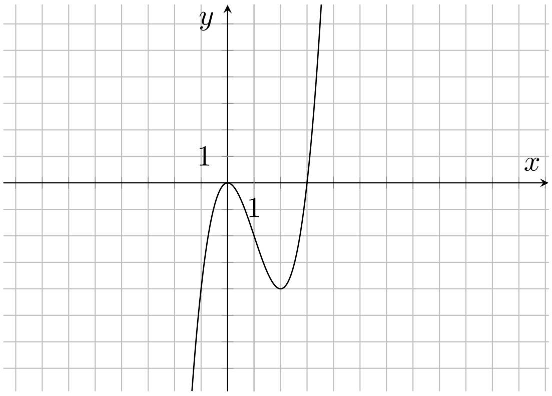
a) $g(x) = f(x) - 1$



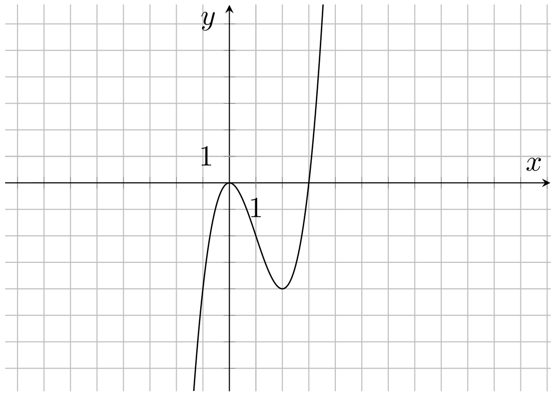
b) $g(x) = f(x + 3)$



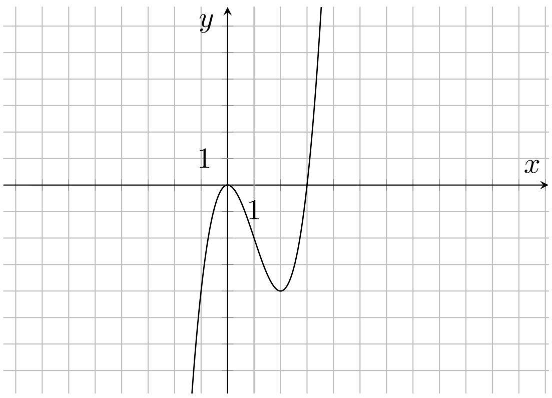
c) $g(x) = -f(x)$



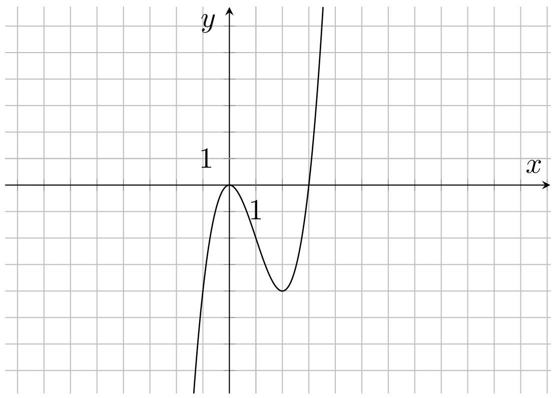
d) $g(x) = f(-x)$



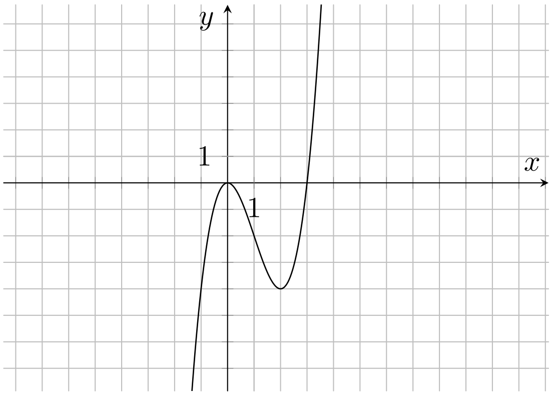
e) $g(x) = |f(x)|$



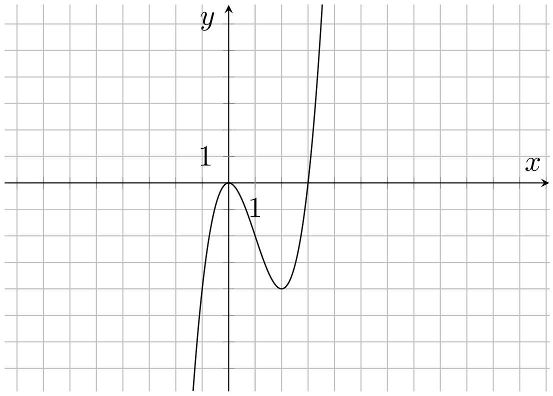
f) $g(x) = f(|x|)$



g) $g(x) = \dfrac{1}{2}f(x)$



h) $g(x) = -f(-x)$



2.3 Verknüpfung zweier Funktionen

2.3.1 Operationen

Definitionen. Seien f und g zwei Funktionen. Man definiert ihr(e) **Summe**, **Differenz**, **Produkt** und **Quotient** folgenderweise:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

- Die Definitionsmenge der Funktionen $f+g$, $f-g$ und $f \cdot g$ ist der Durchschnitt der Definitionsmengen von f und g.
- Die Definitionsmenge der Funktion $\dfrac{f}{g}$ ist der Durchschnitt der Definitionsmengen von f und g, jedoch ohne die Nullstellen von g.

Bemerkung. Man könnte noch andere Operationen definieren, wie zum Beispiel:

$$(f * g)(x) = f^2(x) + g^2(x)$$

Beispiel 1. Seien die Funktionen $f(x) = x$ und $g(x) = \dfrac{x+1}{x}$. Berechnen Sie:

a) $(f+g)(x) =$

b) $(f-g)(x) =$

c) $(f \cdot g)(x) =$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) =$

Aufgabe 2.6. Berechnen Sie $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ und geben Sie jeweils die Definitionsmenge an.

a) $f(x) = 3x$ und $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x-4}$ und $g(x) = \dfrac{x}{x+5}$

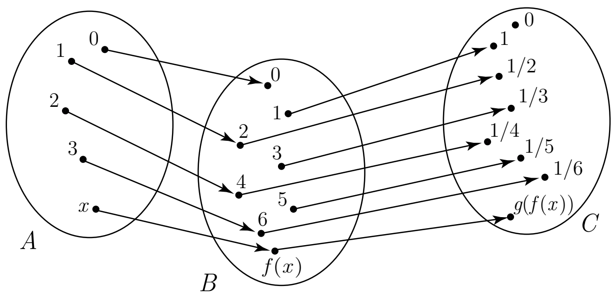
2.3.2 Verkettung

Seien die drei Mengen: $A = \{0\,;1\,;2\,;3\}$, $B = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ und $C = \{0\,;1\,;1/2\,;1/3\,;1/4\,;1/5\,;1/6\}$

und die Abbildungen:

$$\begin{array}{rcl} f\colon A & \to & B \\ x & \mapsto & 2x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} g\colon \ldots & \to & C \\ y & \mapsto & 1/y \end{array}$$

Man kann die Diagramme der Abbildungen f und g zeichnen, und die Menge B nur einmal zeichnen:



Man wendet zuerst f und dann g an. Durch diese Verkettung wird also einem Element der Menge A ein Element der Menge C zugeordnet:

$$\begin{array}{rcl} \ldots\ldots\colon A - \{0\} & \to & C \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2x} \end{array}$$

Definitionen. Die **Verkettung** zweier Funktionen f und g, (geschrieben: $g \circ f$, man sagt „ g Kringel f „) ist folgenderweise definiert:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Die **Definitionsmenge** von $g \circ f$ ist die Menge aller x der Definitionsmenge von f, sodass $f(x)$ in der Definitionsmenge von g ist.

Bemerkungen.

- Vorsicht ! Die Verkettung ist kein Produkt.
- Die Reihenfolge, in der man die Operationen durchführt, ist nicht dieselbe, wie man sie schreibt.

Beispiele. Berechnen Sie jeweils $(f \circ g)(x)$ und $(g \circ f)(x)$:

a) $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = \dfrac{1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = 2x - 6$

Bemerkung. Die Verkettung ist generell nicht kommutativ:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Aufgabe 2.7. Seien die Funktionen f, g und h gegeben:

$$f(x) = 3x \quad g(x) = 2x - 1 \quad h(x) = x^2$$

Berechnen Sie:

a) $f(g(x))$ **b)** $g(f(x))$ **c)** $f(f(x))$

d) $f(g(h(x)))$ **e)** $g(f(h(x)))$ **f)** $h(g(h(x)))$

Aufgabe 2.8. Die folgenden Funktionen sind Verkettung zweier Funktionen g und h, die Sie finden sollten:

a) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$ **c)** $f(x) = (x+3)^2$

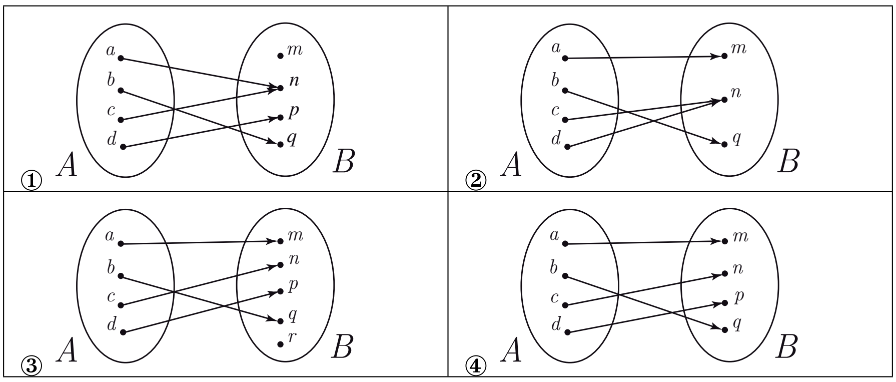
d) $f(x) = \log(x^2+4)$ **e)** $f(x) = 3^{2x}$ **f)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$

2.4 Bijektive Funktionen und Umkehrfunktionen

Erinnerung Die Definition einer Funktion lautet folgenderweise: eine Funktion f ordnet jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y einer Zielmenge Z zu.

Definitionen. Gilt die Umkehrung des Satzes oben (eineindeutige Zuordnung), dann heisst die Funktion **Bijektion** oder **bijektive Funktion**. In diesem Fall existiert zur Funktion f eine Umkehrfunktion f^{-1}.

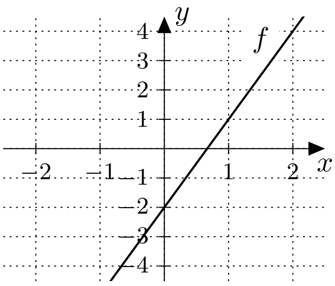
Beispiel. In welchem Fall ist die Funktion $f : A \to B$ bijektiv ?



Beispiel.

<table>
<tr>
<td>

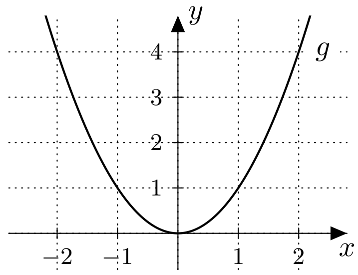
① $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto \;.....$



f ist eine bijektive Funktion

</td>
<td>

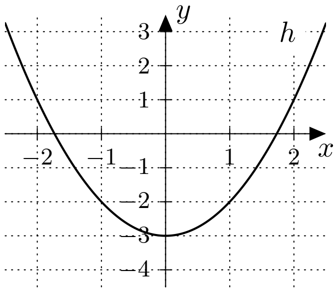
② $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto \;.....$



g ist keine bijektive Funktion weil ....
....
....
....

</td>
</tr>
<tr>
<td>

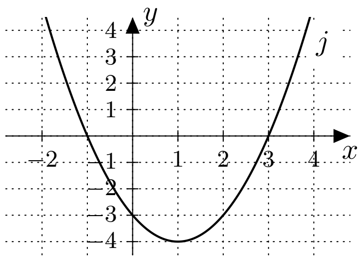
③ $h\colon \mathbb{R} \to [-3\,;+\infty[$
$\quad x \mapsto x^2 - 3$



h ist keine bijektive Funktion weil ....
....
....
....

</td>
<td>

④ $j\colon [1\,;+\infty[\;\to\; [-4\,;+\infty[$
$\quad x \;\mapsto x^2 - 2x - 3$



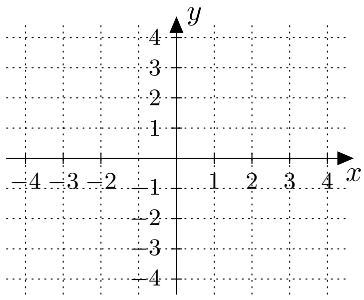
j ist eine bijektive Funktion ....
....
....
....

</td>
</tr>
</table>

Aufgabe 2.9. Skizzieren Sie folgende Funktionen. Sind Sie bijektiv ?

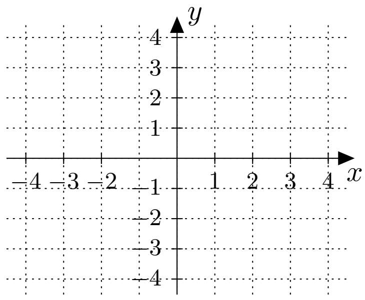
a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -2x+3$



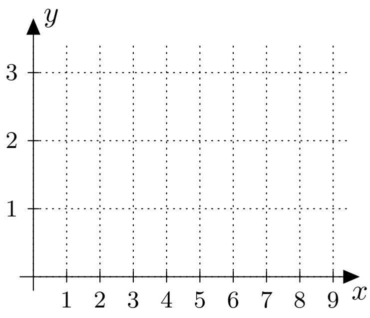
b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2-3$



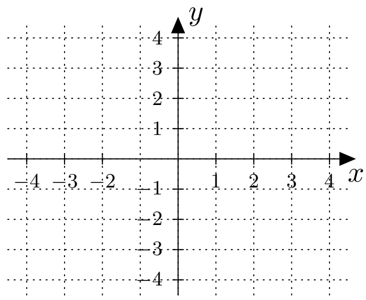
c) $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$x \mapsto \sqrt{x}$



d) $j\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$

$x \mapsto 1/x$



Definitionen. Falls f eine Bijektion von A nach B ist, dann existiert eine Funktion f^{-1} von B nach A. Das ist die **Umkehrfunktion**, und es gilt:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Bemerkungen.
• Die Umkehrfunktion einer Bijektion ist auch eine Bijektion.
• Die Graphen von f und f^{-1} im kartesischen Koordinatensystem sind symmetrisch zur ersten Winkelhalbierenden ($y = x$).
• Ist f umkehrbar, so berechnet man die Funktionsgleichung von f^{-1} durch Vertauschen der Variablen in $y = f(x)$ und Auflösen nach y:

$$x = f(y) \Rightarrow y = f^{-1}(x)$$

• Die Umkehrfunktionen der Potenzfunktionen $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$, n eine ungerade Zahl, sind die Wurzelfunktionen (und umgekehrt). Für gerade Exponente soll auf die Definitionsmengen geachtet werden.
• Die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen sind die Logarithmusfunktionen (und umgekehrt).
• Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sind die Arkusfunktionen (und umgekehrt).

Beispiele. Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen der folgenden Funktionen:

a) $f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x+1 \end{array}$

b) $g\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}-\{-5\} & \to & \mathbb{R}-\{\dots\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x+3}{x+5} \end{array}$

c) $h\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & [3\,;+\infty[\\ x & \mapsto & x^2+3 \end{array}$

Aufgabe 2.10. Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen folgender Funktionen. Geben Sie jeweils die Definitions- und Wertemengen an.

a) $f_1\colon \begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$ $\qquad f_2\colon \begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x \end{aligned}$

b) $f_3\colon \begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x+3 \end{aligned}$ $\qquad f_4\colon \begin{aligned} \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R}^* \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$

c) $f_5\colon \begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ $\qquad f_6\colon \begin{aligned} \mathbb{R}_- &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$

d) $f_7\colon \begin{aligned} \mathbb{R} - \{1\} &\to \mathbb{R} - \{\dots\} \\ x &\mapsto \frac{2x+1}{x-1} \end{aligned}$ $\qquad f_8\colon \begin{aligned} \mathbb{R} - \{1\} &\to \mathbb{R} - \{\dots\} \\ x &\mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$

3 Grenzwerte und Asymptoten

Das Unendliche beschäftigte schon im Altertum den Geist der Menschheit. Bis ins 17. Jahrhundert war man mit der aristotelischen Definition des potenziell Unendlichen einverstanden. Potenziell Unendlich nach Aristoteles bedeutet, dass alle Zahlenfolgen endliche Anfangsstücke 1;2;3;...;n sind, die die Möglichkeit haben, unendlich lang zu werden, ohne aber unendlich je zu erreichen. Nach dem 17. Jahrhundert begann man, das Zeichen „∞“ zu schreiben, ohne es wirklich zu brauchen. Erst im 19. Jarhhundert wurden, dank Cauchy, Weierstrass und danach auch Cantor, das „unendlich gross“ und „unendlich klein“ als Variablen definiert.
In diesem Kapitel werden wir untersuchen, wie sich eine Funktion an den offenen Rändern ihrer Definitionsmenge verhält. Zuerst werden wir verschiedene Möglichkeiten anhand von Graphen untersuchen. Dann werden Sie rechnerische Methoden zur Bestimmung von Grenzwerten sowie deren graphische Interpretation kennenlernen.

Beispiel. Betrachten Sie diese Aussage: „Als der Renner das Rennen gewann, war seine Geschwindigkeit 32km/h“. Wie kann eine Person in einem genauen Moment eine Geschwindigkeit haben ? Falls man in diesem genauen Moment ein Foto macht, bewegt sich ja der Renner nicht...

Beispiel. In der analytischen Geometrie haben wir gelernt, wie man die Steigung einer Gerade berechnet. Was passiert mit einer Kurve ? Bei Kurven ist ja die Steigung nicht konstant...

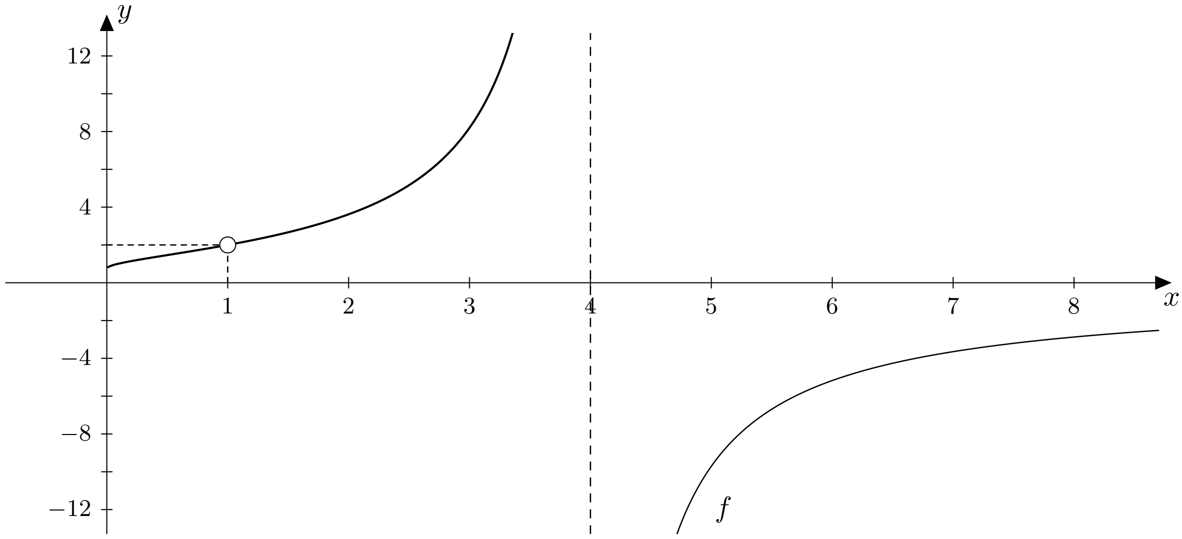
3.1 Einführung

Beispiel. Sei die Funktion

$$f(x) = \frac{3(1-x)}{(\sqrt{x}-1)(x-4)}$$

Bestimmen Sie die Definitionsmenge:

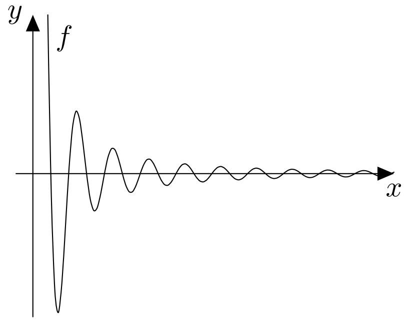
Graph von f:



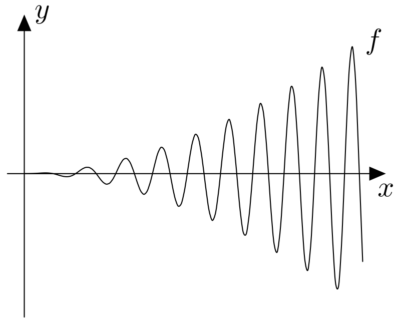
Begriffe und Notationen:

x-**Werte**	Funktionswerte	Grenzwerte	Begriffe
0			
1			
4			
$\to +\infty$			

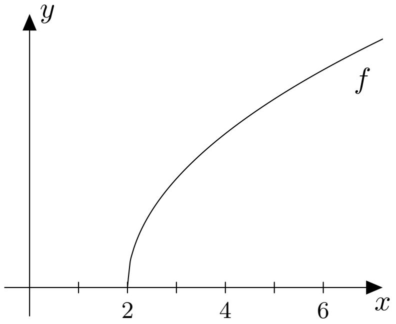
Aufgabe 3.1. Bestimmen Sie anhand der gegebenen Graphen, die gesuchten Grenzwerte.



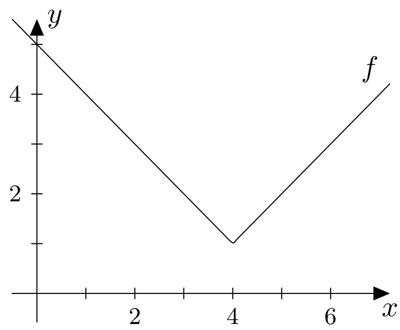
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ ....
   $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$ ....



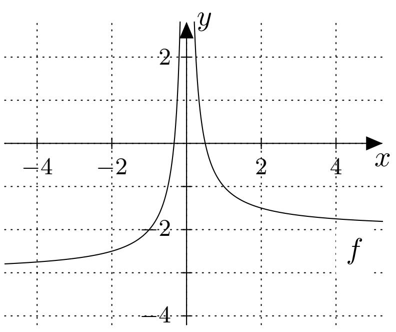
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$ ....
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ ....



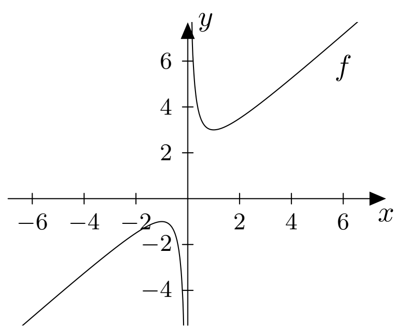
3. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$ ....
   $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$ ....



4. $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) =$ ....
   $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) =$ ....



5. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ ....
   $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$ ....
   $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$ ....
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ ....



6. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ ....
   $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$ ....
   $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$ ....
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$ ....

3.2 Grenzwerte von Funktionen an einer Stelle x_0

3.2.1 Definitionen und graphische Darstellungen

Definitionen.

• Seien x_0 und g reelle Zahlen und sei f eine Funktion. Die Zahl g heisst dann **Grenzwert von** f **an der Stelle** x_0, wenn sich $f(x)$ beliebig nahe an g annähert, sobald x genügend nahe an die Zahl x_0 geht.

• Man schreibt: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$ und liest "limes von $f(x)$ für x gegen x_0 ist gleich g".

Definitionen.

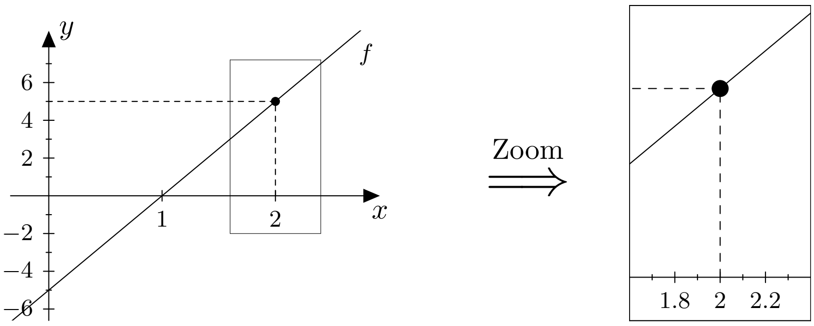
• Gilt $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g$, so heisst g **linksseitiger Grenzwert** von x_0.

• Gilt $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g$, so heisst g **rechtsseitiger Grenzwert** von x_0.

• Gilt $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, so schreibt man kurz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$.

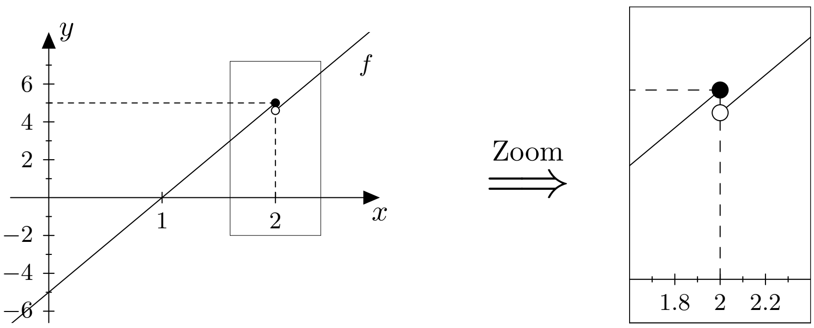
Dann und nur dann ist die Zahl g der Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_0.

Beispiel. • Der Grenzwert an der Stelle $x_0 = 2$ existiert:



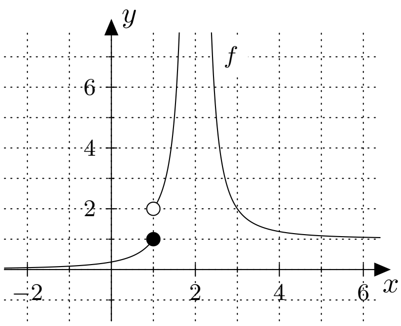
Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existiert und dessen Wert ist $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$.

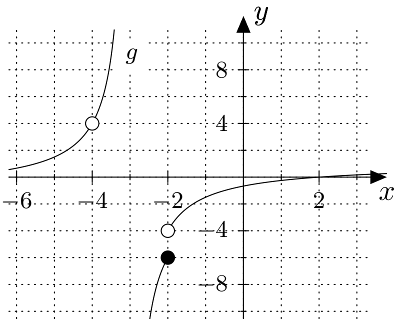
• Beispiel, wo der Grenzwert nicht existiert:



Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existiert nicht, weil …

Beispiel. Bestimmen Sie anhand der gegebenen Graphen, die gesuchten Grenzwerte:

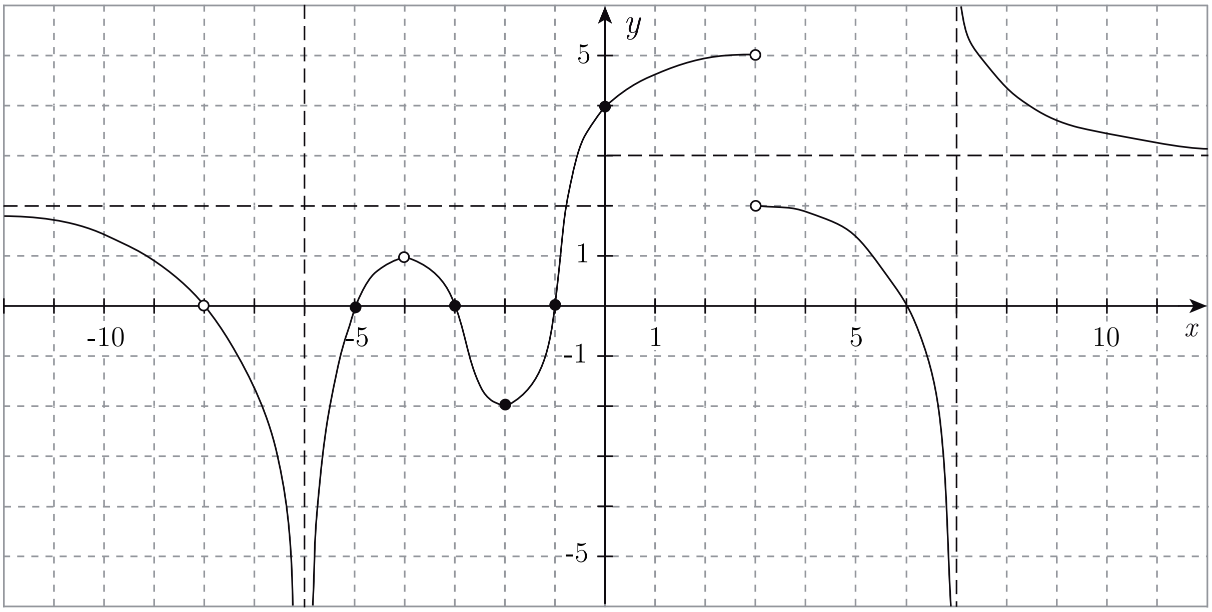




- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$ ....
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$ ....
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ ....
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$ ....
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$ ....
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ ....
- $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$ ....

- $\lim\limits_{x\to -4^-} g(x) =$ ....
- $\lim\limits_{x\to -4^+} g(x) =$ ....
- $\lim\limits_{x\to -4} g(x) =$ ....
- $\lim\limits_{x\to -3^-} g(x) =$ ....
- $\lim\limits_{x\to -3^+} g(x) =$ ....
- $\lim\limits_{x\to -3} g(x) =$ ....
- $\lim\limits_{x\to -2} g(x) =$ ....

Aufgabe 3.2. Gegeben ist der Graph der Funktion f:



a) Bestimmen Sie D_f.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

c) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle:

a	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	Begriffe
$-\infty$				
-8				
-6				
-4				
-2				
0				
3				
7				
$+\infty$				

3.2.2 Berechnungsmethoden für $x \to x_0$ mit $x_0 \neq \pm\infty$

Berechnungsmethode für $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$: zuerst muss man der Wert x_0 **immer** in den Funktionsterm einsetzen. Drei Ergebnisse sind möglich:

1. $f(x_0) = z$, mit $z \in \mathbb{R}$. Falls $x_0 \in D_f$, dann entspricht der Grenzwert dem Funktionswert $f(x_0)$ an der Stelle x_0.
2. $f(x_0) = \frac{z\neq 0}{0}$. In diesem Fall sind drei Antworten möglich: $+\infty$, $-\infty$, Grenzwert nicht definiert.
   Man bezeichnet x_0 dann als **Polstelle** von f. Der Graph von f hat dann an der Stelle x_0 eine **vertikale Asymptote** (kurz: v.As.) mit der Gleichung $\boldsymbol{x = x_0}$.
3. $f(x_0) = \frac{0}{0}$. Dieser Ausdruck liefert kein Ergebnis. Um Fortfahren zu können, muss der Funktionsterm faktorisiert und gekürzt werden, oder erweitert werden. Der Graph von f hat dann an der Stelle x_0 ein **Loch** oder eine **vertikale Asymptote**.

Beispiel. Bestimmen Sie zuerst die Definitionsmenge und danach die Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{x-3} =$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+6x+5}{x^2-1} =$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{(x+1)^2} =$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-4}{(x+1)^2} =$

e) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3-7x-6}{x^3+x^2-2x} =$

f) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-\sqrt{x+6}}{x-3} =$

Aufgabe 3.3. Bestimmen Sie zuerst die Definitionsmenge und danach die Grenzwerte. Interpretieren Sie die Ergebnisse graphisch.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x}{(x+1)^2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4}{x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2}{x^2+9x+20}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+6x^2-x-30}{x^2-2x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

g) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-3x+2}{(x^2-6x+5)^2}$ **h)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+2}{x^2+4x+3}$ **i)** $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{x^2-4}{(x+1)^2}$

j) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$ **k)** $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+7x+10}{x^2+6x+9}$ **l)** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+7x+10}{x^2+4x+4}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-4}{x}$ **n)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}}{3x-5}$ **o)** $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-4}{(x+1)^4}$

3.2.3 Grenzwertsätze

- $\lim\limits_{x\to x_0} \big(k\cdot f(x)\big) = k\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ wo k eine reelle Zahl ist

- $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)\pm g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

- $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ falls $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

- $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$

3.2.4 Rechnen mit Unendlich

Nicht definierte Ausdrücke

Bei manchen Rechenausdrücke kann man nicht weiterrechnen, da sie „unbestimmt“ sind. Dazu zählen die folgenden 4 Rechenausdrücke:

$$\boxed{\frac{\text{fast } 0}{\text{fast } 0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \infty \cdot \text{fast } 0 \qquad \infty - \infty}$$

Diese Rechenausdrücke gilt es zu vermeiden bzw. durch Umformen des Funktionsterms (faktorisieren/kürzen/erweitern) aufzulösen !

Beispiel. Sei $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$. Berechnen Sie:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

Bemerkung. Achtung ! Anstelle von „fast 0“ wird im Folgenden zur Vereinfachung der Schreibweise nur noch die Zahl 0 geschrieben.

Wichtige Ergebnisse für das Rechnen mit Unendlich

Sei $c \in \mathbb{R}$, $c \neq \infty$ und $k \in \mathbb{R}_+^*$:

$$(+\infty) + (+\infty) = \ldots \qquad (-\infty) - (+\infty) = \ldots \qquad (+\infty) + c = \ldots$$

$$\infty \cdot \infty = \ldots \qquad \infty \cdot c = \ldots \quad \text{(falls } c \neq 0\text{)}$$

$$(\infty)^k = \ldots \qquad \sqrt{+\infty} = \ldots$$

$$\frac{\infty}{c} = \ldots \qquad \frac{\infty}{0} = \ldots$$

$$\frac{c}{\infty} = \ldots \qquad \frac{0}{\infty} = \ldots$$

Beispiel. Bestimmen Sie zuerst die Definitionsmenge und danach die Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{3}{x}}{\frac{2+x}{x}} =$

b) $\lim\limits_{x\to 0} 3x \cdot \dfrac{5}{x^2-3x} =$

Aufgabe 3.4. Bestimmen Sie zuerst die Definitionsmenge und danach die Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3+\dfrac{1}{x-1}}{2-\dfrac{x}{x-1}}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{3x}{x^2-4x+4}$

3.2.5 Berechnungsmethoden für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$

Grenzwerte für Polynomfunktionen wenn $x \to \pm\infty$

Satz. *Für jede Polynomfunktion gilt:*

$$\lim_{x\to\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$$

Beispiel. $\lim\limits_{x\to\infty} 3x^2 + 6x - 12 =$

Grenzwerte für rationale Funktionen falls $x \to \pm\infty$

Satz. *Für jede rationale Funktion gilt:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Dann bekommt man: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & \textit{falls } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \textit{falls } n = m \\ \infty & \textit{falls } n > m \end{cases}$

Beispiel. Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+6x-12}{2x^2-7x+3} =$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2+6x-12}{x+1} =$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \dfrac{3x^2+6x-12}{5x^4-3x^2+x-9} =$

Aufgabe 3.5. Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{18x^2+6x-12}{25x-7}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+6x-12}{x^3-7x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^5+6x^4-12x}{18x^5+3}$

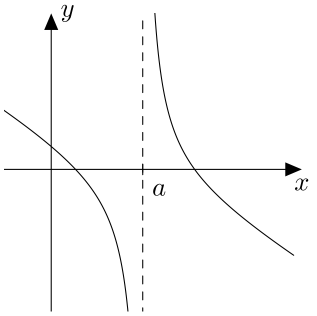
d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2}{7x+3}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2}{3x}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-5+\dfrac{12}{x+3}$

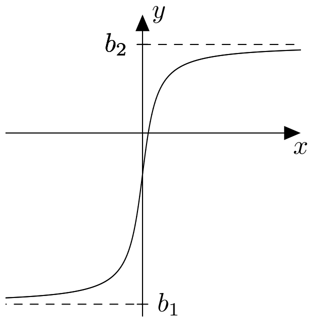
3.3 Asymptoten

Eine **Asymptote** einer Funktion f ist eine Gerade, an die sich der Graph einer Funktion immer weiter annähert. Das bedeutet, dass der Abstand zwischen dem Graphen der Funktion und der Asymptote beliebig klein wird, wenn man sich in x-Richtung (positiv oder negativ) oder in y-Richtung (positiv oder negativ) immer weiter vom Ursprung entfernt.
Die Asymptoten einer Funktion helfen uns, den Graphen der Funktion zu skizzieren.
Es gibt drei Arten von Asymptoten:



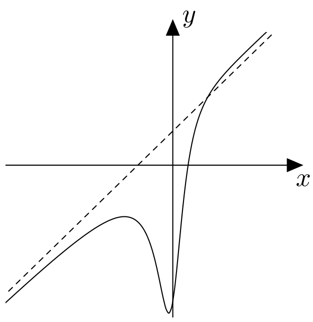
Vertikale (Senkrechte) Asymptoten

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \dots$
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \dots$
- Gleichung der v. As:



Horizontale (waagerechte) Asymptoten

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dots$
- Gleichung der h. As:



Schiefe Asymptoten

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dots$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dots$
- Gleichung der s. As:

3.3.1 Vertikale Asymptoten

Definitionen. Der Graph einer Funktion f besitzt eine **vertikale Asymptote** mit der Gleichung $x = a$, falls:

$$\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty}$$

Um die vertikalen Asymptoten einer rationalen Funktion zu finden, muss man also das Verhalten von f in der Nähe der Polstellen untersuchen. Das heisst, dass man immer die Definitionsmenge bestimmen muss.

Beispiel. Bestimmen Sie die Gleichung(en) der vertikalen Asymptoten folgender Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+4}$

b) $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^3+4x^2+4x}$

Aufgabe 3.6. Bestimmen Sie die Gleichung(en) der vertikalen Asymptoten folgender Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{9}{x^2-9}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x^2-3x-10}$

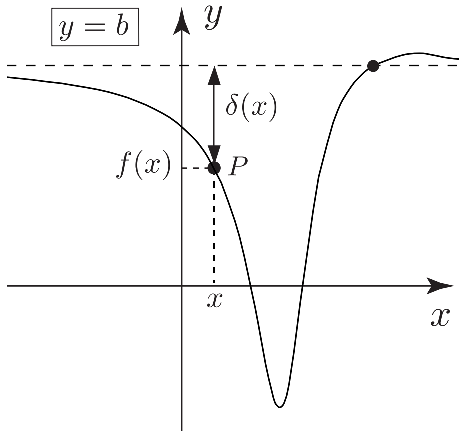
c) $f(x) = \dfrac{2(x+2)^2}{(x-3)(x+1)(x+2)}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^3+x^2+5x+5}$

3.3.2 Horizontale Asymptoten

Definitionen.

• Die Gerade mit der Gleichung $y = b$ heisst horizontale Asymptote des Graphen von f für $x \to -\infty$, bzw. für $x \to +\infty$ wenn gilt: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b}$, bzw. $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b}$



Bemerkungen.

• wenn $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, dann gibt es keine horizontale Asymptote.

• eine Gerade kann auch horizontale Asymptote für $+\infty$ und $-\infty$ sein.

• Eine rationale Funktion $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ besitzt genau dann eine horizontale Asymptote, wenn gilt:

$$\boxed{\mathbf{Grad}(\boldsymbol{p(x)}) \leq \mathbf{Grad}(\boldsymbol{q(x)}).}$$

Bemerkung. Man kann in der Figur oben ablesen, dass gilt:

$$\boxed{f(x) = b + \delta(x) \text{ mit } \lim_{x\to\infty} \delta(x) = 0}$$

Für die Lage der Kurve von f bezüglich ihrer horizontalen Asymptote gilt damit folgendes:

• Ist $\delta(x) > 0$, so befindet sich der Graph von f .... der horizontalen Asymptote.

• Ist $\delta(x) < 0$, so befindet sich der Graph von f .... der horizontalen Asymptote.

• Ist $\delta(x) = 0$ schneidet der Graph von f die horizontale Asymptote.

• Die **Vorzeichentabelle** der Funktion $\delta(x)$ gibt uns die Lage der Kurve von f bezüglich der horizontale Asymptote.

Beispiel. Bestimmen Sie die Gleichung der eventuellen horizontalen Asymptoten folgender Funktionen:

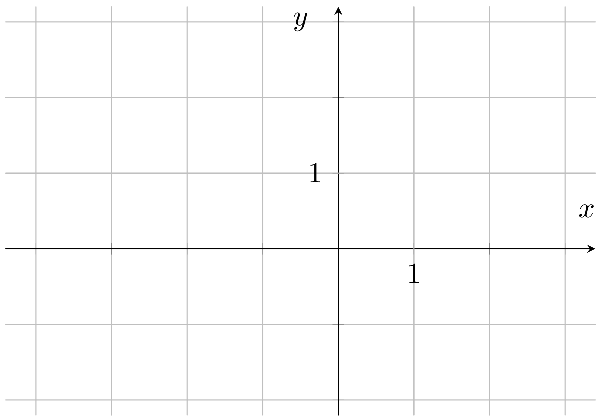
a) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x^2 + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x + 2}{3x^2 + 2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x + 2}$

Beispiel. Sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1}$. Bestimmen Sie:

1. D_f, Nullstellen, Vorzeichentabelle.
2. Die Gleichungen aller Asymptoten.
3. Die Lage der Kurve von f bezüglich aller Asymptoten.
4. Den Graphen von f.



Aufgabe 3.7. Bestimmen Sie die Gleichung der horizontalen Asymptoten folgender Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{9}{x^2 - 9}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{3x^2 - 3x - 10}$

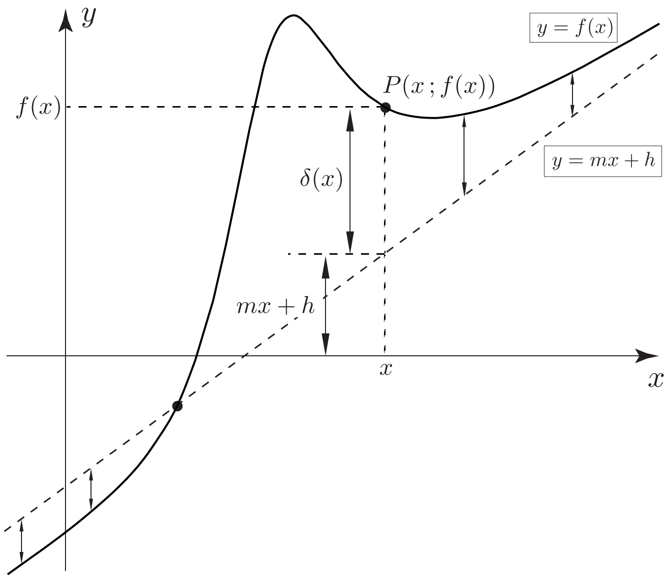
c) $f(x) = \dfrac{(2x+2)^2}{(x-3)(x+1)}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 - 1}$

3.3.3 Schiefe Asymptoten

Definitionen. Man sagt, der Graph einer rationalen Funktion f hat für $x \to -\infty$ (bzw. für $x \to +\infty$)

eine **schiefe Asymptote** mit der Gleichung $y = mx+h$, wenn gilt: $\boxed{\lim_{x\to\infty}(f(x) - (mx+h)) = 0}$



Bemerkungen. Man kann in der Figur oben ablesen, dass gilt:

$$\boxed{f(x) = mx + h + \delta(x) \text{ mit } \lim_{x\to\infty} \delta(x) = 0}$$

Für die Lage der Kurve von f bezüglich ihrer schiefen Asymptote gilt damit folgendes:

• Ist $\delta(x) > 0$, so befindet sich der Graph von f .... der schiefen Asymptote.

• Ist $\delta(x) < 0$, so befindet sich der Graph von f .... der schiefen Asymptote.

• Ist $\delta(x) = 0$ schneidet der Graph von f die schiefe Asymptote.

• Die **Vorzeichentabelle** der Funktion $\delta(x)$ gibt uns die Lage der Kurve von f bezüglich der schiefen Asymptote.

• Eine rationale Funktion $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ besitzt genau dann eine schiefe Asymptote, wenn gilt:

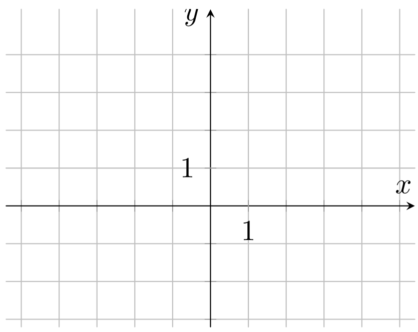
$$\boxed{\mathbf{Grad}(\boldsymbol{p(x)}) = \mathbf{Grad}(\boldsymbol{q(x)}) + \mathbf{1}.}$$

• Um die Gleichung der schiefen Asymptote zu finden, muss man eine **Polynomdivision** durchführen.

Beispiel. Bestimmen Sie die Gleichung der schiefen Asymptote der Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x - 1}{x^2 + 2x}$.

Beispiel. Sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$. Bestimmen Sie:

1. D_f, Nullstellen, Vorzeichentabelle.
2. Die Gleichungen aller Asymptoten.
3. Die Lage der Kurve von f bezüglich aller Asymptoten.
4. Den Graphen von f.



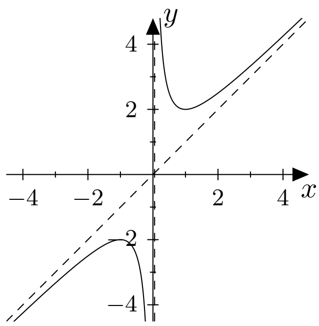
Aufgabe 3.8. Bestimmen Sie die Gleichungen der vertikalen und schiefen Asymptoten folgender Funktionen.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{2x - 1}$ **c)** $f(x) = -2x + 5 + \dfrac{1}{x - 5}$

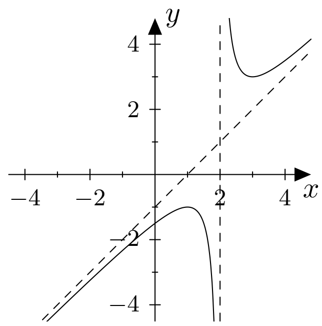
Aufgabe 3.9. Welche Funktion gehört zu welchen Graphen ?

a) $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x - 2}$ **b)** $f(x) = -2x + \dfrac{1}{x + 1}$ **c)** $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

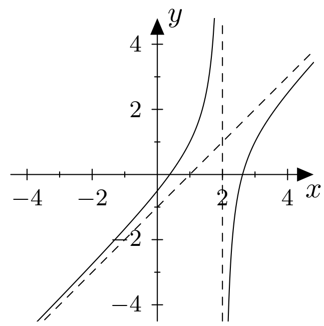
d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ **e)** $f(x) = -x + 1 - \dfrac{1}{x + 1}$ **f)** $f(x) = x - 1 - \dfrac{1}{x - 2}$



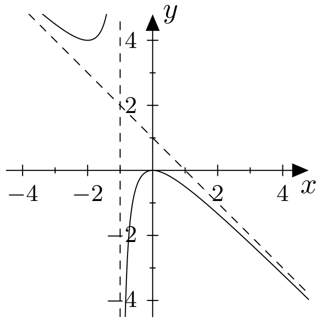
❶



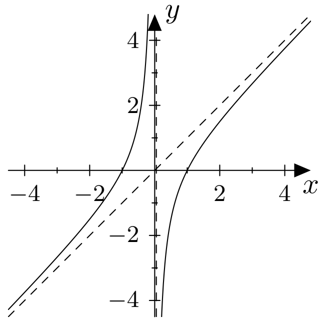
❷



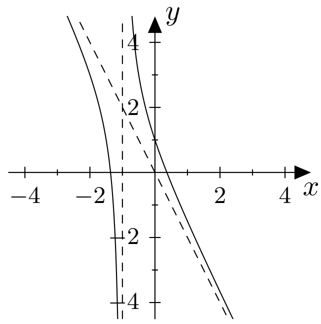
❸



❹



❺



❻

Aufgabe 3.10. Sei die Funktion $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$.

Berechnen Sie die reellen Zahlen a, b und c, so dass die Geraden $x = 3$ und $y = -2$ Asymptoten des Graphen der Funktion f sind. Man weiss ausserdem, dass der Punkt $P(2;0)$ zum Graphen von f gehört.

Aufgabe 3.11. Im Folgenden sind 12 rationale Funktionen gegeben.

$$f_1(x) = \frac{4x^2}{2x^2+1} \qquad f_2(x) = -2x+5+\frac{1}{x+1} \qquad f_3(x) = \frac{2x}{x+1}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x-7} \qquad f_5(x) = \frac{2x}{x-7} \qquad f_6(x) = \frac{1}{(x+1)(x+10)}$$

$$f_7(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad f_8(x) = -2x+5+\frac{1}{x-5} \qquad f_9(x) = 1+\frac{7}{x^2-4}$$

$$f_{10}(x) = 1+\frac{7}{x^2+4} \qquad f_{11}(x) = -2x+5+\frac{1}{x^2+5} \qquad f_{12}(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x+10)}$$

Entscheiden Sie, ohne zu rechnen, welche der oben gegebenen Funktionen durch die folgenden Asymptoten jeweils charakterisiert wird:

	VA	**HA oder SA**
1)	$x = -1$	$y = 0$
2)	$x = -1$ und $x = -10$	$y = 2$
3)	keine	$y = 2$
4)	$x = 7$	$y = 2$
5)	$x = -2$ und $x = 2$	$y = 1$
6)	$x = 5$	$y = -2x + 5$
7)	$x = -1$	$y = 2$
8)	keine	$y = 1$
9)	$x = -1$	$y = -2x + 5$
10)	$x = 7$	$y = 0$
11)	keine	$y = -2x + 5$
12)	$x = -1$ und $x = -10$	$y = 0$

Aufgabe 3.12. Geben Sie eine rationale Funktion an mit:

a) einer einzigen Asymptoten, deren Gleichung $x = 2$ lautet.

b) zwei Asymptoten, deren Gleichungen $x = -3$ und $y = 5$ lauten.

c) zwei Asymptoten, deren Gleichungen $y = x + 2$ und $y = -4$ lauten.

Aufgabe 3.13. Bestimmen Sie, für $n \in \mathbb{N}$, alle Asymptoten der Funktion $f(x) = \dfrac{x^n+3}{x^2-9}$

Aufgabe 3.14. Bestimmen Sie, für die folgenden Funktionen:

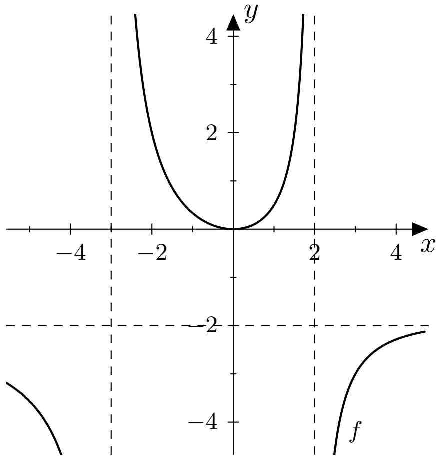
1. D_f, Nullstellen, Vorzeichentabelle.
2. Die Gleichungen aller Asymptoten.
3. Die Lage der Kurve von f bezüglich aller Asymptoten.
4. Den Graphen von f.

a) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{2x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2}{(3x-2)^2}$

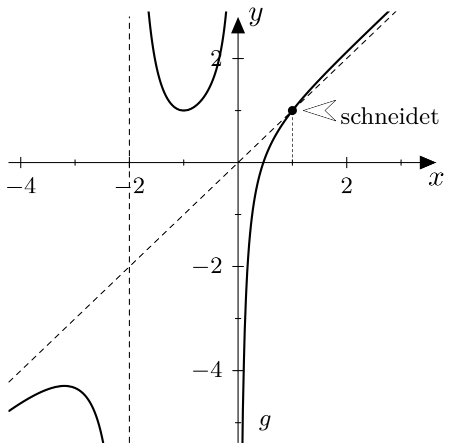
c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 - 5x - 6}$ **f)** $f(x) = \dfrac{3x^2 - 12x - 36}{x^2 + 3x - 28}$

Aufgabe 3.15. Welche Funktion gehört zu den folgenden Graphen ?



a)



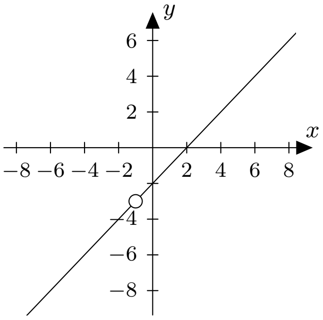
b)

Aufgabe 3.16. Berechnen Sie die Zahlen a, b und c, so dass die Geraden $x = 0$, $x = 2$, $y = 1$ Asymptoten

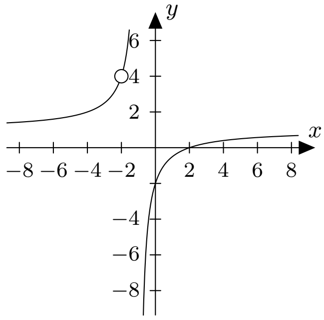
zum Graphen der Funkion $f(x) = \dfrac{ax^2 + 6x + 8}{x^2 + bx + c}$ sind.

Aufgabe 3.17. Für jede Funktion sind zwei Graphen vorhanden. Welcher ist der richtige ? (Rechtfertigen Sie jeweils Ihre Antwort mithilfe von Grenzwerte)

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

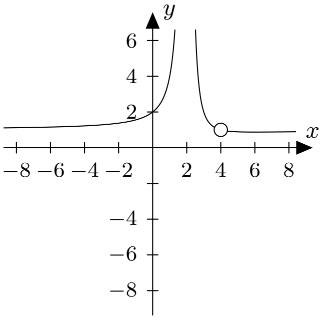


❶

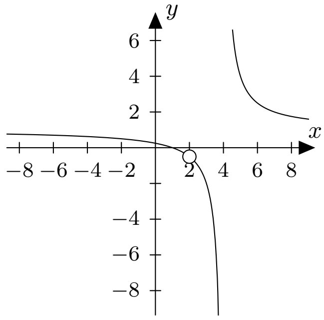


❷

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 8}$

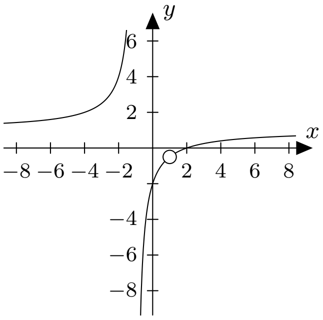


❶

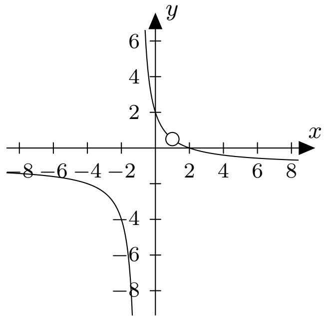


❷

3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$



❶



❷

Bonus: Finden Sie den Funktionsterm der drei übrigen Funktionen.

4 Differentialrechnung

Motivation: Ziel der Kurvendiskussion ist es, die Eigenschaften einer Funktion zu erarbeiten, um damit den Graphen der Funktion möglichst genau skizzieren zu können. Informationen über Definitionsmenge, Nullstellen, Vorzeichen und Asymptoten sind dafür nicht immer ausreichend.

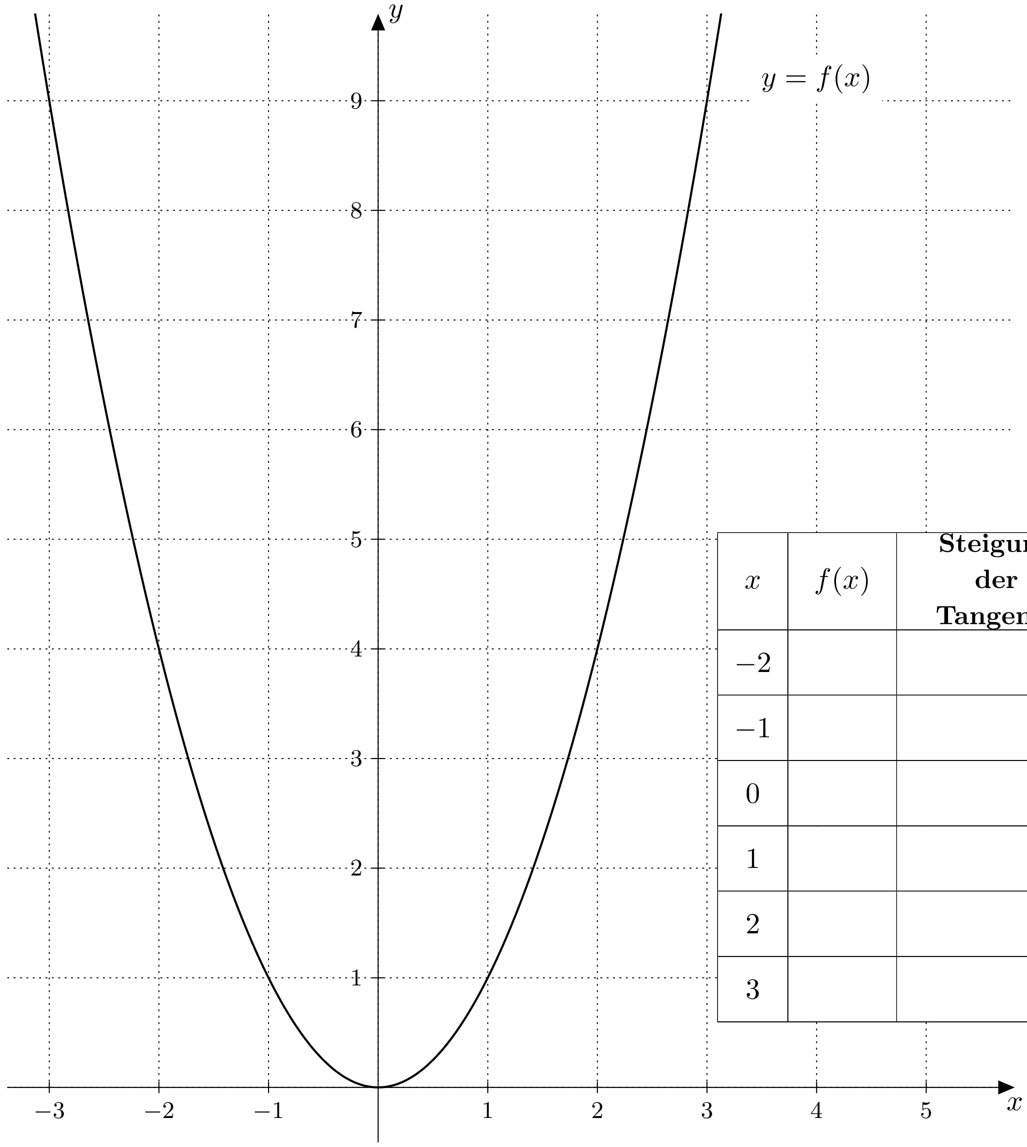
4.1 Steigung der Tangenten an einen Graphen

Die Steigung eines Funktionsgraphen an einer bestimmten Stelle entspricht der Steigung der Tangente an den Graphen an dieser Stelle.

Beispiele.

4.2 1. Methode: Tangentensteigungen graphisch ermitteln

Beispiel. Sei die Funktion $f(x) = x^2$. Zeichnen Sie so genau wie möglich die Tangenten an den Graphen von f an den Stellen $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ und $x = 3$. Ergänzen Sie dann die Tabelle und vergleichen Sie anschliessend die Werte in der zweiten und dritten Spalte.

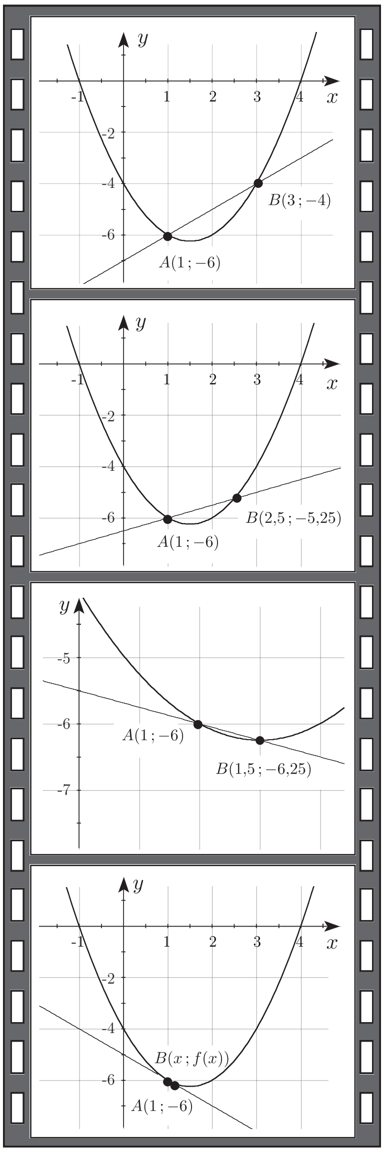


x	$f(x)$	**Steigung der Tangente**
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

Was sind die Vor- und Nachteile dieser Methode ?

4.3 2. Methode: von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung

Beispiel. Hier möchten wir die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 3x - 4$ am Punkt A finden. Wir werden zuerst die Steigung der Sekante AB berechnen. Dann werden wir der Punkt B nach A verschieben, und dank einem Grenzwert können wir dann die Steigung der Tangente berechnen. Hier unten sehen sie den „Film“ dieser Situation:



Rechnerisches Beispiel

Berechnen Sie die Steigung der Tangenten an den Graphen von f im gegebenen Punkt A:

a) $f(x) = x^2$ $\qquad A(2; f(2))$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad A(2; f(2))$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad A(5; f(5))$

Was sind die Vor- und Nachteile dieser Methode ?

Aufgabe 4.1. Berechnen Sie die Steigung der Tangenten an den Graphen von f im gegebenen Punkt A:

a) $f(x) = x^2 - 2x$ $\qquad A(1; f(1))$

b) $f(x) = x^3$ $\qquad A(-2; f(-2))$

c) $f(x) = \sqrt{x+1}$ $\qquad A(2; f(2))$

d) $f(x) = 3x - 5$ $\qquad A(-1; f(-1))$

e) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\qquad A(-1; f(-1))$

4.4 3. Methode: mit Hilfe der Differentialrechnung

Bei der 2. Methode haben wir immer dasselbe berechnen müssen: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Dieser Grenzwert ist einer der fundamentalen Konzepte der Analysis: die **Ableitung**.

Definitionen. Die Ableitung einer Funktion f ist die Funktion f' mit:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

unter der Voraussetzung, dass dieser Grenzwert existiert. Überall, wo dieser Grenzwert existiert, sagt man, dass f in a ableitbar ist.

Bemerkung. Dieser Prozess ermöglicht es, an jeder Stelle des Graphen einer Funktion die Steigung der Tangente zu berechnen. Als Vereinbarung schreibt man am Ende der Grenzwertberechnung $f'(x)$ statt $f'(a)$.

Beispiel. Sei die Funktion $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$. Berechnen Sie:

a) $f'(x)$, $f'(4)$, $f'(-2)$;

b) die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(3; f(3))$;

c) Die Koordinaten des Punktes Q des Graphen von f, wo die Tangente waagerecht ist.

Aufgabe 4.2. Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f(x) = x^2 - 2x$ **b)** $f(x) = 3x$

c) $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = 5$ **f)** $f(x) = \sqrt{x}$

Aufgabe 4.3. Sei die Funktion $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$.

a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f.

b) Berechnen Sie die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(3; f(3))$.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P.

Aufgabe 4.4. Sei die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, die auf $\mathbb{R}_+^*$ definiert ist.

a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f.

b) Berechnen Sie die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1/4; f(1/4))$.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P.

4.5 die Ableitungsregeln

Bis jetzt haben wir die Ableitung dank der Formel

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

berechnet. Mit diesem Verfahren kann man die Ableitung jeder Funktion berechnen, es kann aber schwierig und lang sein. Um die Berechnung der Ableitung zu vereinfachen werden Sie in diesem Abschnitt sieben Ableitungsregeln kennenlernen.

1. Regel (Potenzenregel):	$f(x) = x^k$	$\Rightarrow$	$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$

Beispiel. Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen :

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2. Regel (Konstantenregel): $f(x) = a \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$

Beispiele. Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen :

a) $f(x) = 1$

b) $f(x) = 15'000$

3. Regel (Faktorregel): $f(x) = a \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = a \cdot g'(x)$

Beispiele. Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen :

a) $f(x) = 2x^5$

b) $f(x) = 3x$

c) $f(x) = \dfrac{-5}{x}$

d) $f(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$

Aufgabe 4.5. Bestimmen Sie die Ableitung folgender Funktionen:

a) $f(x) = 3x$ **b)** $f(t) = 7t^6$ **c)** $f(x) = \sqrt{2}x^7$

d) $f(x) = ax^2$ **e)** $f(x) = 3\sqrt{x}$ **f)** $f(x) = x^{3/2}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **h)** $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ **i)** $f(x) = \sqrt[7]{x^2}$

j) $f(x) = 56$ **k)** $f(x) = (m-1)x^2$

Aufgabe 4.6. Bestimmen Sie eine Funktion, deren Ableitung wie folgt lautet:

a) $f'(x) = 3x^2$ **b)** $f'(t) = 7t^8$ **c)** $f'(x) = x^7$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **e)** $f'(x) = 3$ **f)** $f'(x) = \sqrt{x}$

---

4. Regel (Summen-/Differenzregel): $f(x) = u(x) \pm v(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$

Beispiel. Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen :

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 18$

b) $f(x) = x^7 - x^4$

c) $f(x) = x + \dfrac{3}{x}$

Aufgabe 4.7. Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen :

a) $f(x) = 3x + 6$

b) $f(x) = 4x^2 - 2x + 5$

c) $f(x) = 3x^3 - 2x + 5$

d) $f(x) = ax + b$

e) $f(x) = x^2 - \dfrac{3}{x}$

f) $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + 3$

g) $f(x) = \dfrac{3}{x^2} + 3x$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

i) $f(x) = 3x - 2 + \dfrac{1}{3x}$

j) $f(x) = ax^2 + bx + c$

Aufgabe 4.8. Bestimmen Sie eine Funktion, deren Ableitung wie folgt lautet :

a) $f'(x) = x - 2$

b) $f'(x) = 4x^3 + 3x^2$

c) $f'(x) = 3 - \dfrac{1}{x^2}$

d) $f'(x) = x^{3/4}$

---

5. Regel (Produktregel): $f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Beispiel. Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen :

a) $f(x) = (x+1)(3x-5)$

b) $f(x) = (3x^2 - 2)(2x+1)$

c) $f(x) = (6x+7)^2$

6. Regel (Quotientenregel): $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Beispiel. Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen :

a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^2}$

Aufgabe 4.9. Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen :

a) $f(x) = \left(x^2 - 3\right)(4x - 5)$

b) $f(x) = (x + 4)^2$

c) $f(x) = \dfrac{x - 2}{3 - x}$

d) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{4 - x}$

e) $f(x) = \dfrac{x - x^3}{x - 2}$

f) $f(x) = (x - 4)(3x + 2)$

g) $f(x) = \dfrac{(x - 5)(3 - 2x)}{4x + 2}$

h) $f(x) = \left(3x^2 - 7x\right)\left(4x^2 - 5\right)$

---

7. Regel (Kettenregel): $f(x) = (g(x))^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot (g'(x))$

Beispiel. Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen :

a) $f(x) = (2x + 1)^8$

b) $f(x) = (x^2 + 3x - 1)^2$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$

d) $f(x) = \left(\dfrac{1-x}{3x+2}\right)^3$

e) $f(x) = (3x+1)^3(2x-5)^4$

f) $f(x) = \dfrac{(3x+1)^3}{(2x-5)^4}$

Aufgabe 4.10. Bestimmen Sie die Ableitung folgender Funktionen :

a) $f(x) = (2x+4)^5$

b) $f(x) = \left(5x^2-3\right)^{3/2}$

c) $f(x) = \sqrt{8x^2-2x+3}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}}$

e) $f(x) = \left(x^2-1\right)^3$

f) $f(x) = \left(\dfrac{x^2-4}{2x}\right)^2$

g) $f(x) = (2+x)^2(1-x)^3$

h) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

i) $f(x) = \sqrt{(x-3)(x+2)}$

j) $f(x) = \dfrac{(3x-1)^3}{(2x+3)^2}$

Aufgabe 4.11. Bestimmen Sie die Funktionen deren Ableitung wie folgt lautet :

a) $f'(x) = 5\left(x^2-1\right)^4(2x)$

b) $f'(x) = -3(4-x)^2$

c) $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x^3}}$

d) $f'(x) = 2\left(x^2-1\right)(2x)$

Aufgabe 4.12. Bestimmen Sie die Definitionsmenge und die Ableitung folgender Funktionen :

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2-3x+4$

b) $f(x) = (x+5)(x-3)$

c) $f(x) = (4-x)^3$

d) $f(x) = \left(3x^2+5\right)\left(x^2-1\right)$

e) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$

f) $f(x) = (ax+b)(cx+d)$

g) $f(x) = (2x-1)^3(x+2)^2$

h) $f(x) = \dfrac{a}{x}$

i) $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2$

j) $f(x) = \dfrac{x+5}{x-1}$

k) $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$

l) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

m) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

n) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$

o) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

p) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$

4.6 Tangentengleichungen

Beispiel. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an den Graphen von f im Punkt P.

a) $f(x) = x^2$ und $P(3; f(3))$

b) $f(x) = (2x+1)^3$ und $P(-2; f(-2))$

Aufgabe 4.13. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an den Graphen von f im Punkt P.

a) $f(x) = 3x^2 - 6x - 5$ und $P(0; f(0))$

b) $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 10$ und $P(4; f(4))$

c) $f(x) = \dfrac{4x+7}{x+3}$ und $P(2; f(2))$

Aufgabe 4.14. Sei $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Berechnen Sie die Steigungen der Tangenten in den Achsenschnittpunkten.

Aufgabe 4.15. In welchem Punkt des Graphen von $f(x) = x^2$ besitzt die Tangente an den Graphen die Steigung -3 ?

Aufgabe 4.16. Sei die Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$. In welchem Punkt hat die Tangente an den Graphen von f dieselbe Steigung wie die Gerade, die durch die Punkte $A(-3; 2)$ und $B(1; 14)$
verläuft ?

Aufgabe 4.17. In welchem Punkt des Graphen von $f(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$ ist die Tangente an den Graphen waagerecht ?

Aufgabe 4.18. Sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2+a}{x+2}$. Für welchen Wert von a hat die Tangente im Punkt $P(-3; f(-3))$ die Steigung -6 ?

Aufgabe 4.19. In welchem Punkt besitzt der Graph von $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ eine Tangente, deren x- und y-Achsenabschnitt identisch sind ?

Aufgabe 4.20. Sei $f(x) = ax^2 + bx + c$ eine Funktion 2. Grades. Berechnen Sie die Werte von a, b und c falls gilt:

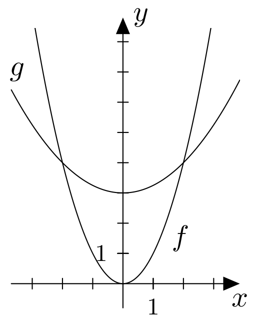
a) $f(0) = 3$, $f(3) = 1$ und $f'(4) = 1$.

b) $f(-1) = 10$, $f(1) = 4$ und $f'(1) = 7$.

Aufgabe 4.21. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3$. In welchen Kurvenpunkten schliesst die Tangente mit der x-Achse den Winkel $\frac{\pi}{4}$ ein ?

4.7 Winkel zwischen den Graphen zweier Funktionen

Beispiel. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + 3$. Unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen von f ung g ?



Aufgabe 4.22. Unter welchem Winkel schneiden sich die Graphen von f und g ?

a) $f(x) = x^2$ $\qquad$ $g(x) = x^3$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ $\qquad$ $g(x) = -x^2 + 10x - 15$

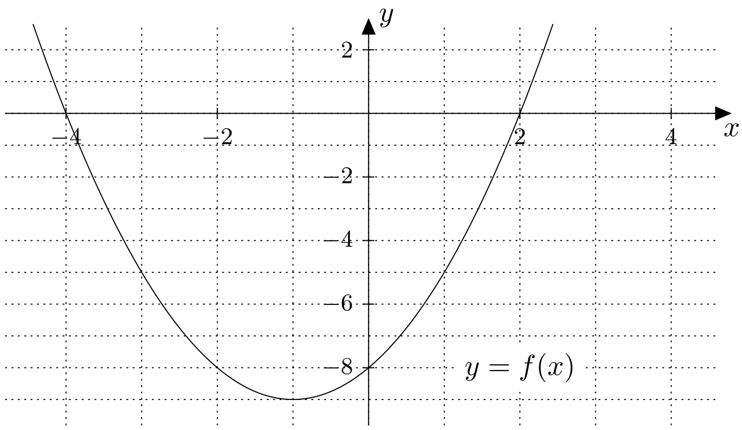
5 Extremwerte und Kurvendiskussion

5.1 Extremstellen

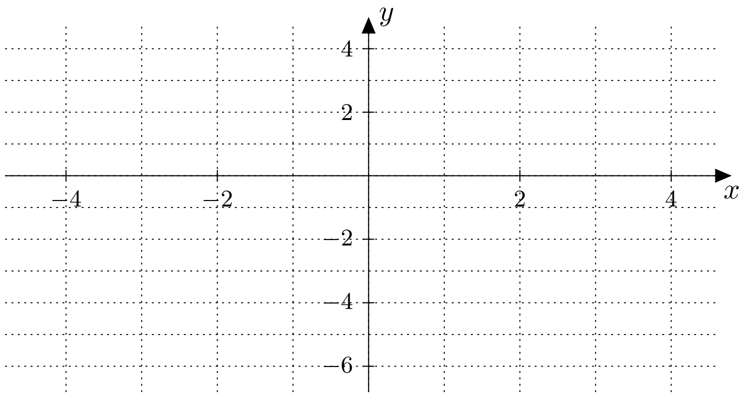
Die Ableitung einer Funktion f in einem Punkt A wurde als die Steigung der Tangente in diesem Punkt definiert. Aber die Ableitung kann uns noch mehr Informationen über den Graphen einer Funktion geben. Das werden wir in den Beispiele hier unten sehen.

Beispiel. Sei die Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 8$.

- Hier ist der Graphen dieser Funktion:



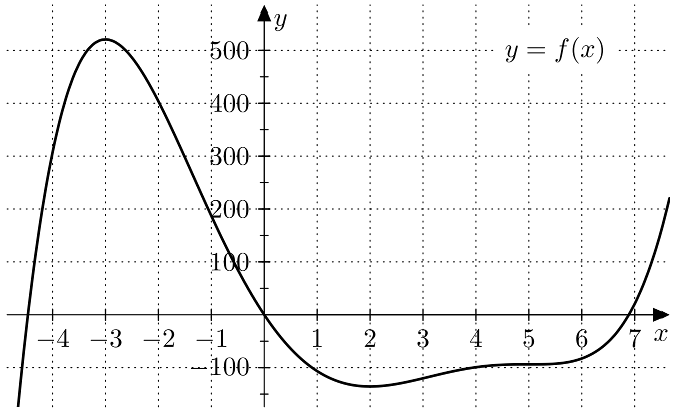
- Bestimmen Sie $f'(x) =$
- Zeichnen Sie f' hierunten:



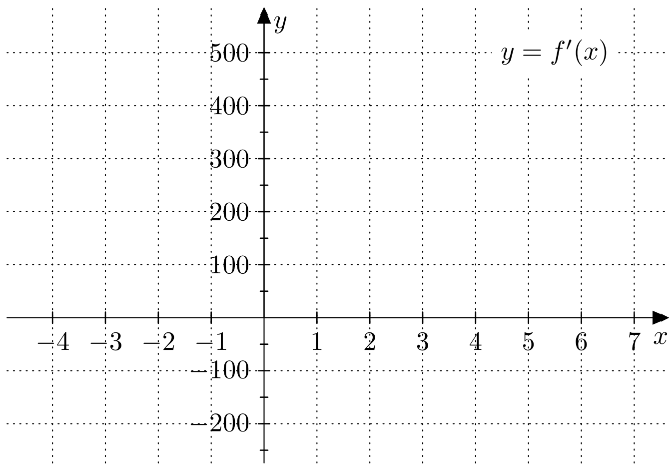
- Was kann man dazu sagen ?

Beispiel. Sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{9x^4}{4} + 3x^3 + \dfrac{85}{2}x^2 - 150x$

- Hier ist der Graphen dieser Funktion:



- Bestimmen Sie $f'(x) =$
- Zeichnen Sie f' hierunten:



- Bestätigt dieses zweite Beispiel Ihre Feststellungen ?

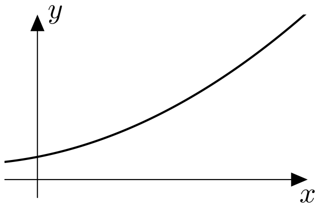
Es gilt also:

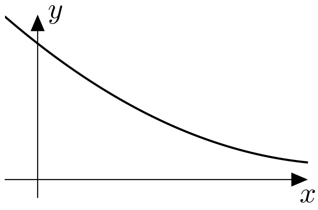
Für jede Zahl a, so dass:

- $f'(a) < 0$ ist die Funktion f .... weil ....
- $f'(a) > 0$ ist die Funktion f .... weil ....
- $f'(a) = 0$ hat die Funktion f ....

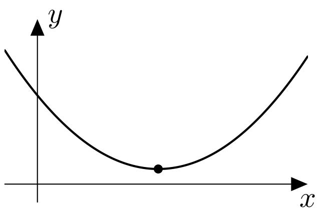
  weil ....

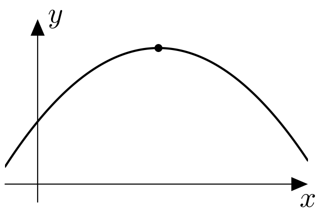
- Eine Funktion f heisst **wachsend** (monoton zunehmend) falls $f(x)$ wächst, wann x wächst.
- Eine Funktion f heisst **fallend** (monoton abnehmend) falls $f(x)$ kleiner wird, wann x wächst.



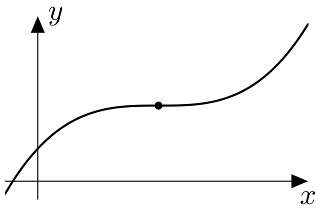


- Der Funktionswert $f(a)$ heisst lokales oder relatives **Maximum** von f, wenn es eine Umgebung von a gibt, sodass für alle Werte x aus der Definitionsmenge in dieser Umgebung gilt: $f(x) \geq f(a)$.
- Der Funktionswert $f(a)$ heisst lokales oder relatives **Minimum** von f, wenn es eine Umgebung von a gibt, sodass für alle Werte x aus der Definitionsmenge in dieser Umgebung gilt: gilt: $f(x) \leq f(a)$.
- Ist der Funktionswert $f(a)$ ein Maximum oder ein Minimum, nennt man ihn auch **Extremwert** und a eine **Extremstelle**. Der Punkt $P(a; f(a))$ des zu f gehörenden Graphen heisst **Extrempunkt**. Im Falle eines Maximums heisst P **Hochpunkt**, und im Falle eines Minimums heisst P **Tiefpunkt**.





- Eine Funktion f hat einen **Sattelpunkt** (oder Terrassenpunkt) in a falls $f'(a) = 0$ aber es weder ein Hochpunkt noch ein Tiefpunkt ist.



- Gilt die Bedingung $f(x) \geq f(a)$ bzw. $f(x) \leq f(a)$ nicht nur innerhalb einer gewissen Umgebung von a, sondern für alle Stellen x der Definitionsmenge, dann nennt man $f(a)$ **globales** oder **absolutes Maximum** bzw. **globales** oder **absolutes Minimum** von f.

Aufgabe 5.1. Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

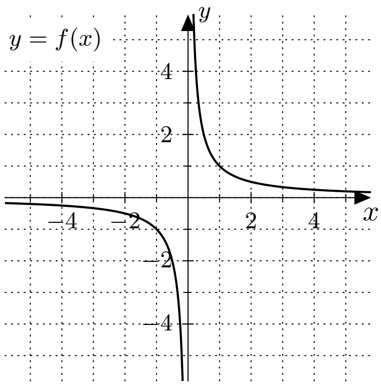
$$f(-1)=0, \quad f(4)=0, \quad f'(4)=0, \quad f'(x)>0 \quad \text{für} \quad x \in]-\infty;2[\cup]4;+\infty[$$

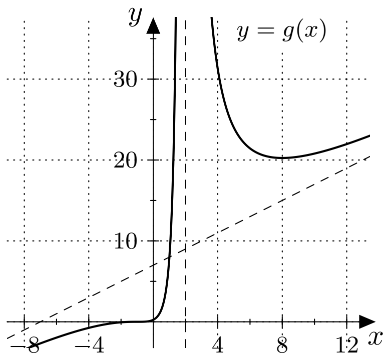
Aufgabe 5.2. Die folgende Funktion ist gegeben :

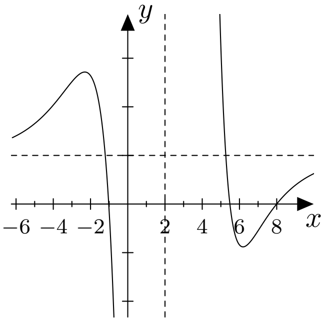
$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^2+d}$$

Man weiss, dass die Geraden $x=3$ und $y=2$ Asymptoten des Graphen von f sind; ferner ist $M(1\,;3)$ ein Extremalpunkt von f. Bestimmen Sie a, b, c und d.

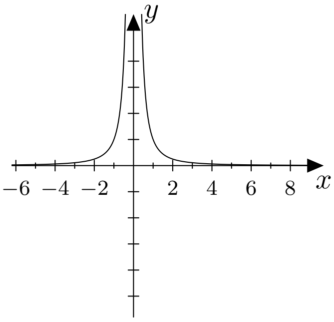
Aufgabe 5.3. Gegeben sind die zwei ersten Graphen, die zwei Funktionen f und g darstellen. Finden Sie bei den sechs anderen Graphen den Graphen der Ableitung von f und g.



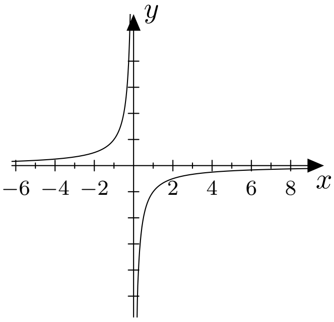




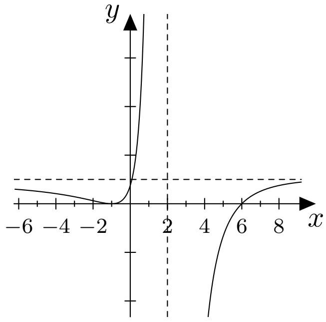
①



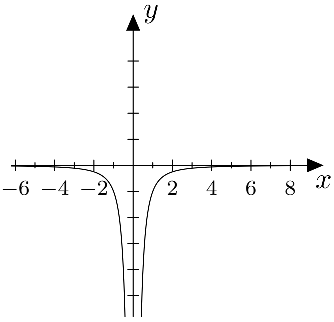
②



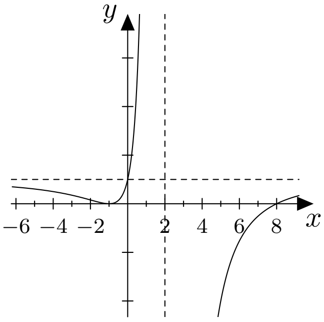
③



④



⑤



⑥

5.2 Monotonie

Wir haben gesehen, dass das Vorzeichen von f' uns zeigen kann, ob der Graphen von f monoton wachsend oder fallend ist, oder ob es eine horizontale Tangente gibt. Es genügt also, eine Vorzeichentabelle von f' zu erstellen, um die Monotonie (das Wachstum) von f zu untersuchen.

Beispiel. Untersuchen Sie die Monotonie folgender Funktionen:
a) $f(x) = -3x^2 + 3x - 7$

b) $f(x) = (x-2)(x+3)^3$

c) $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-3}$

d) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{(x+2)^2}$

Aufgabe 5.4. Untersuchen Sie die Monotonie folgender Funktionen:

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$

b) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 5$

c) $f(x) = (x+2)^3(x-3)^2$

d) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$

e) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Aufgabe 5.5. Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

a) $f(0) = 1 \quad f(2) = 3 \quad f(3) = 1 \quad f'(3) = -9/2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) $y = 0$ ist eine Asymptote, $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$.

x		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

c) $x = 0$, $x = 4$ und $y = 1$ sind Asymptoten, $f(3) = -4$, $f(6) = -1/4$

x		0		4		5		9	
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$-$

x		0		3		4		6	
$f'(x)$	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$

5.3 Kurvendiskussion

Um den Graphen einer Funktion zeichnen und interpretieren zu können, ist es erforderlich, alle seine charakteristischen Punkte und Eigenschaften zu kennen bzw. zu ermitteln. Derartige Untersuchungen von Funktionen nennt man Kurvendiskussion. Für eine Kurvendiskussion gibt es ein genaues Verfahren, das immer respektiert werden muss:

1. Definitionsmenge, Nullstellen, Vorzeichentabelle
2. Asymptoten
3. Ableitung
4. Untersuchung der Monotonie
5. Extremwerte und y-Achsenabschnitt
6. Graph

Beispiel. Führen Sie eine Kurvendiskussion von $f(x) = \dfrac{-x^3}{(x-1)^2}$ durch.

Aufgabe 5.6. Führen Sie eine Kurvendiskussion von f durch.

a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

b) $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x + 4}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3 + 9x}{x^2 + 1}$

f) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x - 4}{x^2}$

g) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(2-x)^2}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x - 7}$

i) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$

j) $f(x) = \dfrac{x^2 + 12x - 15}{x + 1}$

Aufgabe 5.7. Die folgende Funktion ist gegeben :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$$

a) Führen Sie eine Kurvendiskussion von f durch.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an der Stelle $x = 1$ des Graphen $\mathcal{G}$ von f.

c) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte zwischen t und $\mathcal{G}$.

5.4 Extremwertaufgaben

Eine Extremwertaufgabe ist eine Fragestellung, bei der Sie eine Größe unter bestimmten Bedingungen maximieren oder minimieren sollten. Diese Größe hängt dabei von Variablen ab, an welche häufig bestimmte Bedingungen – die sogenannten Nebenbedingungen – geknüpft sind.

Zur Lösung der Extremwertaufgabe wird die Größe als Funktion dieser Variablen beschrieben und deren Extremstellen ermittelt.

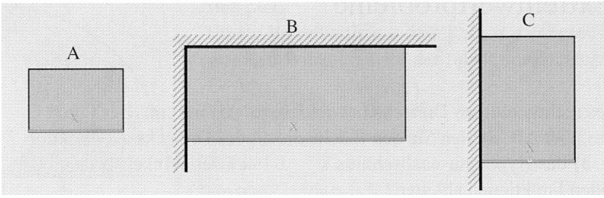
Häufig ist anstelle von Extremwertaufgaben auch die Rede von Optimierungsaufgaben. Ebenso geläufig sind die Bezeichnungen als Extremwertprobleme, Extremalprobleme oder Extremalaufgaben.

Beispiel. Das Produkt zweier reellen Zahlen soll minimal sein. Dazu weiss man, dass die Differenz zwischen den zwei Zahlen 20 ist.

Beispiel. Man betrachtet den Graphen der Funktion $f(x) = -x^2+9$. Zwischen diesem Graphen und der x-Achse soll ein Rechteck so einbeschrieben werden, dass sich zwei Punkte des Rechtecks auf der x-Achse befinden und die anderen beiden auf dem Graphen. Für dieses Rechteck soll die Position der Punkte auf der x-Achse so bestimmt werden, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird.

Beispiel. Eine Streichholzschachtel soll so gebaut werden, dass die Länge drei Mal so groß ist wie die Breite. Wie muss die Höhe gewählt werden, damit bei einer konstanten Oberfläche von $288 cm^2$ das Volumen maximal ist?

Aufgabe 5.8. Mit einem Zaun der Länge 100 m soll ein rechteckiger Hühnerhof mit möglichst grossem Flächeninhalt eingezäunt werden. Man bestimme in den Fällen A, B und C die Breite und die Länge des Hühnerhofes. Wie gross ist jeweils die maximale Fläche ?



Aufgabe 5.9. Für welche beiden positiven Zahlen, deren Produkt 8 ist, wird die Summe am kleinsten ?

Aufgabe 5.10. Der Punkt $P(x\,;y)$ liegt im ersten Quadranten des Koordinatensystems auf der Geraden $3x + 2y = 9$. Das Rechteck mit der Diagonale OP, von dem zwei Seiten auf den Koordinatenachsen liegen, soll maximalen Flächeninhalt haben. Bestimmen Sie die Koordinaten von P.

Aufgabe 5.11. Aus einem Stück Papier der Länge 16 cm und der Breite 10 cm werden an den Ecken Quadrate der Seitenlänge x ausgeschnitten und die überstehenden Teile zu einer oben offenen Schachtel hochgebogen. Für welchen Wert von x wird das Volumen der Schachtel maximal ? Wie gross ist das maximale Volumen ?

Aufgabe 5.12. Ein Wirt kauft einen walliser Wein (Malvoisie...) 16 CHF pro Flasche. Wenn er diesen Wein 30 CHF verkauft, ist er sicher, 200 Flaschen zu verkaufen. Er hat aber bemerkt, dass er für jeden Franken Rabatt 40 zusätzliche Flaschen verkaufen kann. Was ist der günstigste Verkaufspreis ?

Aufgabe 5.13. Jemand möchte einen quaderförmigen Anbau von 4 m^3 Inhalt für seine Geräte und Werkzeuge an seiner Hauswand anbringen. Es muss kein Boden erstellt werden und eine Seitenwand wird durch die Hausmauer gebildet. Eine Wand des Anbaus verläuft in einer Distanz von 1 m parallel zur Hauswand. Die Seitenwände kosten 50 CHF pro m^2 und das Dach kostet 100 CHF pro m^2. Welche Dimensionen hat der Anbau mit dem minimalen Preis ?

Aufgabe 5.14. Wir betrachten, im ersten Quadranten, die Punkte $O(0\,;0), A(x\,;0)$ und $B(x\,;f(x))$ mit $f(x) = \sqrt{9-x}$.

Bestimmen Sie A so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks OAB maximal wird.

Aufgabe 5.15. *Nyon 2007* - Sei $P(x\,;y)$ ein beliebiger Punkt der Parabel $y = x^2 + 1$.

a) Zeigen Sie, dass der Abstand $\delta(x)$ des Punktes P zur Geraden $g : y = \dfrac{3}{4}x - 1$ folgende Form besitzt : $\delta(x) = \dfrac{1}{5}(4x^2 - 3x + 8)$.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes der Parabel, der mit g den kleinsten Abstand bildet.

Aufgabe 5.16. Die Funktion $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 + 9}$ ist gegeben.

Man betrachtet die gleichschenkligen Dreiecke SAB mit $S(0\,;4)$; A und B liegen auf der Kurve symmetrisch bezüglich der y-Achse.
Bestimmen Sie die Ecken A und B so, dass der Flächeninhalt maximal wird.

---

6 Lösungen

Aufgabe 1.1. a) Nein **b)** Ja **c)** Nein/Ja **d)** Nein **e)** Ja **f)** Ja

Aufgabe 1.2. a) $f(3) = 10$ **b)** $f(5) = 12$ **c)** $3 \notin D_f$ **d)** $f(2) = g(2)$
e) $g(x) > 0\ \forall x \in D_g$, oder $g(x) \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in D_g$

Aufgabe 1.3. a) Falsch (z.B: $f(x) = 3$) **b)** Richtig **c)** Falsch **d)** Richtig

Aufgabe 1.4. a) $f(-1) = 3\sqrt{3},\ f(\sqrt{3}) = 3$ **b)** $f(0) = 6,\ f(2) = 0,\ f(3/2) = 3\sqrt{7}/2$

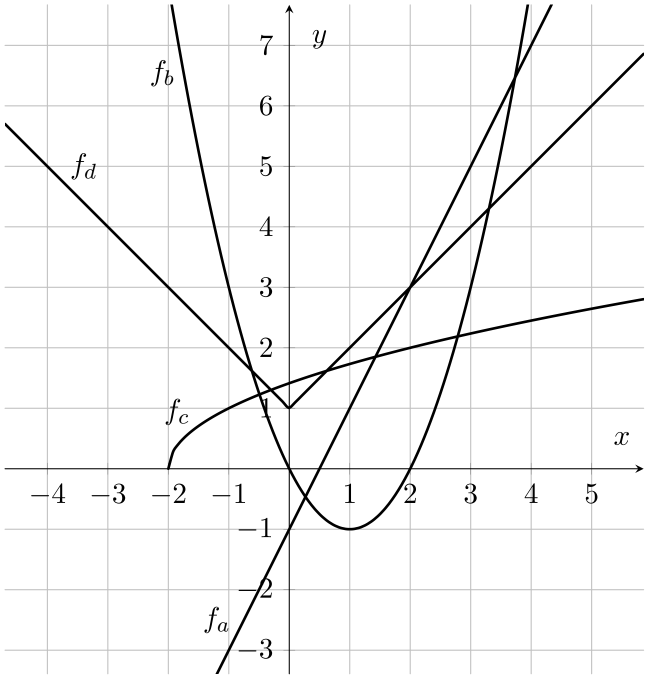
Aufgabe 1.5.

a) $N_f = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

b) $N_f = \{0; 2\}$

c) $N_f = \{-2\}$

d) $N_f = \emptyset$



Aufgabe 1.6.

a) $D_f = \mathbb{R}$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

b) $D_f = \mathbb{R}$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

c) $D_f = \mathbb{R}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d) $D_f = \mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	

e) $D_f =]-\infty; 2]$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0		

f) $D_f =]-\infty; 5[$

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$		

g) $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{7}\right\}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{7}$		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

h) $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}\right\}$

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{29}}{2}$		-4		0		$\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

i) $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 8\}$

x	$-\infty$		-8		-3		-1		5		8		$+\infty$
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

j) $D_f = [-2; 8]$

x	$-\infty$		-2		8		$+\infty$
$f(x)$			0	$+$	0		

k) $D_f =]-\infty; 2[$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$		

l) $D_f = [-3; -1] \cup [5; +\infty[$

x	$-\infty$		-3		-1		5		$+\infty$
$f(x)$			0	$+$	0		0	$+$	

m) $D_f =]-\infty; -3[\cup]0; 3[\cup]7; +\infty[$

x	$-\infty$		-21		-3		0		3		7		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$		$\Vert$	$-$	$\Vert$		$\Vert$	$+$	

n) $D_f = [0; +\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$			0	$+$	

o) $D_f =]-8; -1] \cup [0; 1] \cup]8; +\infty[$

x	$-\infty$		-8		-1		0		1		8		$+\infty$
$f(x)$			$\|\|$	$+$	0		0	$+$	0		$\|\|$	$+$	

Aufgabe 1.7. 1) $180°$ **2)** $-30°$ **3)** $120°$ **4)** $\frac{\pi}{4}$ **5)** $-\frac{2\pi}{3}$ **6)** 4π

7) $\frac{\pi}{12}$ **8)** $\frac{7\pi}{6}$ **9)** $-\frac{3\pi}{2}$

Aufgabe 1.8. Überprüfen Sie Ihre Antworten mit dem Taschenrechner !

Aufgabe 1.9.

a) Ja, alle Winkel der Form: $\alpha_1 = 32° + k \cdot 360°$ und $\alpha_2 = 148° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$

b) Ja, alle Winkel der Form: $\alpha = \pm 32° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$

c) Ja, alle Winkel der Form: $\alpha = 32° + k \cdot 180°$, $k \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 1.10.

a) $\alpha_1 = 60° + k \cdot 360°$, $\alpha_2 = 120° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $\alpha = \pm 120° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $\alpha_1 = -30° + k \cdot 360°$, $\alpha_2 = 210° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$

d) $\alpha = -30° + k \cdot 180°$, $k \in \mathbb{Z}$

e) $\alpha_1 = -22{,}5° + k \cdot 180°$, $\alpha_2 = 112{,}5° + k \cdot 180°$, $k \in \mathbb{Z}$

f) $\alpha = \pm 30° + k \cdot 90°$, $k \in \mathbb{Z}$

g) $S = \emptyset$

h) $\alpha = -32{,}5° + k \cdot 90°$, $k \in \mathbb{Z}$

i) $\alpha_1 = 11{,}25° + k \cdot 90°$, $\alpha_2 = -11{,}25° + k \cdot 90°$, $k \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 2.1.

a) $f(-1)=1,\ f(0)=1$ **b)** $f(2)\cong 1,5$

c) ${}^r f(-2)\cong 2{,}6$, ${}^r f(1)=\{-1;0;2{,}1\}$, ${}^r f(3)=\{-1{,}4;1{,}2\}$

d) $S=\{-1{,}2;0{,}5;1{,}8\}$ **e)** Es gibt eine Lösung.

f) $y\cong 2{,}8$ **g)** $x\cong 2{,}1$

h) $P(1{,}9;1{,}9)$.

Aufgabe 2.2.

a) $N_f=\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{61}}{6}\right\}$ und $N_g=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ **b)** $f(2)=9,\ f(-3)=19$

c) ${}^r g(5)=1$, ${}^r g(-6)=-9/2$ **d)** ${}^r f(5)=\left\{\frac{5}{3};-2\right\}$, ${}^r f(-6)=\emptyset$

e) $g^{-1}([-1;4])=[-2;1/2]$ **f)** $f(A)=\left[-\dfrac{61}{12};+\infty\right[$

Aufgabe 2.3.

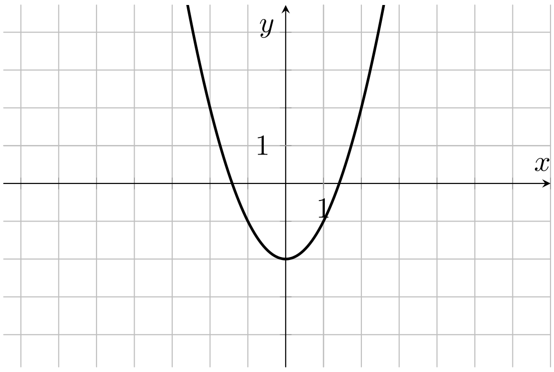
a) $f(4)=1$ **b)** $f(3)$ ist nicht definiert **c)** $4f(x)=\dfrac{4}{x-3}$

d) $f(4x)=\dfrac{1}{4x-3}$ **e)** $f(x+4)=\dfrac{1}{x+1}$ **f)** $f(4)+f(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$

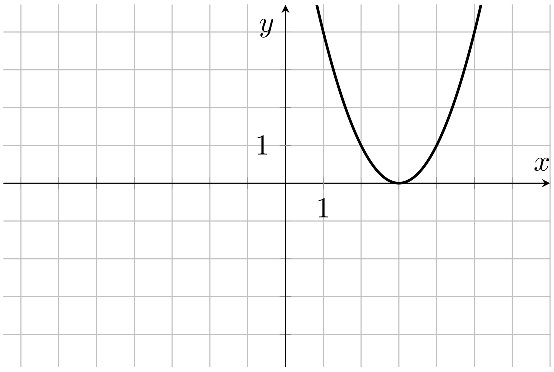
g) $f(-x)=\dfrac{1}{-x-3}$ **h)** $-f(x)=\dfrac{-1}{x-3}$ oder $-f(x)=\dfrac{1}{3-x}$

Aufgabe 2.4.

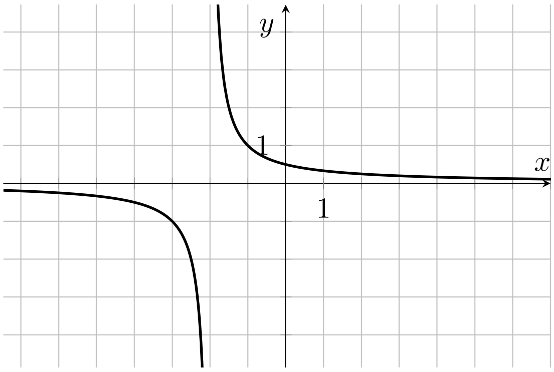
a) $f(x) = x^2 - 2$



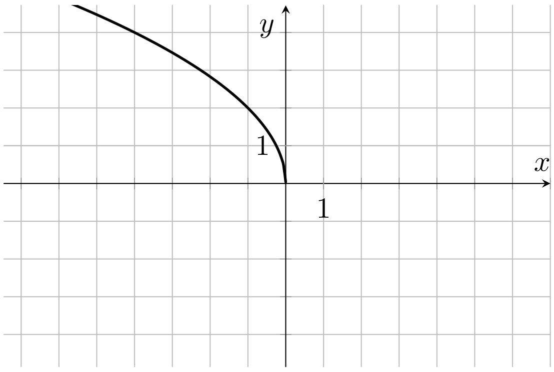
b) $f(x) = (x-3)^2$



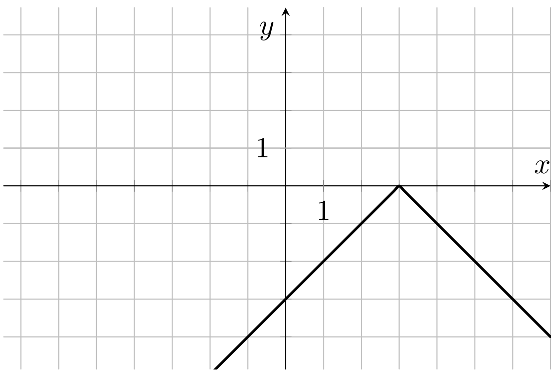
c) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$



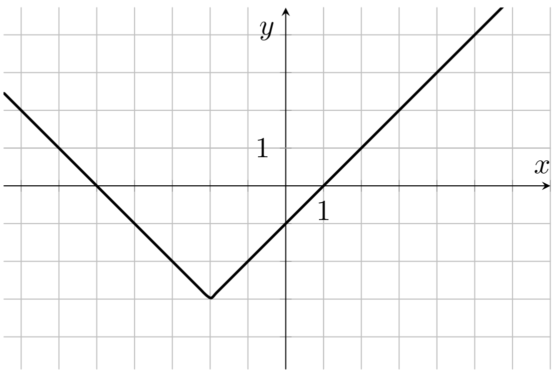
d) $f(x) = 2\sqrt{-x}$



e) $f(x) = -|x-3|$

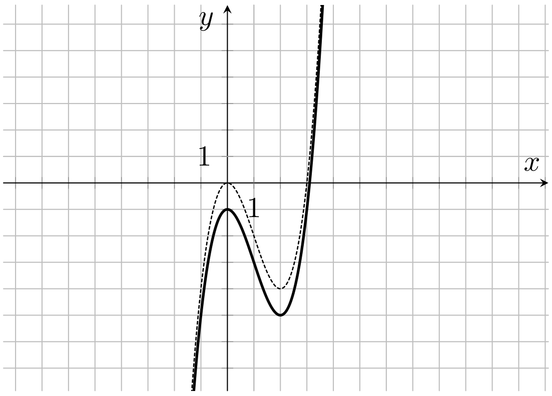


f) $f(x) = |x+2| - 3$

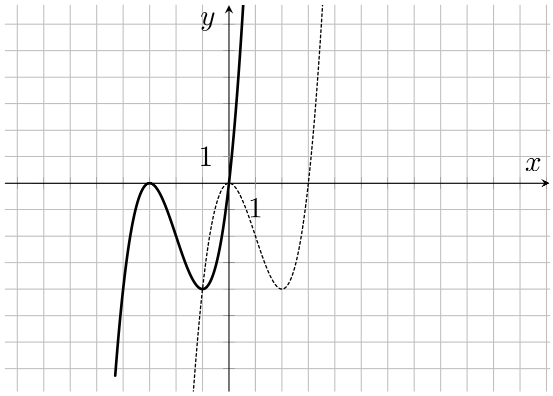


Aufgabe 2.5.

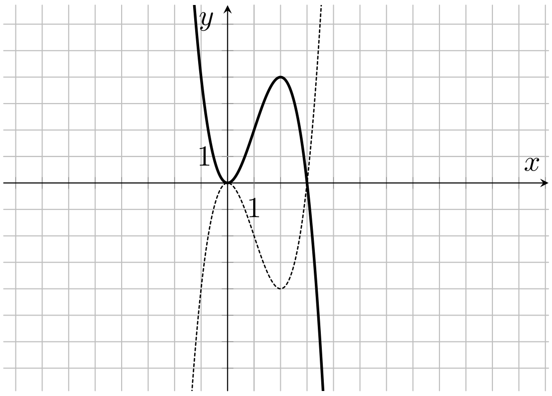
a) $g(x) = f(x) - 1$



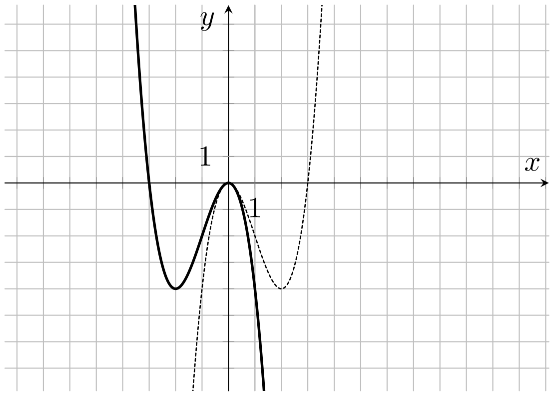
b) $g(x) = f(x + 3)$



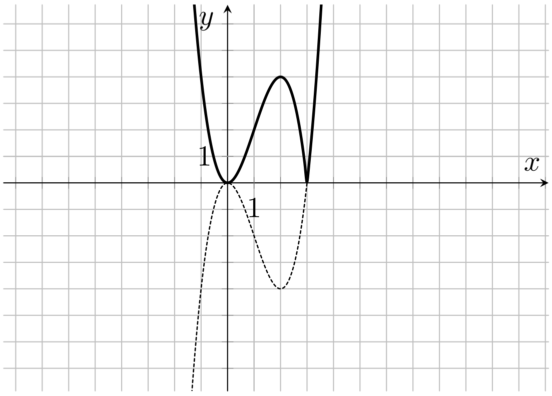
c) $g(x) = -f(x)$



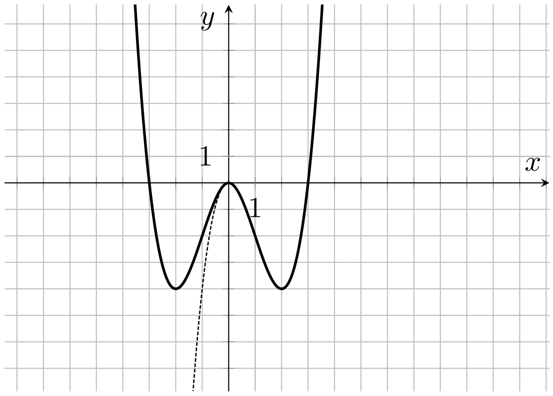
d) $g(x) = f(-x)$



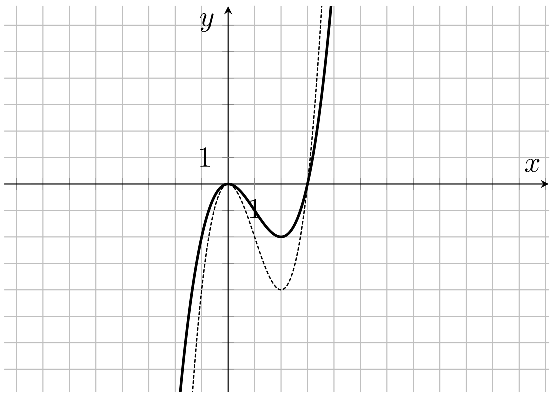
e) $g(x) = |f(x)|$



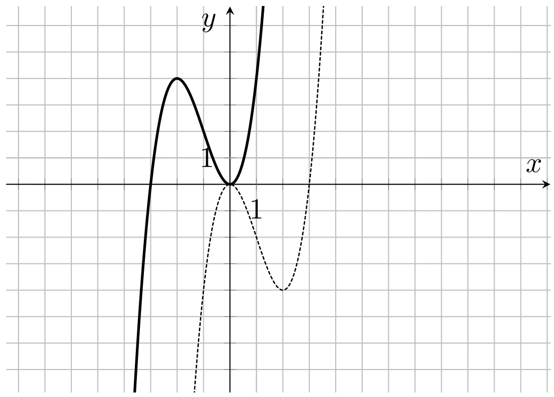
f) $g(x) = f(|x|)$



g) $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$



h) $g(x) = -f(-x)$



Aufgabe 2.6.

a) $(f+g)(x) = \dfrac{3x^2+6x+1}{x+2}$ $\quad (f-g)(x) = \dfrac{3x^2+6x-1}{x+2}$ $\quad (f\cdot g)(x) = \dfrac{3x}{x+2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 3x^2+6x$ $\quad D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f\cdot g} = D_{f/g} = \mathbb{R} - \{-2\}$

b) $(f+g)(x) = \dfrac{3x^2+6x}{(x-4)(x+5)}$ $\quad (f-g)(x) = \dfrac{x^2+14x}{(x-4)(x+5)}$ $\quad (f\cdot g)(x) = \dfrac{2x^2}{(x-4)(x+5)}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{2x+10}{x-4}$ $\quad D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f\cdot g} = \mathbb{R} - \{4;-5\}$, $D_{f/g} = \mathbb{R} - \{4;-5;0\}$

Aufgabe 2.7.

a) $f(g(x)) = 6x-3$ **b)** $g(f(x)) = 6x-1$ **c)** $f(f(x)) = 9x$

d) $f(g(h(x))) = 6x^2-3$ **e)** $g(f(h(x))) = 6x^2-1$ **f)** $4x^4-4x^2+1$ oder $(2x^2-1)^2$

Aufgabe 2.8.

a) $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = 3x+1$ **b)** $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = 2x+3$ **c)** $g(x) = x^2$, $h(x) = x+3$

d) $g(x) = \log(x)$, $h(x) = x^2+4$ **e)** $g(x) = 3^x$, $h(x) = 2x$ **f)** $g(x) = \frac{x+2}{x+1}$, $h(x) = \sqrt{x}$

Aufgabe 2.9. **a)** Ja **b)** Nein **c)** Ja **d)** Ja

Aufgabe 2.10.

a) ${}^rf_1(x) = x$, ${}^rf_2(x) = \dfrac{1}{3}x$ **b)** ${}^rf_3(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$, ${}^rf_3(x) = \dfrac{1}{x}$

c) ${}^rf_5(x) = \sqrt{x}$, ${}^rf_6(x) = -\sqrt{x}$ **d)** ${}^rf_7(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$, ${}^rf_8(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Aufgabe 3.1.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ist nicht definiert
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ist nicht definiert.
3. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$ ist nicht definiert, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$
4. $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 1$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Aufgabe 3.2.

a) $D_f = \mathbb{R} - \{-8; -6; -4; 3; 7\}$

b) $N_f = \{-5; -3; -1; 6\}$

c)

a	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	Begriffe
$-\infty$			2	H. As: $y = 2$
-8	0	0	0	Loch in $L(-8; 0)$
-6	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	V. As: $x = -6$
-4	1	1	1	Loch in $L(-4; 1)$
-2	-2	-2	-2	
0	4	4	4	y-Achsenabschnitt
3	5	2	nicht definiert	Sprung
7	$-\infty$	$+\infty$	nicht definiert	V. As: $x = 7$
$+\infty$			3	H. As: $y = 3$

Aufgabe 3.3.

	D_f	Grenzwert	Graphische Interpretation
a)	$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$	-$\frac{4}{9}$	
b)	$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$	-2	Loch in $L(-1;-2)$
c)	$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$	nicht def.	Vert. As. $x = 3$
d)	$D_f = \mathbb{R} - \{-4;-5\}$	$\frac{5}{18}$	
e)	$D_f = \mathbb{R} - \{0;2\}$	$\frac{35}{2}$	Loch in $L(2;35/2)$
f)	$D_f = \mathbb{R}^+ - \{4\}$	$\frac{1}{4}$	Loch in $L(4;1/4)$
g)	$D_f = \mathbb{R} - \{1;5\}$	$+\infty$	Vert. As. $x = 5$
h)	$D_f = \mathbb{R} - \{-3;-1\}$	nicht def.	Vert. As. $x = -1$
i)	$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$	$\frac{96}{121}$	
j)	$D_f = \left[\frac{1}{2};+\infty\right] - \{5\}$	3	Loch in $L(5;3)$
k)	$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$	$-\infty$	Vert. As. $x = -3$
l)	$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$	nicht def.	Vert. As. $x = -2$
m)	$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$	nicht def.	Vert. As. $x = 0$
n)	$D_f = [-1;+\infty[-\left\{\frac{5}{3}\right\}$	$-\frac{1}{5}$	
o)	$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$	$-\infty$	Vert. As. $x = -1$

Aufgabe 3.4.

a) $D_f = \mathbb{R} - \{1;2\}$, Grenzwert: -1

b) $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$, Grenzwert: $-\infty$

Aufgabe 3.5.

a) $+\infty$ **b)** 0 **c)** $\frac{1}{6}$ **d)** $-\infty$ **e)** 1 **f)** $+\infty$

Aufgabe 3.6.

a) V.As: $x = 3$, $x = -3$

b) V.As: $x = 5$, $x = -2$

c) V.As: $x = 3$, $x = -1$

d) V.As: $x = -1$

Aufgabe 3.7.

a) H.As: $y = 0$

b) H.As: $y = \dfrac{1}{3}$

c) H.As: $y = 4$

d) H.As: keine

Aufgabe 3.8.

a) V.As: $x = 0$, S.As: $y = x$

b) V.As: $x = \frac{1}{2}$, S.As: $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

c) V.As: $x = 5$, S.As: $y = -2x + 5$

Aufgabe 3.9.

a) 2 **b)** 6 **c)** 5 **d)** 1 **e)** 4 **f)** 3

Aufgabe 3.10.

$a = -2$, $b = 4$, $c = -3$

Aufgabe 3.11.

$f_1(x) : n°3$	$f_2(x) : n°9$	$f_3(x) : n°7$	$f_4(x) : n°10$
$f_5(x) : n°4$	$f_6(x) : n°12$	$f_7(x) : n°1$	$f_8(x) : n°6$
$f_9(x) : n°5$	$f_{10}(x) : n°8$	$f_{11}(x) : n°11$	$f_{12}(x) : n°2$

Aufgabe 3.12.

a) z.B. $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$ (Achtung: $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ oder $f(x) = \frac{x}{x-2}$ hätte auch eine S.As. oder H.As. !)

b) z.B. $f(x) = \frac{5x+2}{x+3}$

c) Das ist nicht möglich (entweder HA oder SA)

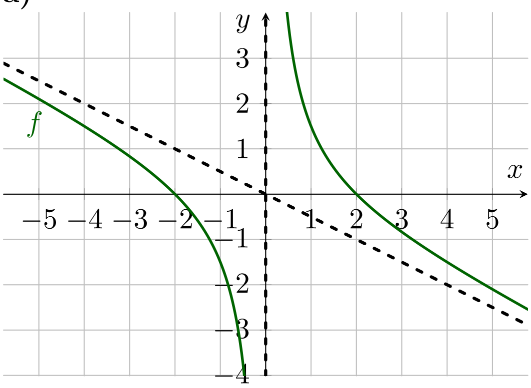
Aufgabe 3.13.

n	$f_n(x)$	VA	HA	SA
0	$f_1(x) = \frac{4}{x^2-9}$	$x = 3$ und $x = -3$	$y = 0$	keine
1	$f_1(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$	$x = 3$	$y = 0$	keine
2	$f_1(x) = \frac{x^2+3}{x^2-9}$	$x = 3$ und $x = -3$	$y = 1$	keine
3	$f_1(x) = \frac{x^3+3}{x^2-9}$	$x = 3$ und $x = -3$	keine	$y = x$
≥ 4	$f_4(x) = \frac{x^4+3}{x^2-9}$	$x = 3$ und $x = -3$	keine	keine

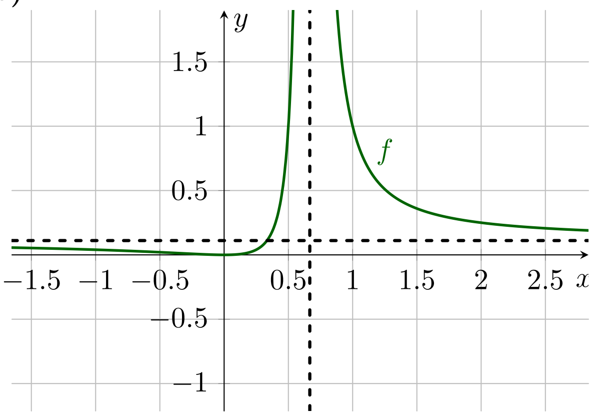
Aufgabe 3.14.

a)	$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$	$N_f = \{\pm 2\}$	$VA : x = 0$	$SA : y = -\frac{1}{2}x$
b)	$D_f = \mathbb{R} - \{2/3\}$	$N_f = \{0\}$	$VA : x = \frac{2}{3}$	$HA : y = \frac{1}{9}$
c)	$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$	$N_f = \{\pm 1\}$	$VA : x = 0$	$HA : y = 0$
d)	$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$	$N_f = \{-1\}$	$VA : x = 1$	$SA : y = x + 5$

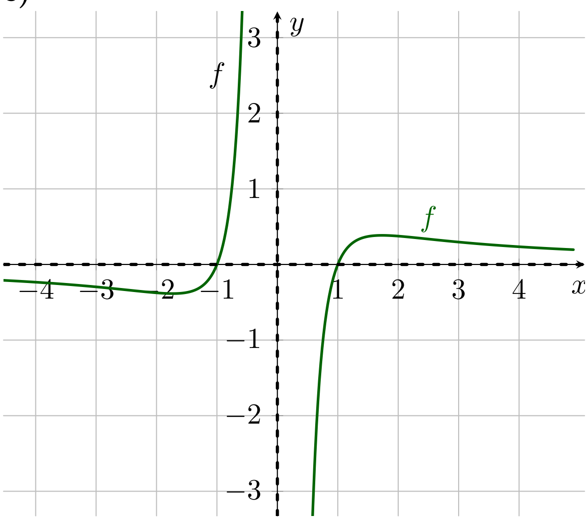
a)



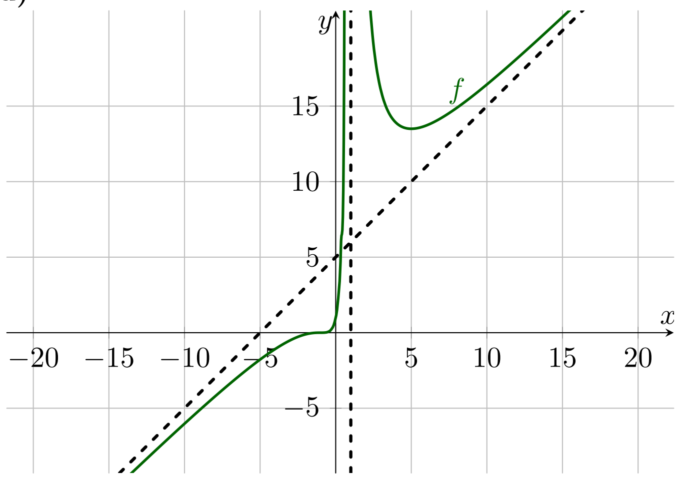
b)



c)



d)



Für die Fragen **e)** und **f)** können Sie Ihre Antworten mit Geogebra korrigieren !

Aufgabe 3.15.

a) $f(x) = \dfrac{-2x^2}{(x+3)(x-2)}$ **b)** $f(x) = x + \dfrac{x-1}{x(x+2)} = \dfrac{x^3+2x^2+x-1}{x(x+2)}$

Aufgabe 3.16.

$a = 1$, $b = -2$, $c = 0$

Aufgabe 3.17.

$1 : n°1$ $2 : n°2$ $3 : n°1$

Aufgabe 4.1.

a) $m = 0$ **b)** $m = 12$ **c)** $m = \frac{\sqrt{3}}{6}$ **d)** $m = 3$ **e)** $m = -2$

Aufgabe 4.2.

a) $f'(x) = 2x - 2$ **b)** $f'(x) = 3$ **c)** $f'(x) = -2x + 4$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **e)** $f'(x) = 0$ **f)** $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Aufgabe 4.3.

a) $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$ **b)** $m = f'(3) = -1/3$ **c)** $t : y = -\dfrac{1}{3}x + 4$

Aufgabe 4.4.

a) $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$ oder $f'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

b) $m = f'(1/4) = -4$

c) $t : y = -4x + 3$

Aufgabe 4.5.

a) $f'(x) = 3$ **b)** $f'(t) = 42t^5$ **c)** $f'(x) = 7\sqrt{2}x^6$

d) $f'(x) = 2ax$ **e)** $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$ **f)** $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

g) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **h)** $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ **i)** $f'(x) = \dfrac{2}{7\sqrt[7]{x^5}}$

j) $f'(x) = 0$ **k)** $f'(x) = 2(m-1)x$

Aufgabe 4.6. Zum Beispiel:

a) $f(x) = x^3$ **b)** $f(t) = \dfrac{7}{9}t^9$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{8}x^8$

d) $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ **e)** $f'(x) = 3x$ **f)** $f'(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$

Aufgabe 4.7.

a) $f'(x) = 3$ **b)** $f'(x) = 8x - 2$ **c)** $f'(x) = 9x^2 - 2$

d) $f'(x) = a$ **e)** $f'(x) = 2x + \dfrac{3}{x^2}$ **f)** $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

g) $f'(x) = -\dfrac{6}{x^3} + 3$ **h)** $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$ **i)** $f'(x) = 3 - \dfrac{1}{3x^2}$

j) $f'(x) = 2ax + b$

Aufgabe 4.8. Zum Beispiel:

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x$

b) $f'(x) = x^4 + x^3$

c) $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{4}{7}x^{7/4} = \dfrac{4}{7}\sqrt[4]{x^7}$

Aufgabe 4.9.

a) $f'(x) = 2(2x-3)(3x+2)$

b) $f'(x) = 2(x+4)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{(3-x)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{11}{(4-x)^2}$

e) $f(x) = \dfrac{-2(x^3-3x^2+1)}{(x-2)^2}$

f) $f(x) = 2(3x-5)$

g) $f(x) = \dfrac{-2(4x^2+4x-43)}{(4x+2)^2}$

h) $f(x) = 48x^3 - 84x^2 - 30x + 35$

Aufgabe 4.10.

a) $f'(x) = 10(2x+4)^4$

b) $f'(x) = 15x\sqrt{5x^2-3}$

c) $f'(x) = \dfrac{8x-1}{\sqrt{8x^2-2x+3}}$

d) $f'(x) = \dfrac{5}{2(x+1)^2}\sqrt{\dfrac{x+1}{3x-2}}$

e) $f'(x) = 6x(x^2-1)^2$

f) $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)}{2x^3}$

g) $f'(x) = -(x-1)^2(x+2)(5x+4)$

h) $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$

i) $f'(x) = \dfrac{2x-1}{2\sqrt{(x-3)(x+2)}}$

j) $f'(x) = \dfrac{(3x-1)^2(6x+31)}{(2x+3)^3}$

Aufgabe 4.11. Zum Beispiel:

a) $f(x) = \left(x^2-1\right)^5$

b) $f(x) = (4-x)^3$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \left(x^2-1\right)^2$

Aufgabe 4.12.

a) $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = x - 3$

b) $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 2(x+1)$

c) $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = -3(4-x)^2$

d) $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x\left(3x^2+1\right)$

e) $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3(x+1)(x-1)$

f) $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 2acx + ad + bc$

g) $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 10(2x-1)^2(x+1)(x+2)$

h) $D_f = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\dfrac{a}{x^2}$

i) $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, $f'(x) = \dfrac{6(x-2)}{(x+1)^3}$

j) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, $f'(x) = \dfrac{-6}{(x-1)^2}$

k) $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, $f'(x) = \dfrac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$

l) $D_f = \mathbb{R} - \{-d/c\}$, $f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

m) $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

n) $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

o) $D_f = \mathbb{R}_+ - \{1\}$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$

p) $D_f = \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

Aufgabe 4.13.

a) $t : y = -6x - 5$ **b)** $t : y = \dfrac{33}{4}x - 25$ **c)** $t : y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{13}{5}$

Aufgabe 4.14.

$m_H = 0$ $m_A = -12$ $m_B = 6$ $m_C = -6$ $m_D = 12$

Aufgabe 4.15.

Im Punkt $P(-3/2; 9/4)$

Aufgabe 4.16.

Im Punkt $P_1(2; -4)$ und $P_2(-4/3; 122/27)$

Aufgabe 4.17.

In den Punkten $P_1(3; 1/6)$ und $P_2(-3; -1/6)$

Aufgabe 4.18. Für $a = 3$

Aufgabe 4.19. In den Punkten $P_1(0; 0)$ und $P_2(2; 2)$

Aufgabe 4.20.

a) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{5}{3}x + 3$ **b)** $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$

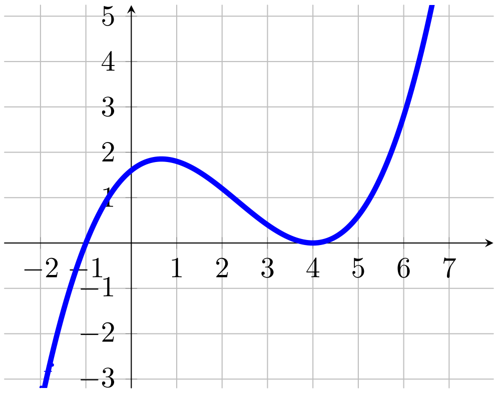
Aufgabe 4.21. In den Punkten $P_1(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{9})$ und $P_2(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{9})$

Aufgabe 4.22.

a) $0°$ im Punkt $P(0;0)$ und $8,13°$ im Punkt $Q(1;1)$

b) $35,54°$ im Punkt $P(2;1)$ und $45°$ im Punkt $Q(6;9)$

Aufgabe 5.1.



Aufgabe 5.2. $a = 2$, $b = 2$, $c = -28$, $d = -9$

Aufgabe 5.3. $f : 5$ und $g : 6$

Aufgabe 5.4.

a) $f'(x) = 2(3x - 1)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Min$(1/3; 11/3)$

b) $f'(x) = 6(x + 1)(x - 4)$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Max$(-1; 18)$, Min$(4; -107)$

c) $f'(x) = 5(x+2)^2(x-3)(x-1)$

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Sattelpunkt$(-2;0)$, Max$(1;108)$, Min$(3;0)$

d) $f'(x) = \dfrac{13}{(x+5)^2}$

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	V. As.	$\nearrow$	

e) $f'(x) = \dfrac{(x+5)(x-1)}{(x+2)^2}$

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	V. As.	$\searrow$	min	$\nearrow$	

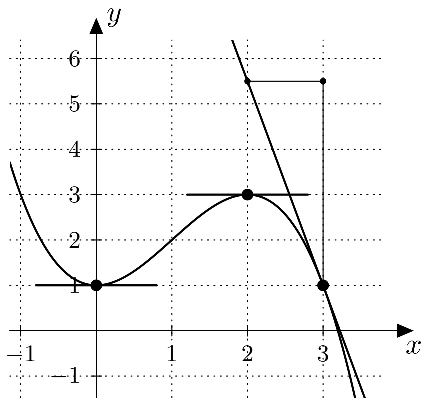
Max$(-5;-12)$, Min$(1;0)$

f) $f'(x) = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$

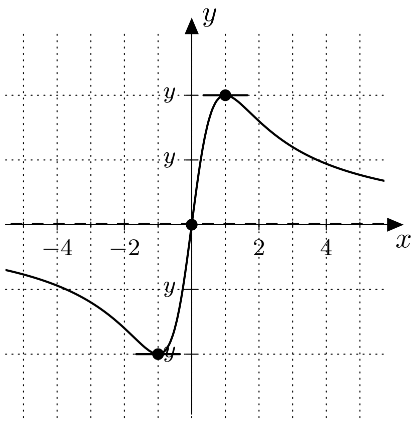
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	

Min$(-1;-1/2)$, Min$(1;1/2)$

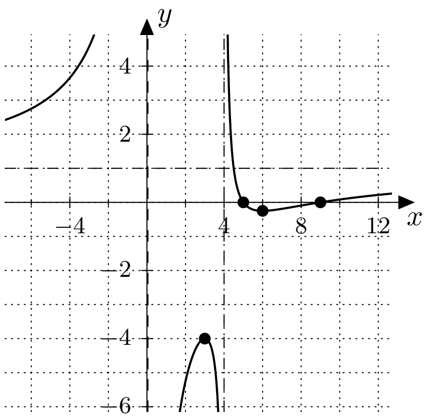
Aufgabe 5.5.



a)



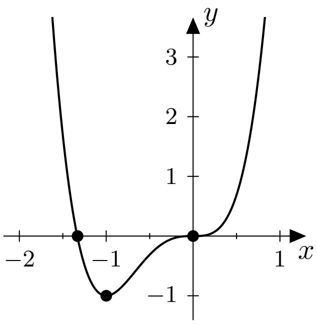
b)



c)

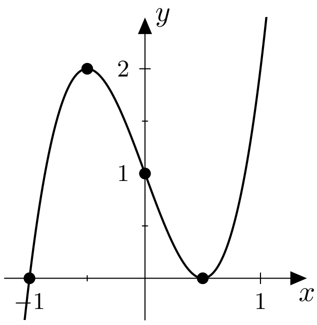
Aufgabe 5.6.

a)



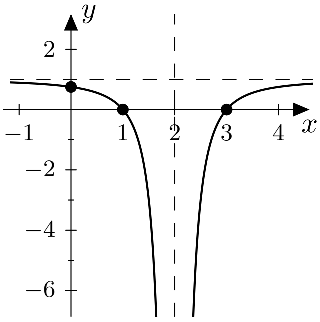
- $D_f = \mathbb{R}$
- Nullstellen; $x = -4/3$ und $x = 0$
- $f'(x) = 12x^3 + 12x^2$
- Min (-1 ; -1)
- S (0 ; 0)
- y-Achsenabschnitt $y = 0$

b)



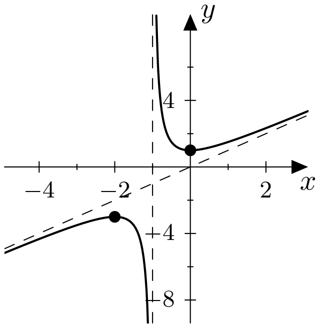
- $D_f = \mathbb{R}$
- Nullstellen: $x = -1$ und $x = 1/2$
- $f'(x) = 12x^2 - 3$
- Max (-1/2 ; 2)
- Min (1/2 ; 0)
- y-Achsenabschnitt: $y = 1$

c)



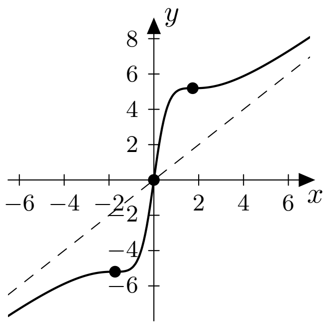
- $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$
- Nullstellen: $x = 1$ und $x = 3$
- V.As: $x = 2$, H.As: $y = 1$
- $\delta(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$
- $f'(x) = \dfrac{2}{(x-2)^3}$
- y-Achsenabschnitt: $y = 3/4$

d)



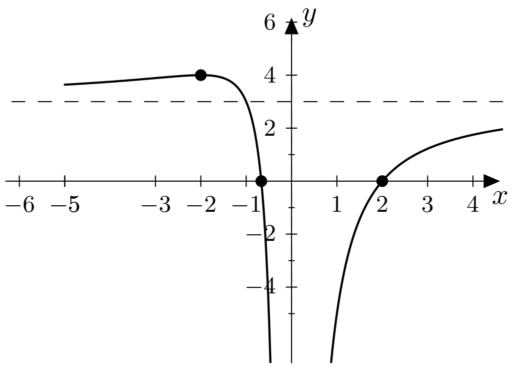
- $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$
- V.As $x = -1$, S.As: $y = x$
- $\delta(x) = \dfrac{1}{x+1}$
- $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$
- Min $(0\,;1)$, Max $(-2\,;-3)$
- y-Achsenabschnitt: $y = 1$

e)



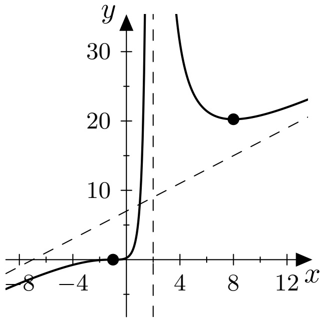
- $D_f = \mathbb{R}$
- Nullstelle: $x = 0$
- S.As: $y = x$
- $\delta(x) = \dfrac{8x}{x^2+1}$
- $f'(x) = \dfrac{(x^2-3)^2}{(x^2+1)^2}$
- $S_1(-\sqrt{3}\,; -3\sqrt{3})$
- $S_2(\sqrt{3}\,; 3\sqrt{3})$
- y-Achsenabschnitt: $y = 0$

f)



- $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$
- Nullstellen: $x = 2$ und $x = -2/3$
- V.As: $x = 0$, H.As: $y = 3$
- $\delta(x) = \dfrac{-4x-4}{x^2}$
- $f'(x) = \dfrac{4x+8}{x^3}$
- Max $(-2\,; 4)$
- y-Achsenabschnitt: nicht definiert

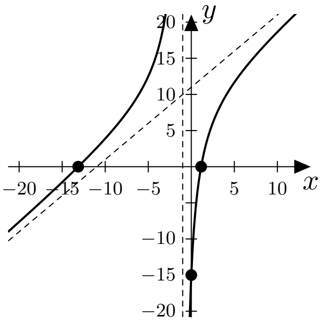
g)



- $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$
- Nullstelle: $x = -1$
- V.As: $x = 2$, S.As: $y = x + 7$
- $\delta(x) = \dfrac{27(x-1)}{(2-x)^2}$
- $f'(x) = \dfrac{(-x+8)(x+1)^2}{(2-x)^3}$
- S $(-1\,; 0)$, Min $(8\,; 81/4)$
- y-Achsenabschnitt: $y = 1/4$

h) und **i)** Die Lösungen finden Sie auf der Webseite http://www.gymomath.ch.

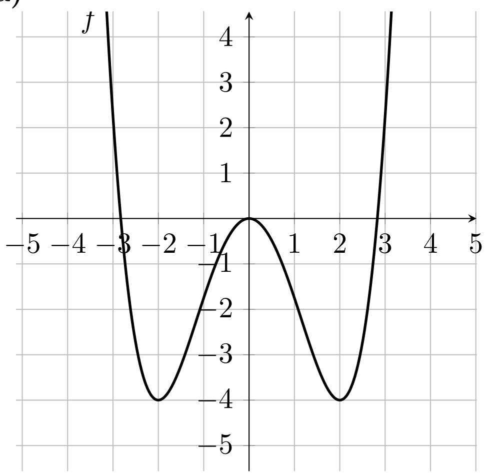
j)



- $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$
- Nullstellen: $x = -6 \pm \sqrt{51}$
- V.As: $x = -1$
- S.As: $y = x + 11$
- $\delta(x) = \dfrac{-26}{x+1}$
- $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 27}{(x+1)^2}$
- y-Achsenabschnitt: $y = -15$

Aufgabe 5.7.

a)



b) $t : y = -3x + \dfrac{5}{4}$

c) $P_1(1; -7/4)$

$P_2(-1+\sqrt{6}; 17/4 - 3\sqrt{6})$

$P_3(-1-\sqrt{6}; 17/4 - 3\sqrt{6})$

Aufgabe 5.8.

a) $625m^2$ **b)** $2500m^2$ **c)** $1250m^2$.

Aufgabe 5.9. Die beiden Zahlen sind $\pm 2\sqrt{2}$

Aufgabe 5.10. $P(3/2; 9/4)$

Aufgabe 5.11. $x = 2cm$, $V = 144cm^3$.

Aufgabe 5.12. 26 oder 25 Franken. (Eigentlich 25.50)

Aufgabe 5.13. Die idealen Dimensionen sind $1 \times 2 \times 2m$.

Aufgabe 5.14. $A(6; 0)$

Aufgabe 5.15. $P(3/8; 73/64)$

Aufgabe 5.16. $A(3; 2)$ und $B(-3; 2)$

Literatur

[1] Lambacher Schweizer 11/12, *Grundlagen der Mathematik für Schweizer Maturitätsschulen*, Klett und Balmer Verlag Zug, 2019

[2] Elemente der Mathematik 12/13, *Grundkurs Nordrhein-Westfalen*, Schroedel, 2000

[3] dtv-Atlas zur Mathematik, *Grundlagen Algebra und Geometrie*, dtv, 1974

[4] Duden, *Rechnen und Mathematik*, Dudenverlag, 2000

[5] Gasser, Steven, *Übungen zur analytischen Geometrie*

[6] Javet, Jean-Philippe, *Géométrie Analytique*

[7] Morand, Ignace, *Übungen zur analytischen Geometrie*

[8] Engelberger, Carole, Gunn-Sechehaye, Martin, Morand, Ignace, *Mathematik Lexikon*, 2017

[9] https://www.futura-sciences.com/sciences/personnalites/mathematiques-rene-descartes-203/

[10] https://fr.wikipedia.org/wiki/Euclide

[11] https://de.wikipedia.org/wiki/Analytische_Geometrie

[12] https://studyflix.de/mathematik/extremwertaufgaben-1439