Potenzen, Wurzeln, Exponentialfunktionen und Logarithmen

Yannis Paquier. Übersetzung: Carole Engelberger und Michaela Baumgärtner

2M

Inhaltsverzeichnis

Wir bedanken uns bei den verschiedenen Autoren des Buches „Notions élémenaires“, dass die „Commission Romande de Mathématiques“ veröffentlicht hat, und bei Jean-Philippe Javet, dessen verschiedene Anhänge sehr geholfen haben.

1 Potenzen

1.1 Definition von a^n für $n \in \mathbb{N}$

Definition. a^n ist das Produkt $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Mal}}$. Man liest "$a$ hoch n ".

a^n nennt man die *Potenz*, a ist die *Basis*, n der *Exponent*.

Beispiele.

1.2 Definition von a^n für $n \in \mathbb{Z}$

Es gilt

$$a^n = \begin{cases} a \cdot a \cdot \ldots \cdot a & \text{falls } n \in \mathbb{N}^* \\ 1 & \text{falls } n = 0 \\ \dfrac{1}{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a} & \text{falls } n \textit{ negativ ist} \end{cases}$$

Potenzgesetze: Für $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*, n, m \in \mathbb{N}^*$ (n und m ganze positive Zahlen), gilt

$\mathbf{p_1})\quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\mathbf{p_2})\quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$
$\mathbf{p_3})\quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\mathbf{p_4})\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Damit die Gesetze p_1 bis p_4 für alle ganzzahligen Exponenten gelten $(n, m \in \mathbb{Z})$, legt man fest :

$$a^0 = 1 \qquad \text{und} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Man erhält somit ein weiteres Gesetz : $\boxed{\mathbf{p_5})\quad \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$

Gesetz 5 ist eigentlich ein Sonderfall von Gesetz p_1.
Nachweis:

Aufgabe 0. Beweisen Sie, dass: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$

Aufgabe 1. Berechnen und vereinfachen Sie:

a) 2^{-5} **b)** -2^{-5} **c)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{4}$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ **e)** $\left(-\frac{2}{5}\right)^{3}$ **f)** $\left(-\frac{5}{2}\right)^{4}$

g) $\left(2^2\right)^3$ **h)** $2^{\left(2^3\right)}$ **i)** $2^3 - 3^2$

j) $3^2 + 3^4$ **k)** $2^{-3} \cdot 2^{-5}$ **l)** $3^4 \cdot 3^{-4}$

m) $\frac{1}{3^{-3}}$ **n)** $\frac{1}{5^{-2}}$ **o)** $2^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot (-1)^6$

p) $-3^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 6^{-1}$ **q)** $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right)^{3}$ **r)** $\frac{(-3+5)^{-2} \cdot 4^3}{8^2 \cdot (5-3)^{-4}}$

Aufgabe 2. Berechnen Sie:

a) $\left(\frac{2}{a}\right)^{-5}$ **b)** $\left(-\frac{2a}{5}\right)^{-2}$ **c)** $\left(\frac{-3}{2a}\right)^{-3}$ **d)** $\frac{1}{a^{-5}}$ **e)** $\frac{3a^{-2}}{b^{-3}}$

Aufgabe 3. Berechnen und vereinfachen Sie:

a) $2^4 \cdot 2^{-5} \cdot 2^3$ **b)** $2^5 \cdot 10^{-4} \cdot 5^5$ **c)** $\left(7^2\right)^{-3} \cdot \left(7^{-2}\right)^{-4}$

d) $\frac{3^5}{3^7}$ **e)** $\frac{(-2)^{-3}}{(-2)^{-4}}$ **f)** $\frac{2^{-7} \cdot 2^{-12}}{2^{18}}$

g) $3^{10} \cdot (-3)^{-5} \cdot 9^{-4}$ **h)** $\left(\frac{4^4 \cdot 3^5 \cdot 12^{-1}}{6^3 \cdot 2^5}\right)^{-2}$ **i)** $\frac{11^2 \cdot 7^{-3}}{7^{-2} \cdot 11^3}$

j) $\frac{3{,}4 \cdot 10^{-7}}{1{,}7 \cdot 10^{-14}}$

Aufgabe 4. Berechnen Sie und schreiben Sie die Lösungen ohne negative Exponenten :

a) $a^{-3} \cdot a^7$ **b)** $a^{-2} \cdot a^{-5}$ **c)** $3a^2b \cdot \left(-4ab^{-5}\right)$

d) $\frac{a^3}{a^7}$ **e)** $\frac{a^{-3}}{a^{-7}}$ **f)** $\frac{a^{-5}}{a^4}$

g) $\left(a^{-5}\right)^2$ **h)** $3a^{-2} \cdot 5a^5$ **i)** $\left(\frac{4a}{3b}\right)^{-3}$

j) $\left(\frac{a^5b^{-3}}{b^2}\right)^{-3}$ **k)** $\left(-3a^{-2}b^3\right)^{-3}$ **l)** $-2a^{-4}b^3 \cdot 5ab^{-2}$

m) $\left(\frac{-2x^{-3}}{5x^4}\right)^{-1}$ **n)** $\left(-4a^{-3}b\right)^2 \cdot \left(2a^{-3}b^2\right)^{-2}$

Aufgabe 5. Berechnen Sie und schreiben Sie die Lösungen ohne negative Exponenten:

a) $a^3 \cdot a^4 \cdot a^5$ **b)** $\left(a^3\right)^4$ **c)** $\dfrac{a^4}{a^5}$ **d)** $3^n \cdot 3^2$ **e)** $5^{n+1} \cdot 5^{n-1}$

f) $\dfrac{4^{n+3}}{4^4}$ **g)** $\dfrac{a^{n+1}}{a}$ **h)** $\left(a^3 \cdot b^4\right)^2$ **i)** $\dfrac{(a^2 \cdot b)^3 \cdot a^4}{(a \cdot b^3)^3}$ **j)** $a^{-n} \cdot a^{n+1}$

k) $a^{-4} \cdot a^{n+3}$ **l)** $\dfrac{a^5}{a^{-2}}$ **m)** $\dfrac{a^n}{a^{n-1}}$ **n)** $\left(\dfrac{a^{-3}}{a^{-4}}\right)^2$ **o)** $\left(\dfrac{a^3}{a^4}\right)^{-2}$

1.3 Definition von a^n für $n \in \mathbb{Q}$ (Wurzeln)

Definition. Für $a \geq 0$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ ist die *n-te Wurzel* von a jene nicht negative Zahl, deren n-te Potenz den Wert a ergibt: $(\sqrt[n]{a})^n = a$. *lies: n-te Wurzel* von a
n heisst *Wurzelexponent* und a heisst *Radikand*.

Bemerkung. Falls $n = 2$, schreibt man kurz $\sqrt{a}$ und liest: *Quadratwurzel* von a.

Beispiele.

Wurzelgesetze Falls $a \geq 0$ und $b > 0$, dann gilt:

$\mathbf{w_1}$) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$	$\mathbf{w_2}$) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$	$\mathbf{w_3}$) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
$\mathbf{w_4}$) $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\mathbf{w_5}$) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	

Beispiele.

Falls $a < 0$, gibt es zwei Fälle :

1. Falls n gerade ist, ist $\sqrt[n]{a}$ nicht definiert.
2. Falls n ungerade ist, definiert man : $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$.

Aufgabe 6. Welche Antwort ist richtig ?

	A	B	C	D
a) $\sqrt{64}$	8	± 8	-8	Keine reelle Zahl
b) $-\sqrt{49}$	± 7	7	-7	Keine reelle Zahl
c) $\sqrt{-25}$	5	-5	± 5	Keine reelle Zahl
d) $\sqrt{(-7)^2}$	-7	7	± 7	Keine reelle Zahl

Aufgabe 7. Ist A, B oder C die richtige Antwort ?

	A	B	C
a) $\sqrt{225}$	15	225	$\sqrt{15}$
b) $\sqrt{9+25}$	8	15	$\sqrt{34}$
c) $\sqrt{18}$	4,2	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{2}$
d) $\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{6}$	$\sqrt{11}$	$6\sqrt{6}$	6
e) $\sqrt{12}-\sqrt{9}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}-3$	$2\sqrt{3}+3$
f) $\dfrac{-2\sqrt{1000}}{4\sqrt{10}}$	$-\frac{1}{5}$	-5	-50
g) $\left(3\sqrt{6}\right)^2$	$9\sqrt{6}$	18	54
h) $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)^2$	6	$30-12\sqrt{6}$	$30-6\sqrt{6}$

Aufgabe 8. Berechnen Sie.

a) $\sqrt{0}$ **b)** $\sqrt{625}$ **c)** $\sqrt{0.04}$ **d)** $\sqrt{0.0009}$

e) $\sqrt{0.0016}$ **f)** $\sqrt[3]{1000}$ **g)** $\sqrt[4]{625}$ **h)** $\sqrt[5]{32}$

i) $\sqrt[3]{64}$ **j)** $\sqrt[3]{0.001}$ **k)** $\sqrt[3]{0.027}$ **l)** $\sqrt[3]{0.125}$

Aufgabe 9. Berechnen Sie und vereinfachen Sie.

a) $\left(\sqrt{3}\right)^2$ **b)** $\sqrt{3^2}$ **c)** $\sqrt{(-3)^2}$

d) $\left(2\sqrt{6}\right)^2$ **e)** $\left(\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)^2$ **f)** $\left(\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+2\sqrt{3}\right)$

g) $\sqrt{200}\cdot\sqrt{180}$ **h)** $\sqrt{48}-\sqrt{75}$ **i)** $-\sqrt{\dfrac{75}{3}}$

j) $\dfrac{\sqrt{120}}{\sqrt{10}}$ **k)** $\sqrt{3}\left(3\sqrt{12}-\sqrt{36}+\sqrt{27}\right)$ **l)** $\sqrt{50}-15\sqrt{2}+\dfrac{13}{\sqrt{2}}$

Folgendes ist bei Wurzelausdrücken zu beachten:

1. Man radiziert so weit wie möglich :

   $\sqrt{16^3} =$

   $\sqrt{72} =$

2. Im Nenner sollte keine Wurzel stehen (Normalform eines Wurzelterms):

   $\frac{3}{\sqrt{5}} =$

   $\frac{4}{1+\sqrt{5}} =$

Aufgabe 10. Radizieren Sie so weit wie möglich und geben Sie die Lösung in Normalform an.

a) $\sqrt[3]{125^2}$ **b)** $\sqrt[4]{16^3}$ **c)** $\sqrt{162}$ **d)** $2\sqrt{1000}$ **e)** $\frac{4+\sqrt{8}}{2}$

f) $\frac{14 \pm \sqrt{48}}{18}$ **g)** $\sqrt{12}+\sqrt{27}$ **h)** $\frac{1}{\sqrt{8}}$ **i)** $\frac{3}{\sqrt{27}}$ **j)** $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{18}}$

k) $\frac{5}{4\sqrt{3}}$ **l)** $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$ **m)** $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ **n)** $\frac{3\sqrt{2}+2}{\sqrt{50}}$ **o)** $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$

p) $\frac{\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$ **q)** $\frac{x+\sqrt{2}}{x-3\sqrt{2}}$ **r)** $\sqrt{\frac{1}{8}}$ **s)** $\sqrt{\frac{7}{125}}$ **t)** $4\sqrt{\frac{7}{48}}$

u) $\sqrt{\frac{39}{2}}\sqrt{\frac{1}{3}}$ **v)** $\sqrt{\frac{5}{x}}$

Aufgabe 11 (LK)**.** Radizieren Sie so weit wie möglich und geben Sie die Lösung in Normalform an.

a) $\sqrt[3]{-125}$ **b)** $\sqrt[3]{-250}$ **c)** $\sqrt[3]{16}$ **d)** $\sqrt[3]{a^4}$

e) $\sqrt[3]{a^{10}}$ **f)** $\sqrt{3a^2b^3}\sqrt{6a^5b}$ **g)** $\sqrt[3]{16x^3y^8z^4}$ **h)** $\sqrt[3]{ab}\sqrt[3]{a^2b^5}$

i) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ **j)** $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ **k)** $\frac{2}{\sqrt[3]{6}}$ **l)** $\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

Wurzelterme können auch als Potenzen mit rationalen Exponenten geschrieben werden. Für $a \geq 0$, m, $n \in \mathbb{Z}$, und $n \neq 1$ gilt:

$$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}} \quad \text{und} \quad \boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Beispiel. $4^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{4^3} = \sqrt[5]{64}$.

Aufgabe 12. Schreiben Sie folgende Potenzen als Wurzelterme und vereinfachen Sie:

a) $5^{\frac{1}{2}}$ **b)** $2^{\frac{4}{5}}$ **c)** $7^{\frac{31}{40}}$ **d)** $1024^{\frac{1}{10}}$ **e)** $0^{\frac{1}{5}}$

f) $36^{\frac{3}{2}}$ **g)** $25^{0,5}$ **h)** $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ **i)** $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

Aufgabe 13. Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit rationalen Exponenten und vereinfachen Sie.

a) $\sqrt[11]{5^6}$ **b)** $\sqrt[3]{3^9}$ **c)** $\sqrt{9^4}$ **d)** $\sqrt[4]{a^8}$ **e)** $\sqrt[5]{a^{15}}$

f) $\sqrt{a^6}$ **g)** $\sqrt[n]{a^{2n}}$ **h)** $\left(\sqrt[5]{a^6}\right)^{15}$ **i)** $\left(\sqrt[3]{a^n}\right)^3$ **j)** $\left(\sqrt{a^4}\right)^{2n}$

Aufgabe 14. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke.

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[5]{a^3}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}}$ **e)** $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a}}$

Aufgabe 15. Schreiben Sie folgende Ausdrücke ohne negativen bzw. rationalen Exponenten:

a) $\sqrt[n]{x^n}$ **b)** $\sqrt[n]{x^{2n}}$ **c)** $(x-y)^{\frac{1}{3}}$

d) $(x-y)^{-\frac{1}{4}}$ **e)** $(x+y)^{\frac{1}{n}}$ **f)** $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)$

g) $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{-n}$ **h)** $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$

Aufgabe 16. Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit rationalen Exponenten und vereinfachen Sie.

a) $x^2\sqrt[3]{x}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ **c)** $\dfrac{3}{4x^6} \cdot 2\sqrt{x} \cdot 5\sqrt[3]{x} \cdot 8\sqrt[4]{x} \cdot 5\sqrt[5]{x^4} \cdot 10\sqrt[6]{x^5}$

d) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$ **e)** $\dfrac{2}{3\sqrt{x}}$ **f)** $\dfrac{10^x}{10}$

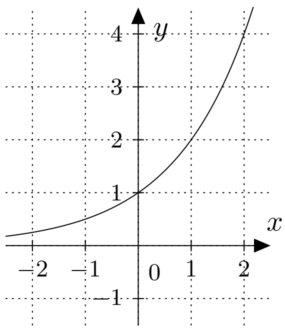
g) $(x^2-4)\sqrt{x}$ **h)** $\sqrt{3x-5}$ **i)** $\dfrac{\sqrt[3]{4x-16}}{(x-4)^3}$

j) $x^2\sqrt{5-6x^3}$

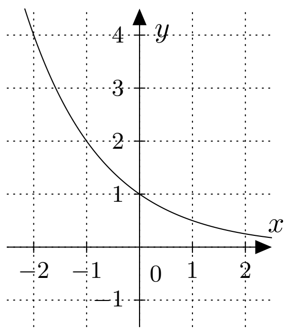
2 Exponentialfunktionen

Definition. Die Funktion $f(x) = a^x$ wird *Exponentialfunktion* zur Basis a genannt ($a > 0$ und $a \neq 1$).
Manchmal schreibt man $f(x) = \exp_a(x)$.

Beispiele.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Die Funktion $f(x) = a^x$ ist streng monoton wachsend falls $a > 1$ und streng monoton fallend falls $a < 1$. Alle Funktionswerte dieser Funktionen sind positiv.

2.1 Exponentialgleichungen

Die Kurvendiskussion der Exponentialfunktionen wird im dritten Jahr behandelt. Jetzt werden wir nur Exponentialgleichungen lösen. Dazu gibt es drei Methoden:

Methode 1: Ziel bei dieser Methode ist es, jeweils links und rechts vom Gleichheitszeichen den Exponentialterm mit derselben Basis zu schreiben, denn es gilt:

$$\boxed{a^x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y}$$

Methode 2: Mit Hilfe von Substitution und den Lösungsmethoden von quadratischen beziehungsweise biquadratischen Gleichungen.

Methode 3: Mit Hilfe von Logarithmen und den Logarithmengesetzen (siehe Kapitel 3).

Häufig ist es auch notwendig mehrere Methoden nacheinander anzuwenden.

Beispiele. (zu Methode 1)

a) $5^{x+2} = 125$

b) $2^{3x-1} = \frac{1}{2}$

c) $36^{x-9} = 6^{-x}$

d) $5 \cdot 8^{x-5} = 80$

Aufgabe 17. Lösen Sie folgende Gleichungen wie die Beispiele oben.

a) $4^{x-3} = 8^{4-x}$

b) $3^{2x+3} = 3^{x^2}$

c) $2^{-100x} = (0{,}5)^{x-4}$

d) $8^x = 2$

e) $27^{x+2} = 3^{5x+8}$

f) $3^{4x} = 9^{x+5}$

g) $(0{,}1)^x = 1000$

h) $5^{2x} - \frac{1}{625} = 0$

i) $5^{x+2} \cdot 25^{-x} = 625$

j) $\left(3^{x-1}\right)^3 = 9 \cdot 3^{x-2}$

k) $e^{\frac{6}{x}} = e^{x-1}$

l) $3^{5x+4} = 9\sqrt{3}$

Beispiele. (zu Methode 2)

a) $2 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^x - 20 = 0$

b) $9 \cdot 3^{-3x} - 10 \cdot 3^{-x} + 3^x = 0$

Aufgabe 18. Lösen Sie folgende Gleichungen mit Methode 2.

a) $5 \cdot 5^{2x} + 14 \cdot 5^x - 3 = 0$

b) $3^x + 9^x = 90$

c) $4 \cdot 2^{-3x} - 5 \cdot 2^{-x} + 2^x = 0$

d) $2 \cdot 2^{6x-1} + 3 \cdot 2^{3x+1} + 9 = 0$ (LK)

2.2 Einschub: Die Eulersche Zahl e

Die Zahl $e = 2.71828\ldots$ ist wie die Zahl π, eine sehr wichtige Zahl in der Mathematik. Zahlreiche Vorgänge in der Natur wie z.B. das Pflanzenwachstum, die Ausbreitung von Epidemien oder die Entwicklung einer Population können durch die **natürliche Exponentialfunktion** $f(x) = e^x$ beschrieben werden.

Auch in den Finanzwissenschaften tritt die Zahl e häufig auf, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel. Ein Kapital K_0 wird auf ein Bankkonto angelegt. Der Zinssatz pro Jahr beträgt 100%. Nach einem Jahr würde sich das Kapital damit verdoppeln: $K = K_0 + K_0 = 2K_0$.
Nun möchte der Bankkunde lieber eine halbjährliche Verzinsung mit 50%(= 1/2). Die Bank erklärt sich einverstanden und rechnet dem Bankkunden vor:

Nach 6 Monaten:

Nach einem Jahr:

Der Bankkunde überlegt sich, die Zinsabschnitte noch weiter zu verkleinern: eine monatliche Verzinsung mit einem Zinssatz von 1/12, oder gar eine tägliche Verzinszung mit 1/365 usw.

Monatliche Verzinsung:

Tägliche Verzinsung:

Der Bankkunde sieht sich schon als reicher Mann. Zu recht ??

Das obige Beispiel kann verallgemeinert mit der sogenannten *Zinseszinsformel* $K = K_0\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ beschrieben werden.

Die Potenzen führen zur Eulerschen Zahl e als Grenzwert :

$$\boxed{e = \lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

.

3 Logarithmen

3.1 Der Begriff des Logarithmus

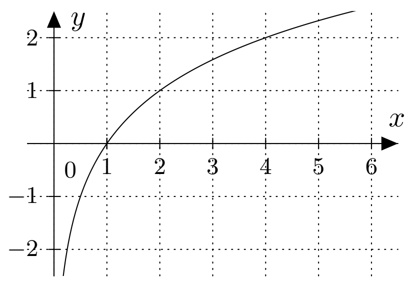
Definition. Der *Logarithmus* von x zur Basis a, kurz $\log_a(x)$, ist die Zahl (Exponent), mit der man a potenzieren muss, um x zu erhalten. Es gilt also ($a > 0$, $a \neq 1$ und $x > 0$)

$$\boxed{\log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y} \qquad\qquad (\log_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R})$$

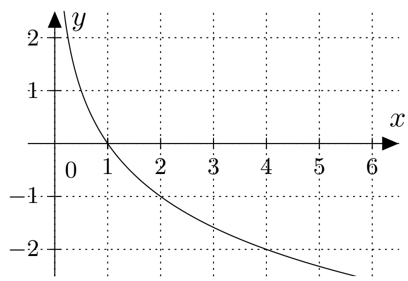
Aus dieser Definition lassen sich die folgenden zwei Beziehungen ableiten: $\log_a(a^x) = x$ und $a^{\log_a(x)} = x$.

Die Logarithmusfunktion zur Basis a, $f(x) = log_a(x)$ ist streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $a < 1$.

Beispiele.



$f(x) = \log_2(x)$



$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$

Beispiele.

a) $\log_2(16) = y \quad \Leftrightarrow$

b) Lösen Sie die folgenden Gleichungen :

$\log_x(8) = 3$ $\qquad\qquad$ $\log_2(x) = 3$

Aufgabe 19. Berechnen Sie.

a) $\log_5(1)$ **b)** $\log_2(8)$ **c)** $\log_3\left(\sqrt{3}\right)$ **d)** $\log_4\left(\sqrt[5]{64}\right)$

e) $\log_4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)$ **f)** $\log_3\left(\frac{1}{81}\right)$ **g)** $\log_{\frac{1}{8}}(64)$ **h)** $\log_4\left(\sqrt{2}\right)$

i) $\log_{49}\left(\sqrt[3]{7}\right)$ **j)** $\log_{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{8}\right)$ **k)** $\log_{0,1}(0{,}0001)$ **l)** $\log_{100}(0{,}01)$

Aufgabe 20. Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $\log_3(x) = 5$ **b)** $\log_8(x) = \frac{2}{3}$ **c)** $\log_{0,01}(x) = \frac{1}{2}$

d) $\log_x(125) = 3$ **e)** $\log_x(32) = \frac{5}{3}$ **f)** $\log_x(0{,}0025) = 2$

3.2 Geschichtliches

Die Entdeckung wichtiger Gesetzmässigkeiten bezüglich der Planetenbahnen (u.a. durch Kopernikus und Kepler) im 16. Jahrhundert machte Berechnungen mit sehr grossen Zahlen notwendig. Insbesondere das Multiplizieren, Dividieren, als auch das Wurzelziehen mit diesen grossen Zahlen waren jedoch sehr zeitaufwendig und kompliziert. Der Schotte John Neper veröffentlichte im Jahre 1614 eine numerische Tabelle, an welcher er 40 (!) Jahre gearbeitet hatte. Die Tabelle besteht aus zwei Spalten, wobei das Produkt zweier Zahlen aus der linken Spalte gleich der Summe der entsprechenden Werte aus der rechten Spalte ist. Dies war das erste Mal, dass die Logarithmen in Erscheinung traten. Heute wird dieser Zusammenhang mit der folgende Formel geschrieben.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

- Leiten Sie, analog zu der Formel oben, die nächste Formel her:

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \text{....................................}$$

- Füllen Sie die Lücken in der numerischen Tabelle auf der nächsten Seite aus.
- Ergänzen Sie mit Hilfe der numerischen Tabelle die folgenden Eigenschaften

$$\log_a\left(x^n\right) = \text{......................................}$$

$$\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \text{....................................}$$

Aufgabe 21. Es gilt $\log_2(3) \approx 1.58496$ und $\log_2(5) \approx 2.32193$, berechnen Sie damit :

a) $\log_2(15)$ **b)** $\log_2(27)$ **c)** $\log_2\left(\frac{3}{5}\right)$

d) $\log_2(45)$ **e)** $\log_2\left(\sqrt{5}\right)$ **f)** $\log_2(6)$

g) $\log_2(20)$ **h)** $\log_2\left(\frac{25}{6}\right)$ **i)** $\log_2(1000)$

j) $\log_2\left(8\sqrt{5}\right)$ **k)** $\log_2\left(\frac{4}{\sqrt{27}}\right)$ **l)** $\log_2\left(\sqrt[3]{36}\right)$

Numerische Tabelle

x	$f(x)$
0	*Error*
1	0.000
2	0.693
3	
4	1.386
5	1.609
6	1.792
7	1.946
8	
9	2.197
10	2.303
11	2.398
12	2.485
13	2.565
14	2.639
15	2.708
16	2.773
17	
18	2.890
19	2.944
20	2.996
21	3.045
22	3.091
23	3.135
24	3.178
25	3.219

x	$f(x)$
26	3.258
27	3.296
28	3.332
29	3.367
30	3.401
31	3.434
32	3.466
33	3.497
34	3.526
35	3.555
36	3.584
37	3.611
38	3.638
39	3.664
40	3.689
41	3.714
42	3.738
43	3.761
44	3.784
45	3.807
46	3.829
47	3.850
48	3.871
49	3.892
50	3.912
51	3.932

x	$f(x)$
52	3.951
53	3.970
54	3.989
55	4.007
56	4.025
57	4.043
58	4.060
59	4.078
60	
61	4.111
62	4.127
63	4.143
64	4.159
65	4.174
66	4.190
67	4.205
68	4.220
69	4.234
70	4.248
71	4.263
72	4.277
73	4.290
74	4.304
75	4.317
76	4.331
77	4.344

x	$f(x)$
78	4.357
79	4.369
80	4.382
81	4.394
82	4.407
83	4.419
84	4.431
85	4.443
86	4.454
87	4.466
88	4.477
89	4.489
90	4.500
91	4.511
92	4.522
93	4.533
94	4.543
95	4.554
96	4.564
97	4.575
98	4.585
99	4.595
100	4.605
101	4.615
102	4.625
103	4.635

x	$f(x)$
104	4.644
105	4.654
106	4.663
107	4.673
108	4.682
109	4.691
110	4.700
111	4.710
112	4.718
113	4.727
114	4.736
115	4.745
116	4.754
117	4.762
118	4.771
119	4.779
120	4.787
...	...
200	
500	6.215
1000	
2000	7.601
5000	8.517
10000	9.210
50000	10.820
100000	11.513

3.3 Logarithmengesetze

Im Folgenden werden wir einige wichtige Eigenschaften von Logarithmen zeigen.

Logarithmusgesetze: Für alle $x > 0$, $y > 0$ und $r \in \mathbb{R}$, und jede Basis $a, b > 0$ und $a, b \neq 1$ gilt:

1) $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$	**2)** $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3) $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$	**4)** $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$
5) $\log_b(x) = \frac{\log(x)}{\log(b)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$	

Beweis von Gesetz 1).

Bemerkung. Für den Logarithmus zur Basis 10 schreibt man kurz $\log(x)$, beziehungsweise $\lg(x)$. Der Logarithmus zur Basis e wird der natürliche Logarithmus genannt, und man schreibt kurz $\ln(x)$.

Aufgabe 22.

a) Beweisen Sie die Eigenschaften 2) und 4).
b) Beweisen Sie mit Hilfe der Eigenschaft 2) die Eigenschaft 3).
c) Vervollständigen Sie den folgenden Beweis.

$$y = \log_b(x) \quad \Leftrightarrow \quad b^{\cdots\cdots} = \ldots\ldots \quad \Leftrightarrow \quad \log(b^{\cdots\cdots}) = \ldots\ldots$$

$$\Leftrightarrow \quad y\log(b) = \ldots\ldots \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

Womit auch Eigenschaft 5) bewiesen wäre. Diese Eigenschaft erlaubt es uns, mit dem Taschenrechner jeden beliebigen Logarithmus berechnen zu können. Zum Beispiel : $\log_3(8) = \frac{\log(8)}{\log(3)} = \frac{\ln(8)}{\ln(3)} \cong 1.89279$.

3.4 Exponentialgleichungen und Logaritmusgleichungen

Beispiele. (zu Methode 3)
Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $5^x = 98$ **b)** $\log_3(4) + \log_3(x+1) = 2\log_3(x-2)$

c) $2^{3x-1} = 5^{2-x}$

Aufgabe 23. Lösen Sie folgende Gleichungen :

a) $2^x = 100$ **b)** $0{,}8^x = 0.0005$ **c)** $e^x = \pi$

d) $3^{-\frac{1}{x}} = 20$ **e)** $7^{\sqrt{x}} = 3$ **f)** $e^{-\ln(x)} = 3$

g) $2^{x-1} = 3^x$ **h)** $4^{x+1} = 6^{3x}$ **i)** $2^{x+4} = 3^{x-1}$

Aufgabe 24. Lösen Sie folgende Gleichungen :

a) $3\log_a(x) = 2\log_a(8)$

b) $\log(9x+5) - \log(x) = 1$

c) $\log(x+2) - \log(3) = \log(2x-1) + \log(7)$

d) $\log(x+2) + \log(x-1) = \log(18)$

e) $\log(2x-3) + \log(3x+10) = 4\log(2)$

f) $\log_2(x^2-4) = 2\log_2(x+3)$

g) $\log_3(35-x^3) = 3\log_3(5-x)$

h) $\log(x^2-7) = 2\log(x+3)$

i) $\log(20) + \log(x^2-9) - \log(x+3) = 1 + \log(2x+6)$

Aufgabe 25 (LK)**.** Lösen Sie folgende Gleichungen :

a) $\log_2(x) = \dfrac{1}{2} + \log_4(4x+15)$

b) $\log_9(x) = \dfrac{1}{8}\log_3(x^2+2)$

c) $\log_x\left(7^3\right) - \log_7(x) = 2$

---

4 Anwendungsgebiete

4.1 Exponentielle Zunahme oder Abnahme

Définitionen.

- Man spricht von einer exponentiellen Zunahme wenn innerhalb eines festen Zeitraumes ein Wert gleichmässig um denselben Prozentsatz ansteigt. Es gilt :

$$\boxed{A(t) = A_0(1+p)^t}$$

  wobei A_0 der Anfangswert ist, $p > 0$ der Prozentsatz und t die Zeit.

- Man spricht von einer exponentiellen Abnahme wenn innerhalb eines festen Zeitraumes ein Wert gleichmässig um denselben Prozentsatz abnimmt. Es gilt:

$$\boxed{A(t) = A_0(1-p)^t}$$

Beispiele.

Sie legen 3'200.- zu einem jährlichen Zinssatz von 6% bei einer Bank an. Welchen Geldbetrag erhalten Sie sieben Jahre später ?

Eine Person leiht sich 8'000.-. Nach fünf Jahren muss sie 9'000.- zurückbezahlen. Welcher Zinssatz wurde vereinbart ?

Eine Population wächst jährlich um 7%. Nach wie vielen Jahren hat sie sich verdoppelt ?

Aufgabe 26.

a) Der Holländer P. Minuit kaufte im Jahre 1626 die Insel Manhattan für 24 $. Berechnen Sie den Wert der Insel im Jahre 2000, bei einer jährlichen Wertsteigerung von 5% ?

b) Zu welchem Zinssatz muss ein Kapital angelegt werden, damit es sich in 31 Jahren vervierfacht ?

c) Eine Geldsumme wird zu 6% verzinst. Nach wie vielen Jahren hat sich die Geldsumme verdreifacht ?

d) Ein Wald wächst um 3,25% im Jahr. Der Waldbestand beträgt heute 200'000 m^3. Welches war der Waldbestand vor 15 Jahren ?

e) Im Jahre 1790 fand die erste Volkszählung in den USA statt. Sie ergab eine Einwohnerzahl von 3'929'000. 1950 betrug die Einwohnerzahl 161'800'000. Berechnen Sie die jährliche Zunahme der Einwohnerzahl in Prozent von 1790 bis 1950.

Aufgabe 27. Ein Kapital wird halbiert. Die eine Hälfte wird zu 3% Zinsen pro Jahr angelegt, die andere Hälfte zu 6%. Nach welcher Zeit hat die zweite Hälfte den doppelten Wert gegenüber der ersten Hälfte ?

Aufgabe 28. Ein Medikament gegen Asthma wird in Tablettenform (100mg/Tablette) eingenommen. Die Konzentration $A(t)$ des Medikaments im Blut nach t Minuten kann durch folgende Funktion berechnet werden:

$$A(t) = 100\left(1 - 0{,}9^t\right) \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Nach welcher Zeit beträgt die Medikamentenkonzentration im Blut noch 50mg ?

Aufgabe 29. Bei einer bestimmten Baumsorte lässt sich die maximale Wuchshöhe h in Abhängigkeit vom Alter t (in Jahren) mit der folgenden Formel beschreiben :

$$h(t) = \frac{40}{1 + 20e^{-0{,}2t}}$$

a) Welche Wuchshöhe hat ein 10 Jahre alter Baum ?

b) Wie alt ist ein Baum, dessen Höhe 28 Meter beträgt ?

5 Lösungen

Aufgabe 1.

a) $\frac{1}{32}$ **b)** $\frac{-1}{32}$ **c)** $\frac{1}{81}$ **d)** 25 **e)** $-\frac{8}{125}$

f) $\frac{625}{16}$ **g)** 64 **h)** 256 **i)** -1 **j)** 90

k) $2^{-8} = \frac{1}{256}$ **l)** 1 **m)** 27 **n)** 25 **o)** $\frac{9}{8}$

p) $-\frac{1}{432}$ **q)** $-\frac{243}{32}$ **r)** 4

Aufgabe 2.

a) $\frac{a^5}{32}$ **b)** $\frac{25}{4a^2}$ **c)** $\frac{-8a^3}{27}$ **d)** a^5 **e)** $\frac{3b^3}{a^2}$

Aufgabe 3.

a) 4 **b)** 10 **c)** 49 **d)** $\frac{1}{9}$ **e)** -2

f) $\frac{1}{2^{37}}$ **g)** $-\frac{1}{27}$ **h)** $\frac{16}{9}$ **i)** $\frac{1}{77}$ **j)** $2 \cdot 10^7$

Aufgabe 4.

a) a^4 **b)** $\frac{1}{a^7}$ **c)** $\frac{-12a^3}{b^4}$ **d)** $\frac{1}{a^4}$ **e)** a^4

f) $\frac{1}{a^9}$ **g)** $\frac{1}{a^{10}}$ **h)** $15a^3$ **i)** $\frac{27b^3}{64a^3}$ **j)** $\frac{b^{15}}{a^{15}}$

k) $-\frac{a^6}{27b^9}$ **l)** $-\frac{10b}{a^3}$ **m)** $-\frac{5x^7}{2}$ **n)** $\frac{4}{b^2}$

Aufgabe 5.

a) a^{12} **b)** a^{12} **c)** $\frac{1}{a}$ **d)** 3^{n+2} **e)** 5^{2n}

f) 4^{n-1} **g)** a^n **h)** $a^6 \cdot b^8$ **i)** $\frac{a^7}{b^6}$ **j)** a

k) a^{n-1} **l)** a^7 **m)** a **n)** a^2 **o)** a^2

Aufgabe 6.

a) A **b)** C **c)** D **d)** B

Aufgabe 7.

a) A **b)** C **c)** C **d)** C **e)** B **f)** B **g)** C **h)** B

Aufgabe 8.

a) 0 **b)** 25 **c)** $\frac{1}{5} = 0{,}2$ **d)** $\frac{3}{100} = 0{,}03$

e) $\frac{1}{25} = 0{,}04$ **f)** 10 **g)** 5 **h)** 2

i) 4 **j)** $\frac{1}{10} = 0.1$ **k)** $\frac{3}{10} = 0.3$ **l)** $\frac{1}{2} = 0.5$

Aufgabe 9.

a) 3 **b)** 3 **c)** 3 **d)** 24 **e)** $17 - 4\sqrt{15}$

f) -7 **g)** $60\sqrt{10}$ **h)** $-\sqrt{3}$ **i)** -5 **j)** $2\sqrt{3}$

k) $27 - 6\sqrt{3}$ **l)** $-\frac{7}{2}\sqrt{2}$

Aufgabe 10.

a) 25 **b)** 8 **c)** $9\sqrt{2}$ **d)** $20\sqrt{10}$ **e)** $2 + \sqrt{2}$

f) $\frac{7 \pm 2\sqrt{3}}{9}$ **g)** $5\sqrt{3}$ **h)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **i)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **j)** $\frac{4}{3}$

k) $\frac{5\sqrt{3}}{12}$ **l)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **m)** $\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$ **n)** $\frac{3+\sqrt{2}}{5}$ **o)** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

p) $-\frac{\sqrt{5}+5}{4}$ **q)** $\frac{x^2+4\sqrt{2}x+6}{x^2-18}$ **r)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **s)** $\frac{\sqrt{35}}{25}$ **t)** $\frac{\sqrt{21}}{3}$

u) $\frac{\sqrt{26}}{2}$ **v)** $\frac{\sqrt{5x}}{x}$

Exercice 11.

a) -5 **b)** $-5\sqrt[3]{2}$ **c)** $2\sqrt[3]{2}$ **d)** $a\sqrt[3]{a}$

e) $a^3\sqrt[3]{a}$ **f)** $3a^3b^2\sqrt{2a}$ **g)** $2xy^2z\sqrt[3]{2y^2z}$ **h)** ab^2

i) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ **j)** $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ **k)** $\frac{\sqrt[3]{36}}{3}$ **l)** $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$

Aufgabe 12.

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt[5]{16}$ **c)** $\sqrt[40]{7^{31}}$ **d)** 2 **e)** 0

f) 216 **g)** 5 **h)** $\frac{1}{3}$ **i)** $\frac{9}{4}$

Aufgabe 13.

a) $5^{\frac{6}{11}}$ **b)** $3^3 = 27$ **c)** $9^2 = 81$ **d)** a^2 **e)** a^3

f) a^3 **g)** a^2 **h)** a^{18} **i)** a^n **j)** a^{4n}

Aufgabe 14.

a) $\sqrt[4]{2}$ **b)** $\sqrt[6]{a^5}$ **c)** $\sqrt[10]{a^9}$ **d)** 1 **e)** $\sqrt[12]{a}$

Aufgabe 15.

a) x **b)** x^2 **c)** $\sqrt[3]{x-y}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x-y}}$ **e)** $\sqrt[n]{x+y}$

f) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ **g)** $(1+x)^n$ **h)** $a-b$

Aufgabe 16.

a) $x^{\frac{7}{3}}$ **b)** $x^{\frac{1}{4}}$ **c)** $3000x^{\frac{-197}{60}}$ **d)** $4x^{\frac{-2}{3}}$ **e)** $\dfrac{2}{3}x^{\frac{-1}{2}}$

f) 10^{x-1} **g)** $x^{\frac{5}{2}}-4x^{\frac{1}{2}}$ **h)** $(3x-5)^{\frac{1}{2}}$ **i)** $4^{\frac{1}{3}}(x-4)^{-\frac{8}{3}}$ **j)** $x^2\left(5-6x^3\right)^{\frac{1}{2}}$

Aufgabe 17.

a) $L=\left\{\dfrac{18}{5}\right\}$ **b)** $L=\{-1;3\}$ **c)** $L=\left\{-\dfrac{4}{99}\right\}$ **d)** $L=\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

e) $L=\{-1\}$ **f)** $L=\{5\}$ **g)** $L=\{-3\}$ **h)** $L=\{-2\}$

i) $L=\{-2\}$ **j)** $L=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ **k)** $L=\{3;-2\}$ **l)** $L=\left\{-\dfrac{3}{10}\right\}$

Aufgabe 18.

a) $L=\{-1\}$ **b)** $L=\{2\}$ **c)** $L=\{0;1\}$ **d)** $L=\emptyset$

Aufgabe 19.

a) 0 **b)** 3 **c)** $\dfrac{1}{2}$ **d)** $\dfrac{3}{5}$ **e)** $-\dfrac{2}{3}$ **f)** -4

g) -2 **h)** $\dfrac{1}{4}$ **i)** $\dfrac{1}{6}$ **j)** $-\dfrac{3}{4}$ **k)** 4 **l)** -1

Aufgabe 20.

a) $L=\{243\}$ **b)** $L=\{4\}$ **c)** $L=\{0{,}1\}$

d) $L=\{5\}$ **e)** $L=\{8\}$ **f)** $L=\{0{,}05\}$

Aufgabe 21.

a) 3,90689 **b)** 4,75488 **c)** $-0{,}73697$
d) 5,49185 **e)** 1,16097 **f)** 2,58496
g) 4,32193 **h)** 2,05889 **i)** 9,96579
j) 4,16097 **k)** $-0{,}37744$ **l)** 1,72331

Aufgabe 23.

a) $L=\{6{,}644\}$ **b)** $L=\{34{,}063\}$ **c)** $L=\{1{,}145\}$

d) $L=\{-0{,}367\}$ **e)** $L=\{0{,}319\}$ **f)** $L=\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

g) $L=\{-1{,}710\}$ **h)** $L=\{0{,}348\}$ **i)** $L=\{9{,}548\}$

Aufgabe 24.

a) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ $\quad L = \{4\}$

b) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ $\quad L = \{5\}$

c) $D_f = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ $\quad L = \left\{\frac{23}{41}\right\}$

d) $D_f =]1; +\infty[$ $\quad L = \{4\}$

e) $D_f = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ $\quad L = \{2\}$

f) $D_f =]-3; -2[\cup]2; +\infty[$ $\quad L = \left\{-\frac{13}{6}\right\}$

g) $D_f = \left]-\infty; \sqrt[3]{35}\right[$ $\quad L = \{2; 3\}$

h) $D_f = \left]-3; -\sqrt{7}\right[\cup\left]\sqrt{7}; +\infty\right[$ $\quad L = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$

i) $D_f =]3; +\infty[$ $\quad L = \emptyset$

Aufgabe 25.

a) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ $\quad L = \left\{4 + \sqrt{46}\right\}$

b) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ $\quad L = \left\{\sqrt{2}\right\}$

c) $D_f = \mathbb{R}_+^*$ $\quad L = \left\{7; \frac{1}{343}\right\}$

Aufgabe 26.

a) $2'018'408'628$ \$ **b)** 4,57% **c)** zwischen 18 und 19 Jahren **d)** $123'788\text{m}^3$ **e)** 2,35%

Aufgabe 27.

24,14 Jahre

Aufgabe 28.

6 Minuten und 35 Sekunden

Aufgabe 29.

a) 10,79 Meter **b)** 19,22 Jahre